UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA NA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE SISTEMAS LINEARES REGULARES

Laís Machado Matêus Cogorni[1]
Lisandro Bitencourt Machado [2]

Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância

Resumo: Neste artigo apresenta-se uma proposta didática para a exploração da interpretação geométrica de um sistema linear 2x2 com o auxílio do Geogebra, um software cuja principal função é traçar gráficos de funções e efetuar algumas operações sobre elas. A proposta inicialmente é composta de uma exploração do software na qual é apresentada uma sequência didática desenvolvida na disciplina Estágio III concomitante com a disciplina e Educação Matemática e Tecnologias. Também, descreve a classificação de um sistema linear relacionado ao número de soluções analisando a representação geométrica de cada equação no sistema. A utilização da proposta por meio desta tecnologia proporciona uma melhor visualização do conceito matemático envolvido tornando as aulas de matemáticas mais atrativas ao aluno que muitas vezes são abstratas.

Palavras Chaves: Sistema linear. Representação Gráfica. Tecnologias.

INTRODUÇÃO

O computador, pelas suas potencialidades em nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar este tipo de experiências aos seus alunos (Ponte, 1986). A partir destas palavras de Ponte (1986), este artigo traz uma sequência didática, que teve como objetivo, auxiliar o processo de construção do conhecimento sobre sistemas lineares com uso da tecnologia digital, despertando o interesse na construção de caminhos para o desenvolvimento das capacidades de abstração.

Para desenvolver a proposta inicia-se com uma apresentação do software Geogebra e suas ferramentas principais seguindo com as atividades sobre sistemas lineares 2x2, bem como a sua exploração e análise sobre a representação geométrica para a classificação quanto ao número de soluções possíveis e impossíveis.

APORTE TEÓRIO

[1] Acadêmica. Instituto Federal Catarinense – *Campus* Avançado Sombrio laismateus@hotmail.com
[2]Professor Mestre Instituto Federal Catarinense – *Campus* Avançado Sombrio. lisandro.machado@santarosa.ifc.edu.brl

Na Matemática ocidental e oriental há relatos de aparições de sistemas lineares, contudo, no Oriente é que seu estudo foi mais notório.. Os chineses tinham um gosto especial por diagramas, e representaram sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares.

Conforme Domingues (2017):

> Exemplos desse procedimento encontram-se nos Nove capítulos sobre a arte da matemática, um texto que data provavelmente do século 111 a. C. Mas foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante (como polinômio que se associa a um quadrado de números) veio à luz. Kowa, considerado o maior matemático japonês do século XVII, chegou a essa noção através do estudo de sistemas lineares, sistematizando o velho procedimento chinês (para o caso de duas equações apenas)

O uso de determinantes no Ocidente começou dez anos depois num trabalho de Leibniz, ligado também a sistemas lineares. Em resumo, Leibniz estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem três formado pelos coeficientes e pelos termos independentes

Além do processo algébrico de resolução podemos utilizar a representação gráfica para visualizar a solução de um sistema linear, para isso precisamos identificar cada eixo do sistema cartesiano com os valores. O conjunto solução de um sistema linear pode ser interpretado geometricamente como sendo o ponto comum onde às equações das retas se encontram no plano ou no espaço.

Para melhor visualizar as soluções dos sistemas lineares podemos contar com o auxílio de softwares matemáticos, as tecnologias surgem como uma tendência em Educação Matemática, e podem ser de grande valia nas aulas de matemática. É preciso que a escola e os professores se modernizem e se tornem atrativos, para receber alunos que estão acostumados a lidar com as tecnologias no seu cotidiano.

O uso das tecnologias não dispensa o professor da sua função, pois apesar de os softwares facilitarem a visualização dos processos matemáticos é indispensável que o professor esteja preparado para, junto dos alunos, fazer uma ponte entre o que está sendo feito, e o que está sendo analisado. Sobre a importância das tecnologias e as relações com a Matemática, D'Ambrosio (1996), comenta:

> Ao longo da evolução da humanidade, Matemática e tecnologia se desenvolveram em íntima associação, numa relação que poderíamos dizer simbiótica. A tecnologia entendida como convergência do saber (ciência) e do fazer (técnica), e a matemática são intrínsecas à busca solidária do sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto ser dissociada da tecnologia disponível.

