ATIVIDADES COM FRACTAIS ENVOLVENDO MÚLTIPLAS TURMAS

Genilton José Cavalcante de Oliveira[1]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este trabalho descreve uma atividade realizada no Instituto Federal do Rio Grande do Norte - Campus Macau, na qual foram utilizados, os fundamentos da geometria fractal como recurso para introduzir e estimular o estudo de funções exponenciais e logaritmos. A atividade, reuniu mais de 70 alunos de três turmas de primeira série do ensino médio. Em virtude das grandes dimensões do objeto fractal construído, a tarefa pode envolver mais alunos e turmas. Foi um momento de interação entre os alunos de diferentes salas, que estavam movidos pela curiosidade de ver o aspecto estético final do trabalho.

Palavras Chaves: Geometria Fractal. Educação Matemática. Triângulo de Sierpinski. Fractais.

1. Introdução

Como forma de manifestar o interesse e fixar a atenção dos alunos em sala, utilizei os fundamentos da geometria fractal que, com sua beleza estética, serviu como uma ferramenta didática para introduzir, facilitar e complementar a aprendizagem dos conteúdos de funções exponenciais e logaritmos. Para isso, antes de iniciar o conteúdo propriamente dito, apresentei o histórico, as aplicações dos fractais em outras ciências e a presença dessa geometria na natureza.

A atividade a ser apresentada, envolve uma grande quantidade de alunos, em uma verdadeira força tarefa, para construir um objeto fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski. Parte da solução do problema, necessita de um conhecimento prévio dos conteúdos discutidos em sala de aula, o que pode motivar e estimular os estudos necessários para finalizar atividade de forma correta. A critério do professor, o trabalho dos alunos pode envolver mais turmas, mais professores e fazer uma conexão com os conteúdos de área das figuras planas.

Considerando o pequeno intervalo de tempo para exposição deste trabalho, e a limitação de páginas no relato de experiência, muitos detalhes interessantes podem ser omitidos. O trabalho de (OLIVEIRA, 2016) contém mais atividades relacionadas, e outras informações a respeito dos fractais em contextos de sala de aula.

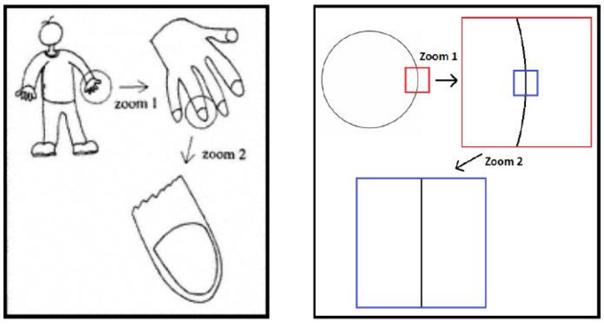
[1]Mestre em Matemática. UFAL. senhorgenilton@gmail.com

2. A Geometria Fractal

O conceito preciso de fractal é uma questão que ainda permanece em aberto, não há uma definição pronta e largamente aceita pela comunidade científica. A idéia de fractal que conhecemos hoje, possui pouco mais de 40 anos e começou a ser delineada pelo matemático Franco-Polonês Benoit Mandelbrot em meados de 1975 na primeira edição de (MANDELBROT, 1998). Nessa época, Mandelbrot utilizou o termo **Fractal**, oriundo da palavra em latim *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar, fragmentar, ou seja, a palavra era perfeita para designar o padrão das formas “irregulares” e aleatórias que Mandelbrot observava na natureza, tais como árvores, montanhas, pedras, nuvens, as quais não cabiam na Geometria Euclidiana. O conceito que vamos considerar foi dado por (MANDELBROT, 1983): “Um fractal é uma forma composta de partes que, de algum modo, são semelhantes ao todo”. Em outras palavras, as partes dos objetos fractais, por mais ampliadas que sejam, sempre contém miniaturas do objeto todo.

Na figura 1, temos exemplos de formas não-fractais, isto é, quando ampliamos suas partes, elas não contém cópias parecidas do todo.

