



REFLEXÕES SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO E DO SEGUNDO GRAUS, COM O SOFTWARE GEOGEBRA, POR MEIO DE UMA ABORDAGEM DIALÓGICA E INVESTIGATIVA

Luciano Feliciano de Lima¹

Valdiron Robson Ferreira de Souza²

Matheus Souza Amorim³

Temática do artigo: - Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Por meio deste relato de experiência objetiva-se refletir sobre o ensino de funções polinomiais, do primeiro e do segundo graus, a partir de uma perspectiva dialógica e investigativa. Para isto, inicialmente são apresentados argumentos, fundamentados em literatura que reflete sobre a escola inserida na uma sociedade da era da informação e como o computador, com o *software* GeoGebra, pode contribuir nas aulas de matemática para a formação de sujeitos críticos e participativos. Entende-se que o desenvolvimento de aulas numa perspectiva dialógica e investigativa tem a ver com um profundo respeito do professor aos alunos. Respeito demonstrado, e percebido pelos alunos, quando o professor lhes considera como sujeitos de aprendizagem e, por este motivo, como produtores de conhecimento. Isto é evidenciado com a preocupação do professor em criar um ambiente em que atua como facilitador da aprendizagem dos alunos. Faz perguntas, com uma postura investigativa, na tentativa de reconhecer a maneira como os alunos interpretam os problemas. Permite, e incentiva que os alunos expressem suas ideias matemáticas na busca de solucionar o problema sugerido. Considera-se que trabalhos nesse sentido possam contribuir com reflexões sobre o ensino e a aprendizagem da matemática e para a formação de sujeitos críticos e participativos.

Palavras Chaves: Educação Matemática. Investigação Matemática. Funções Polinomiais do Primeiro e Segundo Graus. Informática e Educação Matemática. *Software* GeoGebra.

Introdução

Atualmente vivemos num cenário de grandes mudanças promovidas pelos avanços tecnológicos. De acordo com Pérez Gómez (2015), estamos na era da informação digital, por este motivo, somos considerados uma aldeia global com um acesso ao conhecimento de maneira “relativamente fácil, imediato, onipresente e acessível” (p. 14). Diante disso, este pesquisador reflete sobre o sentido da escola, entendendo-a como um cenário “de aprendizagem, onde os alunos investigam, compartilham, aplicam e refletem” (PÉREZ GÓMEZ, 2015, p. 29).

O nosso interesse se volta para o desenvolvimento deste cenário na aula de matemática. Entendemos com Alrø e Skovsmose (2006) um cenário para

¹ Doutor em Educação Matemática pela Unesp de Rio Claro/SP. Universidade Estadual de Goiás. lucianolima@gmail.com

² Licenciando em Matemática. Universidade Estadual de Goiás. valdironocara@outlook.com

³ Licenciando em Matemática. Universidade Estadual de Goiás. msamorim01@gmail.com

investigação, como um ambiente, viabilizado pelo professor, para contribuir com um trabalho ativo dos alunos em seu processo de aprendizagem. Nesse espaço, os alunos se questionam, sobre o objeto de estudo, com perguntas do tipo “o que acontece se...?” e ao refletirem sobre esse processo levantam conjecturas, testam-nas, chegam a conclusões e defendem suas ideias, por meio de argumentações matemáticas, com os demais colegas e com o professor.

Em busca desse possível cenário, não descartamos a sala de aula de matemática da lousa, do lápis e do papel, mas acreditamos na possibilidade de aproveitar outros ambientes da escola para envolver os alunos, entendendo-os como sujeitos de conhecimento. Por isso, consideramos a aula em um ambiente informatizado como mais um dos espaços possíveis para promover este cenário de investigação. O trabalho com a matemática em ambiente informatizado é refletido e divulgado, via Internet, aos interessados que tenham acesso a esse meio de comunicação. É possível encontrar trabalhos acadêmicos, artigos, dissertações, teses e trabalhos de professores que compartilham suas experiências profissionais tanto por escrito quanto em vídeo.

Para além destes trabalhos, com a Internet, também é possível acessar *softwares* matemáticos gratuitos como, por exemplo, o GeoGebra que pode ser utilizado online ou baixado gratuitamente pelo usuário. O GeoGebra é um *software* de matemática, com interface acessível, segundo o Wikipedia, ele é um programa matemático que reúne Geometria, Álgebra e Cálculo, desenvolvido pelo professor Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg, visando a dinamicidade do ensino e da aprendizagem da matemática nas escolas (WIKIPEDIA). Este *software* está viabilizando o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática para a criação de ambientes de aprendizagens tais como:

A utilização do software GeoGebra no estudo do domínio de uma função e das funções afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica baseadas nas experiências do professor-pesquisador com a 1ª série do ensino médio (MOREIRA, 2014; ZANDONADI, 2013; SILVA, 2013; LOPES JÚNIOR, 2013; SCANO, 2009).