A escolha do software Geogebra para realização dessa sequência partiu do fato de que os sistemas lineares necessitam de diversas representações gráficas para proporcionar ao aluno maior conhecimento sobre os sistemas lineares.

Muitas vezes por falta de afinidade com tal tecnologia, os professores não usam essa ferramenta. Paulo Freire já previa o uso agregado dessas tecnologias na educação. Ele mesmo disse em um artigo publicado na revista BITS em 1984: “o avanço da ciência e da tecnologia não é tarefa de demônios, mas sim a expressão da criatividade humana” (FREIRE, 1984, a, pág. 1).

Atualmente os cálculos envolvendo sistemas lineares são muito utilizados na área da matemática aplicada para modelar e resolver determinadas situações no ramo da biologia, química, física e engenharias.

O significado de “resolver o sistema” é na verdade encontrar um conjunto solução que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema e este pode ser interpretado geometricamente como sendo o ponto comum onde às equações das retas se encontram no plano ou no espaço.

De acordo com os PCNs (1998, pg., 44): “A utilização das tecnologias permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo.”

Para que a solução do sistema seja mais bem visualizada o uso de softwares matemáticos, tendência em educação matemática, vem sendo um forte aliado neste aspecto. Sendo assim, o Geogebra que é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo pode nos auxiliar neste sentido. “Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas.” (HOENWARTER, 2007, pag.04). Nesta sequência didática utilizaremos o software Geogebra para construir gráficos em duas dimensões.

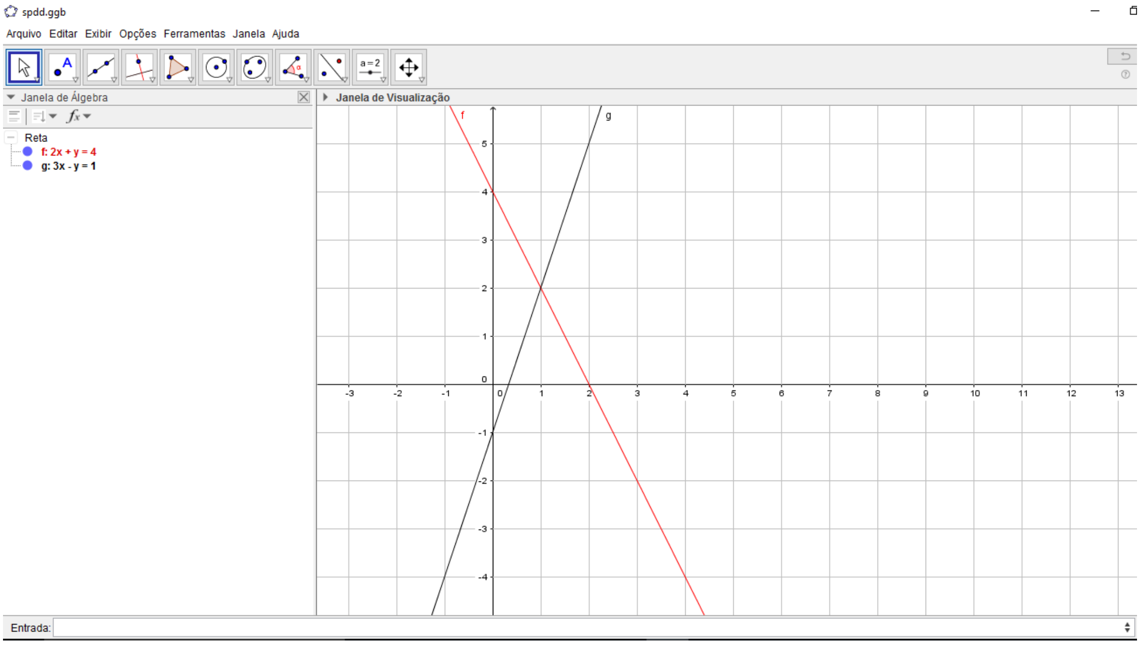
DESENVOLVIMENTO

Este trabalho foi desenvolvido, com base em uma atividade solicitada pelo professor da disciplina de Estágio III e utilizado concomitante com a disciplina de