Figura 1 – Objetos não-fractais



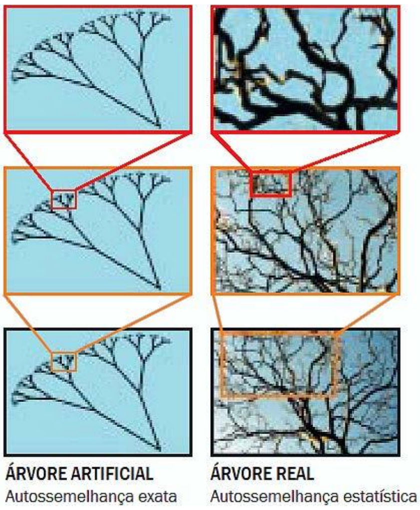
Fonte: (OLIVEIRA, 2016)

Os fractais, independente de onde são encontrados ou da sua regra de construção, possuem características marcantes que os diferenciam dos demais objetos geométricos da Geometria de Euclides. A autossemelhança, a infinidade de detalhes e a dimensão não-inteira são inerentes a todos os fractais. A autossemelhança diz respeito ao grau de similaridade que as partes dos fractais apresentam à medida em que são ampliadas, ou seja, o quanto são parecidas as partes ao todo, por menores que sejam. Conforme (JANOS, 2008), os tipos de autossemelhança são:

a) *Autossemelhança exata ou estrita*: É o tipo mais restrito de similaridade, quaisquer partes do fractal contém cópias reduzidas do todo. Em outras palavras, o fractal com este tipo de similaridade é composto por miniaturas perfeitas de si mesmo. Apenas os fractais estabelecidos por bases matemáticas são estritamente autossemelhantes, eles também são conhecidos como *fractais puros*.

b) *Autossemelhança aproximada ou estatística*: é o caso menos evidente de autossemelhança, exige-se que o fractal tenha medidas numéricas ou estatísticas que se preservem com a mudança de escala. Boa parte das formas naturais obedecem à autossemelhança estatística, nelas, suas partes não são idênticas ao todo, porém são parecidas.

Figura 1 – Tipos de autossemelhança



Fonte: (TAYLOR, 2002)(adaptado)

Figura 2 – Um fractal da natureza: Brócolis Romanesco

Fonte: http://cargocollective.com/annabelking/Fractal-1-Romanesco-Broccoli

Dentre os fractais matemáticos mais famosos destacamos o Conjunto de Mandelbrot, o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski[2], este último, é a base da atividade deste trabalho. Para mais detalhes desses fractais em veja (OLIVEIRA, 2016).

O triângulo de Sierpinski

Iremos apresentar um processo de formação (existem outros) do triângulo de Sierpinski, um dos fractais mais conhecidos e abordados nas literaturas relacionadas. O processo consiste na remoção de triângulos a partir de um triângulo qualquer, mas, por simplicidade, tomemos um triângulo equilátero de lado l_0.

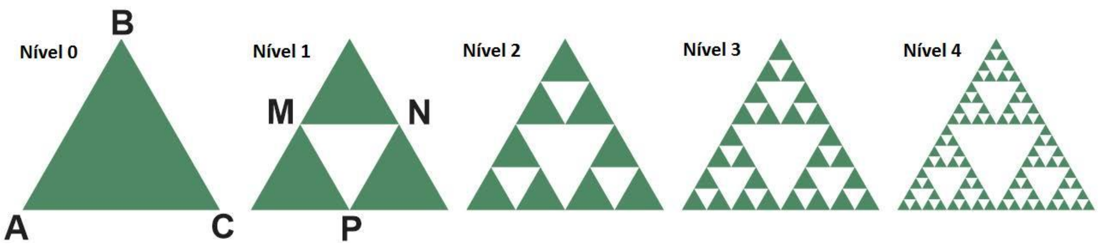
Objeto inicial: Um triângulo equilátero ABC preenchido lado l_0 (nível zero).