Essas pesquisas disponibilizadas na Internet nos mostra a possibilidade de acesso ao conhecimento científico produzido na área educacional. Para Kenski (2007) a popularização da informação, difundida na *Internet*, possibilita que as pessoas façam buscas, visando conhecer algo, de maneira mais independente. O mundo virtual potencializa um leque de possibilidades àqueles interessados na

busca de entender algo, por si mesmos, sem a necessidade de seguir passos pré-estabelecidos por outros. Ela considera que a tecnologia está cada vez mais acessível, favorecendo rupturas com fontes do poder intelectual, como a escola, por exemplo.

O filósofo Lévy (1998, p. 28), ao refletir sobre o impacto do computador e da *Internet* na produção de conhecimento, argumenta que a interação entre seres humanos no ciberespaço cria uma inteligência coletiva que “é uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente valorizada, coordenada em tempo real, que resulta em uma mobilização efetiva das competências.”.

Borba e Penteadó (2001) apropriaram-se da ideia de inteligência coletiva proposta por Lévy e argumentam que o conhecimento é construído por um coletivo de seres-humanos-com-mídias. Segundo esses autores, os seres humanos estão de tal forma impregnados de tecnologias – e por tecnologias entendem a oralidade, a escrita, o lápis, os computadores, entre outras – que não é possível pensar atualmente a produção de conhecimentos sem a interação entre as pessoas e as mídias.

Para Borba e Penteadó (2001, p. 48), a aprendizagem de forma linear, geralmente associada a livros, vem sendo ultrapassada. Estes pesquisadores compreendem o computador como um novo ator no palco da educação. Por meio dele é possível refletir sobre determinada situação ou problema, a fim de se produzir novos saberes, “baseados na simulação, na experimentação e em uma ‘nova linguagem’ que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea.”.

O poder da escola como fonte detentora do saber, centrado na transmissão de informações vem sendo questionado com mais intensidade atualmente. Frente ao desenvolvimento das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) a “escola contemporânea parece uma instituição mais acomodada às exigências do século XIX do que aos desafios do século XXI” (PÉREZ GÓMEZ, 2015, p. 33). Não raro as aulas são desenvolvidas por meio de uma pedagogia obsoleta, com classes lotadas, alunos entediados e desinteressados e com professores esgotados por terem que trabalhar em dois ou três turnos.

Investigações sobre funções num ambiente informatizado

Para nós, somente mudar o espaço da sala de aula, transferindo-a para um ambiente informatizado, como o do laboratório de informática, não é suficiente para uma mudança da escola ou, mais especificamente, da aula de matemática. Cabe pensar em uma abordagem pedagógica que convide o aluno envolver-se ativamente no processo de aprendizagem. Nesse sentido, o professor organiza cenários de aprendizagem e compartilha com os alunos a responsabilidade pelo sucesso, ou não, de uma aula.

Ao considerar as possibilidades da produção de conhecimentos de matemática por meio do computador, consideramos, por exemplo, que sua rapidez na construção de vários gráficos permite a investigação de objetos matemáticos. Para elucidar, pensemos numa situação na sala de aula: Pretendemos que os alunos percebam o que acontece quando variamos os coeficientes de uma função do primeiro grau do tipo $y = ax + b$. Para fazer isto na sala de aula, sem o computador, os alunos demorariam um tempo considerável para construir alguns gráficos.

Suponhamos que quiséssemos que eles percebessem o que acontece, primeiramente, com a variação do coeficiente a , então pediríamos aos alunos para construírem alguns gráficos, no caderno, tais como: $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$, $y = 4x + 1$, $y = 5x + 1$. Para construir os gráficos destas cinco funções os alunos, provavelmente, gastariam um tempo considerável. Destaque-se, ainda, que não construíram gráficos da função do primeiro grau com coeficiente a negativo, ou seja, com $a < 0$. Como a construção desses gráficos demanda muito tempo nas aulas, não raro, o professor geralmente explica o que ocorre com o gráfico da função do primeiro grau com a variação do coeficiente dos seus coeficientes. Os alunos veem e entendem a explicação do professor, mas perdem o prazer da descoberta.