Educação Matemática e Tecnologias do curso de Licenciatura em Matemática do IFC-Campus Avançado Sombrio, no primeiro semestre de 2017.

Para iniciar a atividade solicita-se aos alunos que no Geogebra, na página inicial, insiram no campo entrada as seguintes equações do sistema $\begin{cases} 2X + Y = 4 \\ 3X - Y = 1 \end{cases}$, conforme imagem 1.

Imagem 1- Sistema SPD



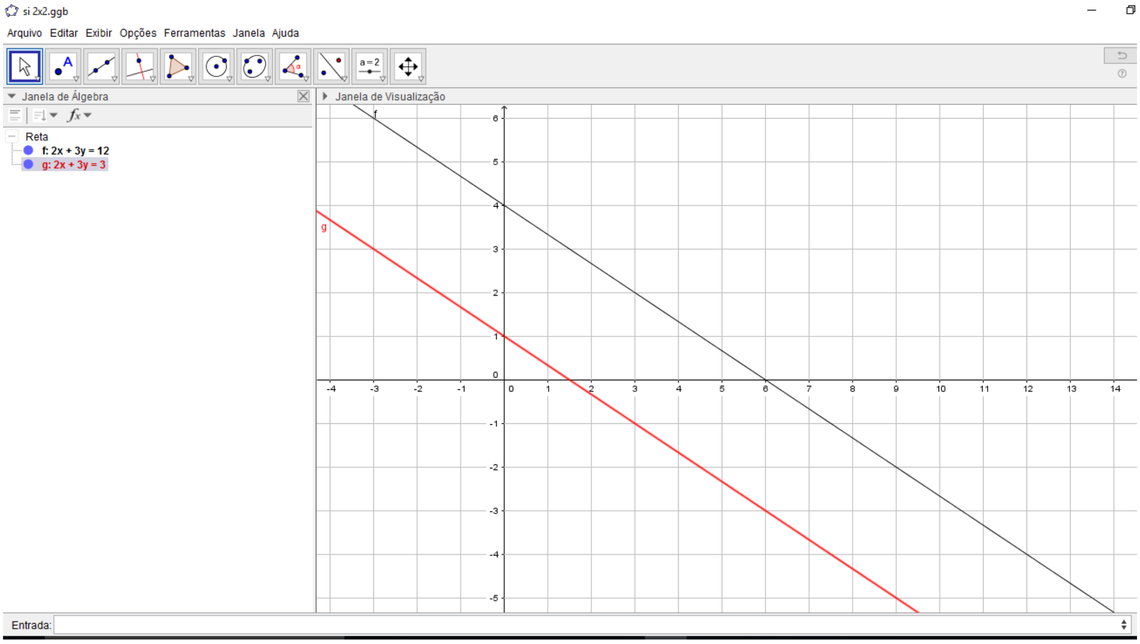
Fonte: A autora, 2017.

Ao representar o gráfico destas duas equações faz-se a discussão sobre classificação desse sistema linear com os alunos. Antes algumas considerações sobre a posição relativa das retas e a quantidade de equações e incógnitas devem ser questionadas.

Neste caso as retas são concorrentes, ou seja, têm um único ponto em comum e este ponto é a única solução desse sistema. Um sistema com duas equações e duas incógnitas é possível e determinado (SPD) se, e somente se, as retas representadas por suas equações são concorrentes.