Passo 1) Marcar e unir os pontos médios M, N e P dos lados AB, BC e AC, respectivamente;

Passo 2) Remover o triângulo central MNP, cujo lado mede $\frac{l_0}{2}$**.** Após esta remoção, temos o nível 1, do triângulo de Sierpinski;

3) Repetir, continuamente, os passos 1 e 2 para todos os triângulos restantes, e vá para o próximo nível.

Figura 3 - Primeiros níveis do triângulo de Sierpinski



Fonte: Autor

O triângulo de Sierpinski é o resultado deste processo após infinitas repetições. Note que se ampliarmos qualquer parte deste fractal, sempre existirá

---

[2] Waclaw Sierpinski (Varsóvia, 14 de março de 1882 - Varsóvia, 21 de outubro de 1969) matemático polonês. Sierpinski publicou diversos trabalhos a respeito das curvas que preenchem o plano.

uma réplica menor fractal inteiro. Sejam l_{k} e N_{k}, o tamanho do lado e a quantidade de triângulos menores do Triângulo de Sierpinski em seu nível k. Notamos que l_{k} e N_{k} evoluem conforme a tabela abaixo:

Tabela 1 – Evolução de que l_{k} e N_{k}

Nível	0	1	2	3	4	$\cdots$	k
ℓ_k	ℓ_0	$\frac{\ell_0}{2}$	$\frac{\ell_0}{4}$	$\frac{\ell_0}{8}$	$\frac{\ell_0}{16}$	$\cdots$	$\frac{\ell_0}{2^k}$
N_k	1	3	9	27	81	$\cdots$	3^k

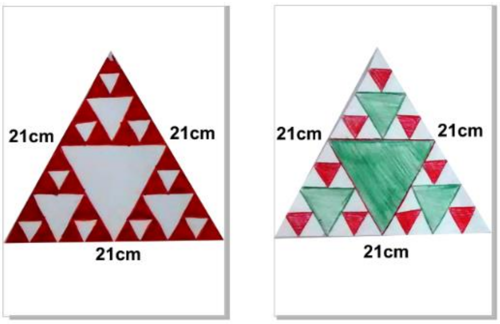
Fonte: Autor

O triângulo de Sierpinski também pode ser construído através de uma reunião gradual de triângulos de forma que, a cada nível, o triângulo vai aumentando de tamanho, veja fig. 5.

3. A Atividade

A atividade foi inspirada no site da Fractal Foundation[3], ela consiste na construção de um Super Triângulo de Sierpinski - STS, através da reunião de vários triângulos de sierpinski menores, cada um com 21cm de lado. Esses triângulos são desenhados em uma folha de papel A4, fig. 4. A tarefa foi aplicada em três turmas da primeira série e parte do desafio, era descobrir quantos triângulos são necessários para construir o STS. A fig. 5 tem um esboço da construção gradativa do STS.

Figura 4 – Exemplo de dois triângulos menores



Fonte: Autor

As características do STS

O Super Triângulo de Sierpinski deve possuir as seguintes características:

[3] http://fractalfoundation.org

1. Ter aproximadamente 7m de lado;

2. Ser construído com triângulos menores conforme a fig. 3.

3. Cada triângulo do item anterior deve ser um pequeno triângulo de Sierpinski de nível 3, colorido e desenhado à mão;

4. O STS deve ser montado no período de uma hora/aula, em um local amplo;

5. Não é permitido utilizar fotocópias (xerox) dos triângulos menores;

Objetivo Geral

1. Estimular o trabalho em equipe para que sejam estabelecidas estratégias na resolução do problema;

2. Permitir que os alunos comprovem a relação que existe entre a atividade e os conteúdos estudados, além de estimular a construção do conhecimento em interações em grupo.