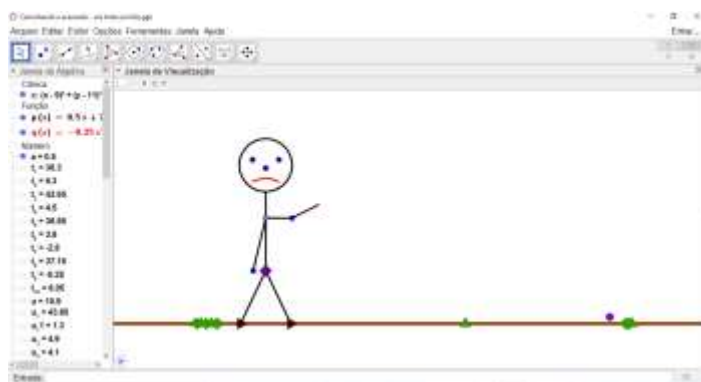
Por outro lado, no laboratório de informática os alunos podem ser convidados a investigar o que ocorre quando se altera os coeficientes de uma função do primeiro grau com o software GeoGebra. Aceitam o convite do professor que lhes pede para construir vários gráficos como, por exemplo: $y = -5x + 1$, $y = -4x + 1$, $y = -3x + 1$, $y = -2x + 1$, $y = -x + 1$, $y = x + 1$, $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$, $y = 4x + 1$, $y = 5x + 1$. O professor quer que os alunos percebam o que acontece com o gráfico ao se alterar o coeficiente a . Por isso, ele espera que eles expressem suas

conclusões e pergunta aos demais colegas se concordam. Esta é uma maneira de promover a participação dos alunos na produção do conhecimento. Seria interessante pedir para os alunos anotarem suas conclusões e o trabalho em grupo poderia promover o compartilhamento de ideias entre eles. Para o estudo do coeficiente b , da função do primeiro grau, o professor poderia pedir aos alunos fazerem outras construções de gráficos em que se varia este coeficiente.

O trabalho desta maneira segue uma abordagem dialógica e investigativa, na qual os alunos produzem seu conhecimento sobre o objeto de estudo. Durante a aula o professor está oferecendo oportunidades aos alunos para refletirem sobre o que acontece com o gráfico da função. Enquanto os alunos estão trabalhando ele faz questionamentos sobre como estão fazendo, como estão anotando suas conclusões, promovendo um espírito investigativo em seus alunos.

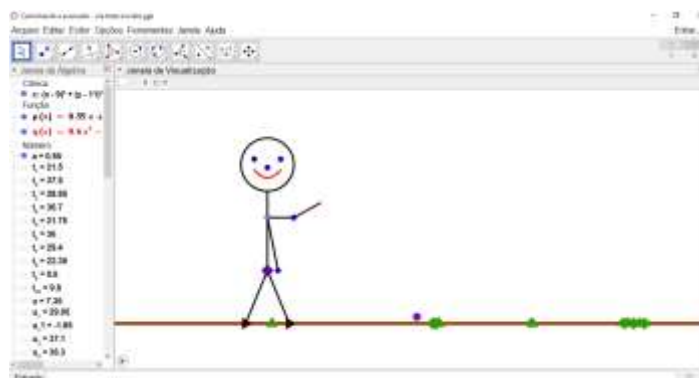
Após a familiarização com o GeoGebra, e o trabalho por meio uma abordagem dialógica e investigativa, sobre os coeficientes das funções do primeiro e do segundo graus, os alunos podem ser convidados a um trabalho mais criativo, envolvendo a animação do software, por exemplo. Nossa sugestão é a construção de uma figura que representa um homem acenando e caminhando como nas figuras 1 e 2.

Figura 1 – Homem caminhando e acenando: ora triste ora feliz



Fonte: Autores.

Figura 2 – Homem caminhando e acenando: ora triste ora feliz



Fonte: Autores.

As figuras 1 e 2 mostram dois momentos da animação do *Homem caminhando e acenando: ora triste ora feliz*.

O movimento do braço direito do boneco está atrás dele, na figura 1, e à sua frente na figura 2. Toda a figura está animada, seu braço esquerdo está acenando, seus pés e pernas estão se movimentando e sua boca ora representa tristeza ora felicidade. Para dar a ideia de que ele está caminhando foram desenhados, para representar a grama, pontos no chão com formatos de triângulos. Estes pontos estão sobre uma reta, representada por uma função constante, e estão animados da direita para a esquerda.

Mas como trabalhar esta tarefa na aula de matemática? Entendemos ser importante que o professor convide os alunos para a participação. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 26) esse é um momento relevante para “garantir que todos os alunos entendem o sentido da tarefa proposta e aquilo que deles se espera no decurso da atividade”. Ressaltamos que os alunos já trabalharam anteriormente com investigações matemáticas quando estudaram o que acontecia com os gráficos das funções polinomiais do primeiro e do segundo grau ao variar seus coeficientes. Também estão familiarizados com o *software* GeoGebra.