Em seguida solicita-se que insiram novamente no campo entrada o sistema $\begin{cases} 4x + 6y = 24 \\ 10x + 15y = 15 \end{cases}$, conforme imagem 2:

Imagem 2- Sistema SI



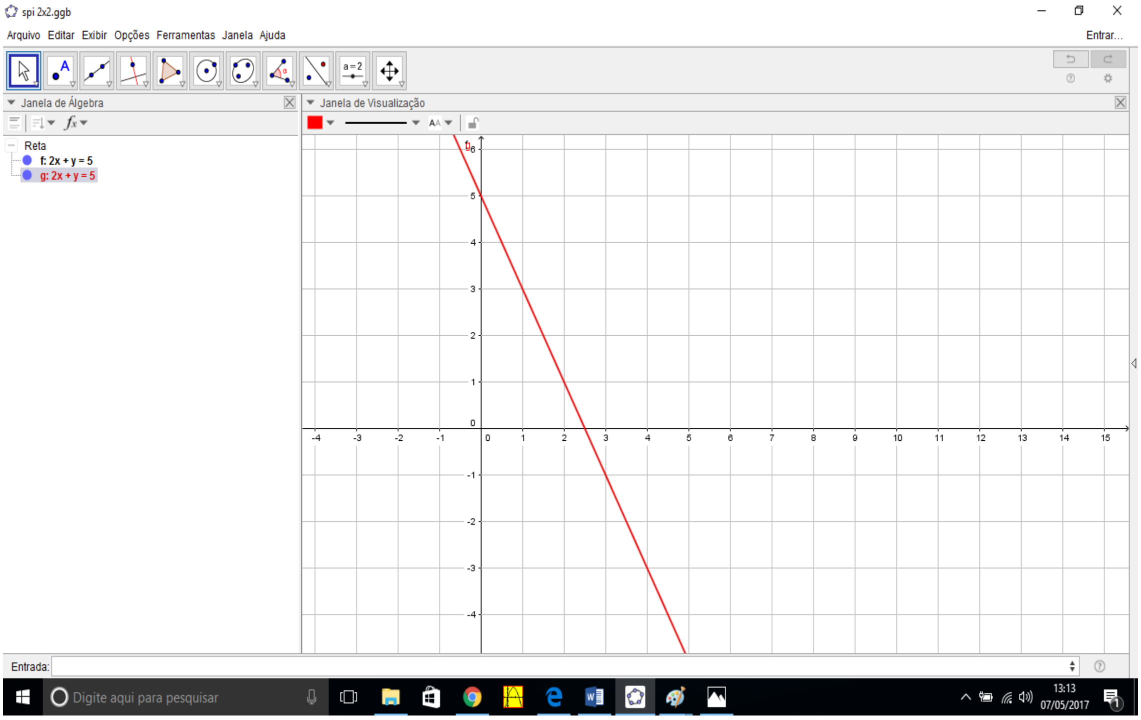
Fonte: A autora, 2017.

Novamente junto com os alunos analisa-se a posição relativa das retas. Neste caso as retas são paralelas distintas, ou seja, não tem ponto em comum como mostra a figura. Logo o sistema não tem solução.

Um sistema com duas equações e duas incógnitas é impossível (SI) se, e somente se, as retas representadas por suas equações são paralelas e distintas.

Prosseguindo os alunos devem inserir no campo de entrada o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$, conforme imagem 3:

Imagem 3: Sistema SPI



Fonte: A autora, 2017.

Ao analisar a posição relativa das retas das equações do sistema linear percebe-se que as mesmas estão alinhadas, isso quer dizer que estão coincidentes. Isto nos mostra que o sistema tem infinitos pontos em comum e que esses pontos são as soluções do sistema mostrado na imagem 3. Um sistema com duas equações e duas incógnitas é possível e indeterminado (SPI) se, e somente se, as retas representadas por suas equações são coincidentes.

Vale lembrar que nessa sequência didática estudaremos apenas os sistemas regulares, onde o número de equações é igual ao número de incógnitas.