Objetivos específicos da atividade

1. Escrever as funções exponenciais $f, g, h : N \rightarrow R$, tais que:

a) f expressa a quantidade total de triângulos menores do STS em seu nível k;

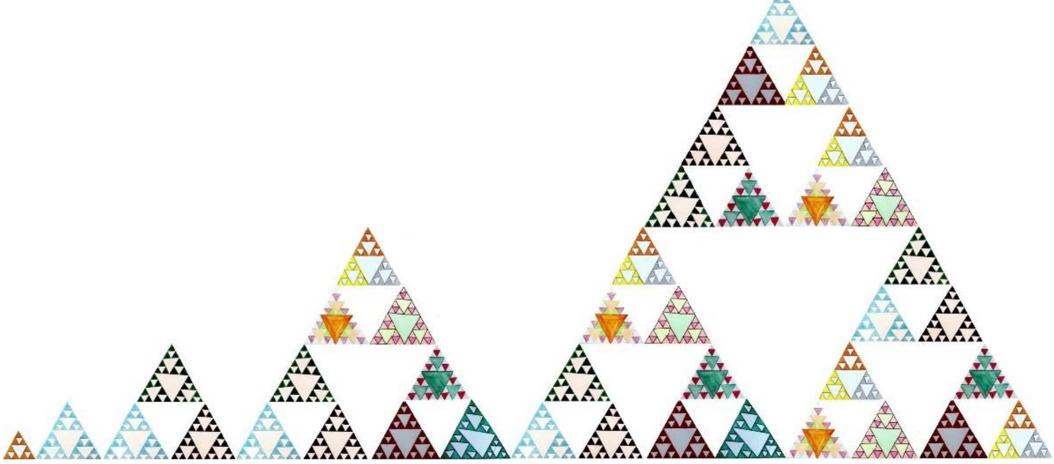
b) g expressa a quantidade de triângulos da base do STS no k-ésimo nível;

c) h expressa a medida do lado do STS no k-ésimo nível.

2. Descobrir a quantidade de triângulos para que o STS atinja os 7m de lado;

3. Determinar a medida da altura, a área e o perímetro total do STS.

Figura 5 - Construção gradual do STS



Fonte: Autor

Pré-requisitos da atividade

A atividade necessita que o aluno esteja familiarizado com os seguintes conteúdos:

- função/equação exponencial;
- propriedades operatórias dos logaritmos;
- área do triângulo equilátero;
- regra de formação do triângulo de Sierpinski.

Público alvo

Em particular, a tarefa foi proposta para turmas da primeira série do ensino médio para estimular o estudo dos conteúdos de funções/equações exponenciais e logaritmos. No entanto, essa atividade pode ser adaptada para turmas da segunda série e abordar os conteúdos de progressão geométrica.

Tempo necessário

As turmas tinham um prazo de duas semanas para a produção de todos os triângulos menores (fig. 3), e após esse período, cada turma montou o seu Super Triângulo de Sierpinski durante uma hora/aula (45min) no ginásio da escola.

Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, deve-se apresentar a regra de formação do triângulo de Sierpinski e, posteriormente, propor a atividade apresentando claramente as suas características e objetivos. Em seguida, define-se um prazo de uma ou duas semanas, para que todos os alunos desenhem e descubram a quantidade de triângulos necessária (veja solução na equação 1). Antes do dia da construção do STS, o professor precisa reservar com antecedência o horário e um local amplo para que os alunos montem o STS. Ademais, o professor também pode levar uma câmera ou solicitar o auxílio de um técnico da escola para registrar o desenvolvimento da atividade, resguardando-se com as devidas autorizações da escola e dos alunos quanto ao uso das imagens.

Considerando que foram envolvidas três turmas, A, B e C; a turma A finalizou o trabalho primeiro, depois, durante o horário de aula das turmas B e C, os alunos fizeram a tarefa a partir das extremidades do STS da turma A. No final, todos os trabalhos ficaram reunidos em um STS ainda maior (fig. 5).

Solução da atividade

Deve-se observar que, para realizar a atividade, é preciso descobrir, inicialmente, o nível necessário do STS para que ele atinja a medida exigida, à medida que cresce. Após descobrir o devido nível, a turma saberá quantos triângulos menores devem ser confeccionados.