O professor convida os alunos para construírem a figura do *Homem acenando: ora triste ora feliz*. É preferível solicitar que os alunos formem grupos, de dois ou três alunos, para pensarem juntos na resolução da tarefa. Os alunos precisam entender que a natureza dessa tarefa é investigativa, ou seja, não há um caminho único a ser seguido, nem o professor dará um exemplo para se guiarem. Eles precisam entender que estão diante de uma situação que pede a iniciativa deles, a de formular questões que lhes auxiliie a construir a representação de um homem que caminha e acena.

De início, o professor pode ter mostrado a sua construção no GeoGebra e, em seguida, pergunta aos alunos por onde começar. Eles olham a figura construída pelo professor, olham para a tela do computador e começam com sugestões para iniciar a “brincadeira” de construir o desenho. Como já estão familiarizados com o *software* podem começar com o desenho da cabeça, com o comando *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, seguem representando o corpo, os braços e as pernas pelo comando *Segmento*.

O professor atua incentivando os alunos à participação, convidando-os a “partirem à descoberta” reforçando a necessidade dos alunos se posicionarem na realização da tarefa. Agindo desse modo, o professor destaca “a diferença em relação às tarefas a que os alunos estão mais habituados”, geralmente tarefas com uma única resposta correta e com um caminho prévio a ser seguido. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2005, p. 27).

Esse primeiro momento da investigação é considerado por Alrø e Skovsmose (2006, p. 70) como o estabelecimento de contato, entre professor e alunos, para a realização da tarefa. Estes autores aconselham que o professor aproveite para perceber a perspectiva dos alunos em relação ao problema e que atue “como um facilitador ao fazer perguntas com uma postura investigativa tentando conhecer a forma com que o aluno interpreta o problema”. Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p. 28) complementam que os alunos “devem saber que podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa”.

No desenvolvimento da tarefa, após a compreensão dos alunos sobre o que fazer, o professor continua lhes dando suporte. Eles são incentivados a se posicionar por meio do levantamento de ideias e pontos de vista para fazer o que lhes fora sugerido. Em nosso problema o professor lhes deu suporte na construção do esqueleto do homem, mas falta, por exemplo, o movimento do braço acenando. É o momento de fazer questionamentos, incentivar os alunos a pensarem com perguntas do tipo: “Como fazer para o ‘braço do homem’ parecer que está acenando?”, “O ‘braço do homem’ é representado de que forma?”.

O professor vai realizando perguntas para os alunos perceberem que o braço pode ser representado por uma função polinomial do primeiro grau. E que esta função precisa ser delimitada, ou seja, seu domínio não pode ser os números reais, e sim um intervalo que represente o tamanho do braço, proporcional ao corpo da representação do homem. Os alunos, ao refletirem sobre as perguntas do professor,

vão pensando em possibilidades e posicionando-se por meio de questionamentos a serem respondidos por eles: “Como representamos uma reta?”, “Que dados podemos utilizar?”, “Como se representa uma função do primeiro grau?”, “Como fazer para movimentar o braço?”.

Suponhamos que os alunos estão se fazendo estes questionamentos e pedem auxílio ao professor. E o professor lhes retorna as perguntas com novos questionamentos para que percebam os dados a serem utilizados: “Vocês lembram qual a equação de uma função polinomial do primeiro grau?”.

Algum aluno pode dizer que a função do primeiro grau é dada por $y = ax + b$. Então o professor poderia continuar perguntando: “Como escrever essa equação para representar o braço do homem?”. Os alunos precisam pensar no que fazer. Eles já sabem que uma reta é representada por dois pontos e dizem isto ao professor. “Mas, se tivermos dois pontos, teremos uma única reta e queremos que o braço se movimente. O que devemos fazer?”, incentiva o professor. Os alunos continuam pensando, discutem entre si, levantam conjecturas e alguém pode dizer: “Então, deveríamos tentar com apenas um ponto?” e o professor sugere que testem isso e aproveita para perguntar qual seria o ponto a ser utilizado. E a investigação segue, com professor e alunos interagindo para solucionar esse primeiro desafio o de movimentar o braço. “Após o surgimento das primeiras questões e do estabelecimento das primeiras conjecturas, os alunos formulam outras questões e conjecturas por analogia com as anteriores” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, p. 31) contando com o apoio do professor.