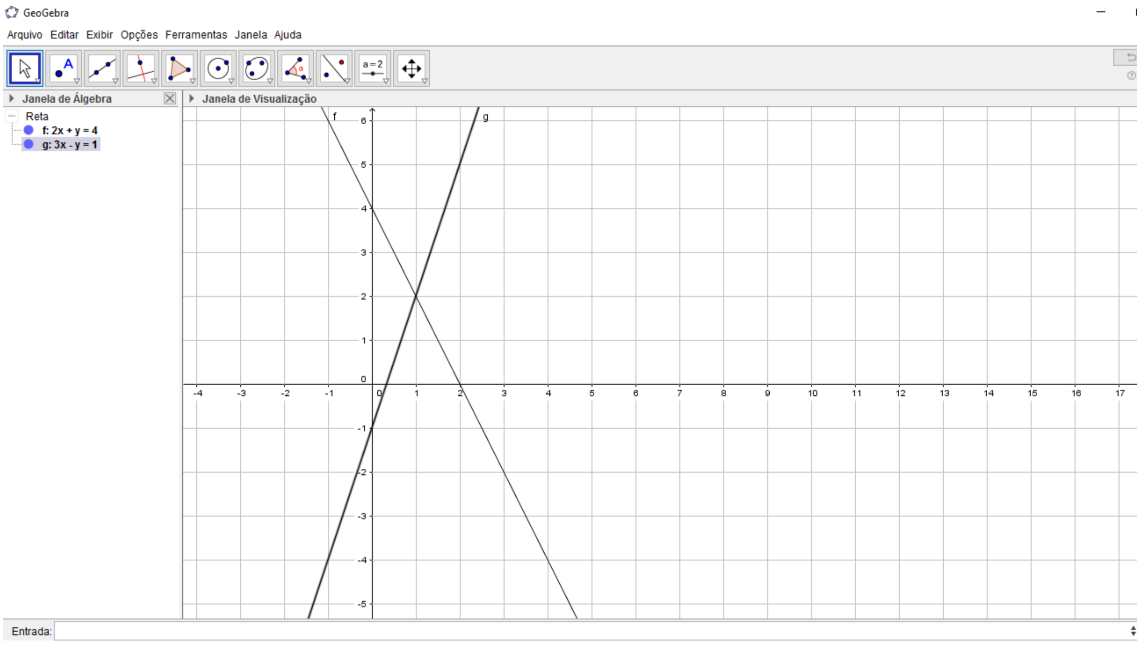
A seguir mais sistemas são apresentados para discussão sobre o assunto, com o intuito de aprofundar mais este tema.

Para essa etapa da proposta será distribuída aos alunos uma folha quadriculada aonde os mesmos irão “desenhar” um plano cartesiano para construir o gráfico das duas equações do sistema. Neste momento foi importante interagir com os alunos e questiona-los: como iriam traçar as retas? O que são os pares ordenados? O que são as raízes da equação? Definir conceitos de equações lineares e sua forma geral: $a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + a_3\, x_3 + \cdots a_n\, x_n = b$, classificação quanto ao grau, o que são os coeficientes, termo independente e incógnitas. O ponto onde a reta corta o eixo x das abcissas é chamado raiz da função e o ponto onde corta o eixo y das ordenadas é o valor do termo independente (b) denominado coeficiente linear.

Em seguida os alunos colocaram no Geogebra no campo de entrada, as equações do sistema para verificação.

O sistema $\begin{Bmatrix} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{Bmatrix}$ é representado por duas retas que se interceptam em um único ponto, ou seja, são retas concorrentes.