Vamos recorrer à tabela 1 e aos logaritmos decimais. Queremos saber qual é o nível *k*, para que l_k = 21cm quando l_0 = 700cm (7m). Assim, ao determinarmos o valor de *k*, a quantidade de triângulos será N_k, logo, tomando *log* 2 = 0;30 e *log*3 = 0;47, temos:

Equação 1

$$\begin{aligned}
l_k &= 21 \Rightarrow \frac{l_0}{2^k} = 21 \Rightarrow \frac{700}{2^k} = 21 \\
&\Rightarrow 2^k = \frac{700}{21} \Rightarrow \log 2^k = \log \frac{100}{3} \\
&\Rightarrow k \log 2 = \log 100 - \log 3 \\
&\Rightarrow k = \frac{\log 100 - \log 3}{\log 2} \\
&\Rightarrow k \cong \frac{2 - 0,47}{0,30} = \frac{1,53}{0,3} \\
&\Rightarrow k \cong 5,1
\end{aligned}$$

Fonte: Autor

O nível de um fractal é um número inteiro, assim, tomamos k = 5. Segue-se que, para cumprir a atividade, cada turma deveria confeccionar $N_5 = 3^5 = 243$ triângulos! Um valor relativamente alto, porém, dividindo-se esta quantidade pelo número de alunos da turma (média de 25 alunos), cada um ficou responsável pela produção de 243/25 ≈ 10 triângulos.

Material Usado

Na atividade, foram utilizados os seguintes materiais:

• Lápis de cor, hidrocor ou giz cera para colorir os triângulos.

Pelas características do STS, os triângulos menores devem ser coloridos, então cada aluno ficou livre para definir a(s) cor(es) de sua preferência;

• Folhas de papel A4

Sugerimos que fossem utilizadas folhas de papel A4 por dois motivos:

a) a folha tem exatamente 21cm de largura (lado dos triângulos menores), o que facilita o desenho do triângulo;

b) as folhas de rascunho da gráfica da escola poderiam ser reutilizadas.

• Tesoura e régua.

Para recortar e traçar o triângulo no papel A4.

Desdobramentos da atividade

Com respeito aos desdobramentos da atividade, destacamos o seguinte:

1. Poucos alunos (no máximo 7), de todas as turmas, conseguiram descobrir o nível *k*, conforme a equação 1. Reservei parte de uma aula para mostrar a solução.

2. Após a divulgação do prazo para a produção dos triângulos menores, percebi que nada havia sido feito nas aulas seguintes. Ocorreu uma dispersão na turma e cada aluno ficou aguardando a iniciativa de algum colega para começar.

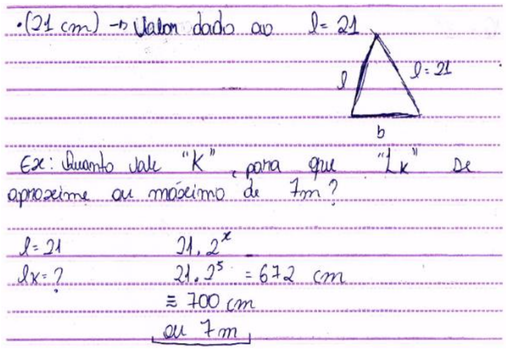
3. Conforme a solução 4.1, cada sala ficou encarregada por construir 243 triângulos. Considerando a observação do item anterior, para dinamizar os trabalhos e evitar dispersão dos alunos, optei por dividir cada sala em 3 grupos onde cada grupo ficou responsável pela produção de 81 triângulos. Assim, cada grupo ficou mais engajado e estabeleceu-se uma disputa saudável para ver qual grupo terminaria a sua parte primeiro. Ao final, os grupos de cada turma concluíram a sua missão em tempo hábil, e cada sala conseguiu cumprir a tarefa de confeccionar os 81 . 3 = 243 triângulos necessários ao STS.