Estar em um ambiente informatizado possibilita testar as conjecturas com rapidez. Os alunos escrevem as equações das funções e as testam para verificar se funcionam como a representação de um braço que se movimenta. Eles estão fazendo anotações no caderno ao formularem suas conjecturas e para ajudarem nos testes das mesmas. Ao registrarem suas conjecturas “os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, p. 33). Por fim os alunos precisam justificar suas conjecturas, defendendo-as diante dos demais colegas e do professor. Nesse processo, os alunos estão ativamente participando do processo investigativo.

Considerações

Entendemos que o desenvolvimento de aulas numa perspectiva dialógica e investigativa tem a ver com um profundo respeito do professor aos alunos. Esse respeito é demonstrado, e percebido pelos alunos, quando o professor lhes considera como sujeitos de aprendizagem e, por este motivo, como produtores de conhecimento. Isto é evidenciado com a preocupação do professor em criar um ambiente de aprendizagem em que atua como um facilitador para a aprendizagem dos alunos. Ao fazer perguntas com uma postura investigativa, na tentativa de reconhecer a maneira como os alunos interpretam os problemas a eles sugeridos. Nesse ambiente, viabiliza-se que expressem suas ideias matemáticas na busca pela solução do problema. Essas ideias são incentivadas, mas é importante destacar que necessitam de argumentação matemática para uma possível aceitação tanto do professor quanto dos demais colegas.

Desta maneira, há um clima em que as ideias apresentadas não são colocadas como verdades absolutas, mas como algo a ser refletido e examinado pelos demais. Nesse sentido, as ideias, apresentadas como possíveis soluções, podem ser reformuladas pelo professor em sua busca de compreender o ponto de vista de seus alunos. A partir daí, os alunos podem reformular, novamente suas ideias, para confirmar seu entendimento do ponto de vista do professor. Com esta interação reconhecemos haver, como salienta Freire (1996) o estabelecimento de um diálogo entre professor e alunos na busca de compreender o objeto de estudo.

Em nosso entendimento, aulas mediadas por meio do *software* GeoGebra, em um ambiente informatizado potencializam, ao professor e aos alunos, a avaliação dos pontos de vista um do outro. Estão enxergando o mesmo problema? Como tentam resolvê-lo? Nesse ambiente a interação dialógica permite investigar o problema, em nosso caso, o movimento de um braço, a ser representado no GeoGebra, é o objetivo comum entre professor e alunos. Tentativas e erros são avaliadas em um número maior por conta da velocidade, associada ao *software*, na busca por resolução do problema.

Para nós, tarefas como a da construção do homem caminhando e acenando, viabilizam a criticidade do aluno, pois quando ele se assume sujeito de seu processo de aprendizagem analisa o problema, levanta conjecturas, testa as conjecturas levantadas, expressa suas ideias aos demais colegas, argumenta matematicamente

seu ponto de vista. Por meio desse processo, dialógico e investigativo, o professor transforma os questionamentos em outras perguntas pelas quais o educando reflete, cria significado e elabora suas respostas.

A abordagem dialógica e investigativa se diferencia de modelos tradicionais de ensino do tipo: explicação de conteúdos/conceitos, seguidos de exemplos de aplicação e de exercícios de fixação. Por meio da abordagem dialógica e investigativa busca-se viabilizar o trabalho dos alunos, com o *software* GeoGebra em um ambiente informatizado, para que produzam conhecimento sobre o objeto de estudo, em nosso caso, das funções polinomiais do primeiro e do segundo grau.

O aluno, em ambientes desse tipo, por exemplo, reflete a respeito dos coeficientes da função polinomial do primeiro grau e percebem a relação entre o coeficiente angular, desta função, para produzir o movimento no braço do homem representado no GeoGebra. Nesse sentido, ele está envolvido em seu processo de aprendizagem. E o *software* é entendido como mais um recurso para o desenvolvimento de sujeitos críticos e participativos na aula de matemática.

Referências

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BORBA, M. C. e PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

KENSKI, V. M. *Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação*. Campinas, São Paulo. Papirus, 2007.

LÉVY, P. *A inteligência coletiva: por uma antropologia do ciberespaço*. São Paulo: Edições Loyola, 1998.

MOREIRA, A. P. *Utilização do software GeoGebra no estudo de funções elementares*. Dissertação – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

PÉREZ GÓMEZ, Á. I. *Educação na era digital: a escola educativa*. Tradução: Marisa Guedes; revisão técnica: Bartira Costa Neves. Porto Alegre: Penso, 2015.

PONTE, J.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

WIKIPEDIA. *Site*. Disponível em <<https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>>. Acesso em: 05 de maio de 2017.

ZANDONADI, E. C. *Aplicação do software GeoGebra no ensino de funções exponenciais e logarítmicas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.