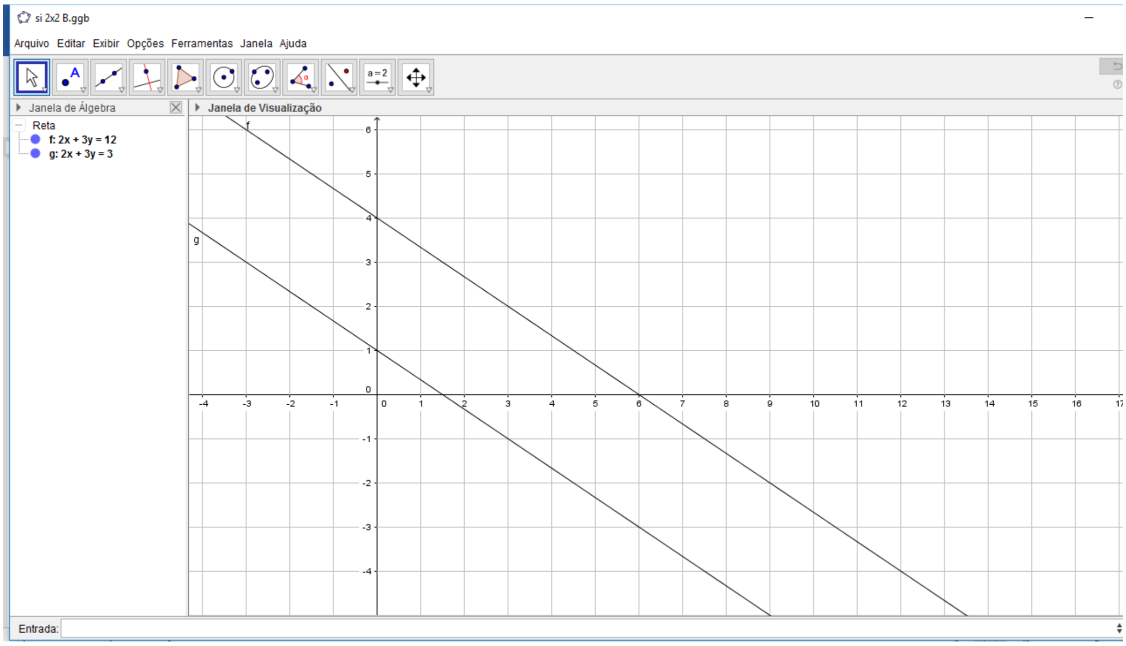
Imagem 4- Sistema SPD



Fonte: A autora, 2017.

O sistema $\begin{Bmatrix} 4x + 6y = 24 \\ 10x + 15y = 15 \end{Bmatrix}$ é representado geometricamente por duas retas paralelas que não possuem nenhum ponto em comum. Neste caso o Sistema é Impossível.