4. Optei por envolver três turmas para ver um STS ainda maior. Cada turma fez um STS de nível 5 (3^5 = 243 triângulos). Juntando as três salas, todos tiveram a oportunidade de prestigiar um STS de nível 6 com 3^6 = 729 triângulos! A construção coletiva produziu um Super Triângulo de Sierpinski com quase 14m de lado.

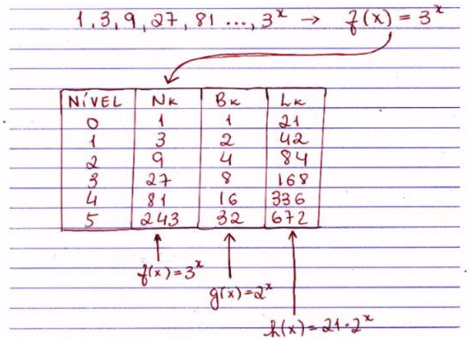
4. Registro dos Resultados

A seguir, destacamos algumas imagens dos cálculos efetuados pelos alunos (fig. 6), bem como da atividade concluída, fig. 7.

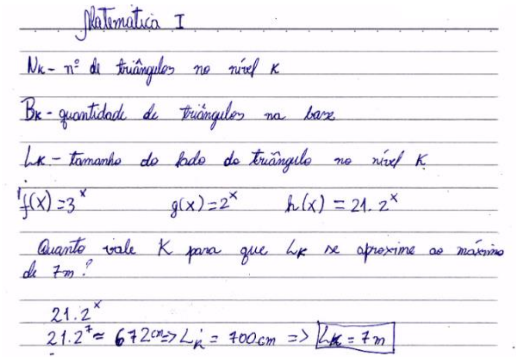
Figura 6 – Cálculos dos Alunos



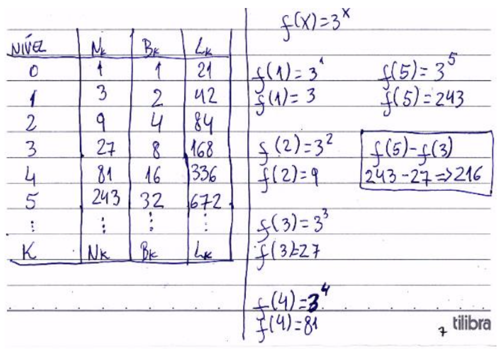
(a) Cálculos 1



(b) Cálculos 2



(c) Cálculos 3



(d) Cálculos 4

Fonte: Autor

Figura 7 Imagens das tarefas concluídas

(a) Turma A - Foto 1

(b) Turma A - Foto 2

(c) Reunião de todas as tarefas ($3^6 = 729$ triângulos)

Fonte: Autor

5. Considerações finais

Observando em linhas gerais, a atividade produziu uma grande interação entre os alunos. Em dados momentos, o formato do STS estava irregular, e os alunos ajudavam uns aos outros a fazer as devidas correções. Para a maioria, ficou clara a natureza exponencial da quantidade dos triângulos e a representações desses quantitativos na forma de uma função, no entanto, a compreensão da solução logarítmica para determinar o nível necessário, precisou de uma revisão dos conteúdos. Após a conclusão da atividade, outras turmas ficaram curiosas em saber detalhes do trabalho dos alunos, e sentiram vontade de participar e conhecer mais sobre o triângulo de sierpinski e os fractais.

Referências bibliográficas

BARBOSA, R. M. *Descobrindo a Geometria Fractal – para a sala de aula.* Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.

Brasil. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio: ciencia da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC-SETEC, 1998.

JANOS, M. *Geometria fractal*. Ciencia Moderna, 2008.

MANDENBROT, B. *Objetos fractais: forma, acaso e dimensão*. Lisboa: Gradiva, 1998.

MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: W. H. Freeman, 1983.

OLIVEIRA, G. J. C. *Ensaios Fractais à Luz do Ensino Médio.* 145 fls. Dissertação Mestrado em Matemática. Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2016.

TAYLOR, R. P. *Order in pollock's chaos*. Scientific American, 287(6):84–89, 2002.