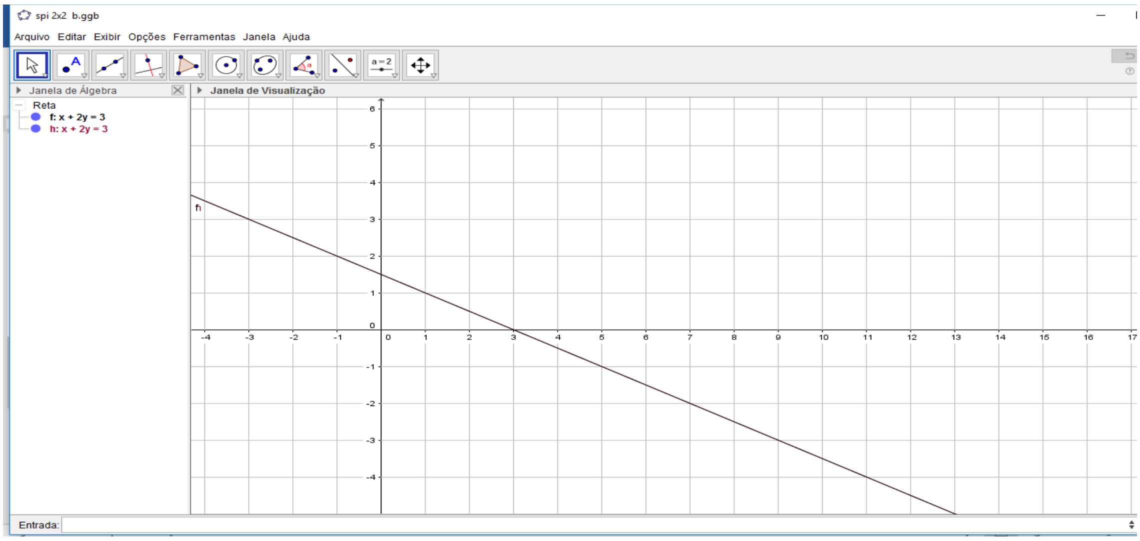
Imagem 5- Sistema SI



Fonte: A autora,2017

Neste sistema $\begin{Bmatrix} 5x + 10y = 15 \\ x + 2y = 3 \end{Bmatrix}$, as retas são coincidentes, ou seja, possuem infinitos pontos em comum. Sabemos que os pontos em comum de duas retas são as soluções do sistema, portanto o sistema é possível e indeterminado. Para este sistema os alunos devem perceber que ao simplificar as equações elas ficam iguais ou a proporcionalidade entre elas, que nesse caso a primeira equação é o quíntuplo da segunda, logo as retas também serão as mesmas.

Imagem 6- SPI



Fonte: A autora, 2017.

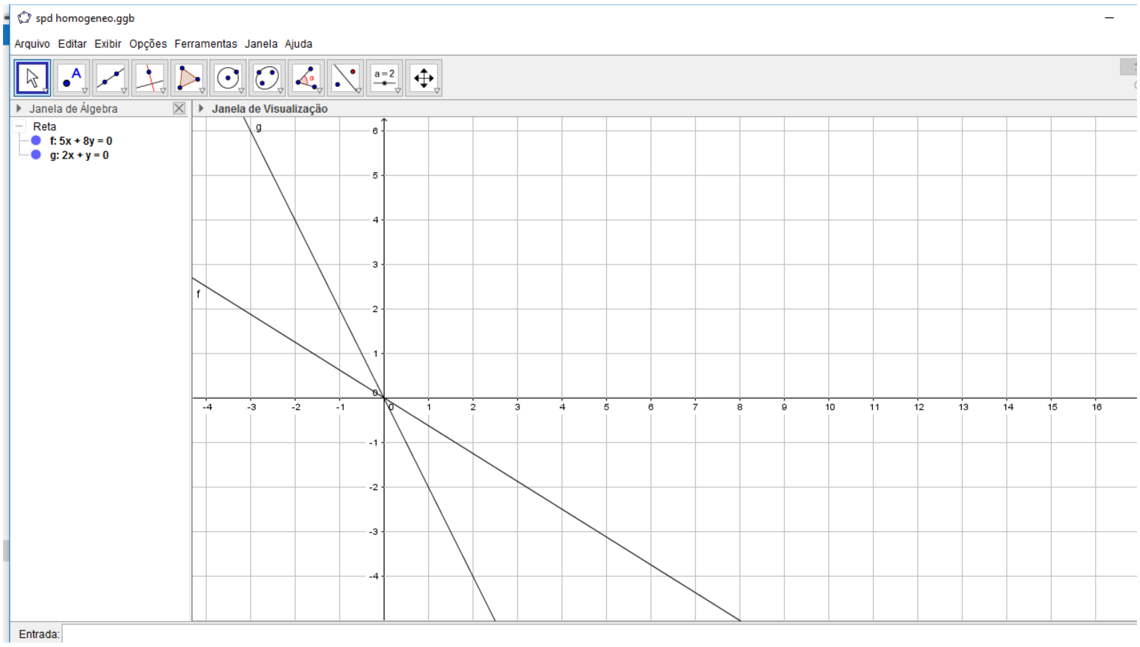
Também temos os sistemas lineares homogêneos, que são aqueles que possuem todos os coeficientes independentes nulos. Esses sistemas são sempre possíveis e admitem sempre a solução S= (0,0) chamada de solução Trivial.

Neste momento foi utilizado apenas o Geogebra para a interpretação geométrica. A classificação quanto à posição relativa das retas é o mesmo para sistemas lineares homogêneos.

Exemplo 1:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Imagem 7- Sistema homogêneo SPD

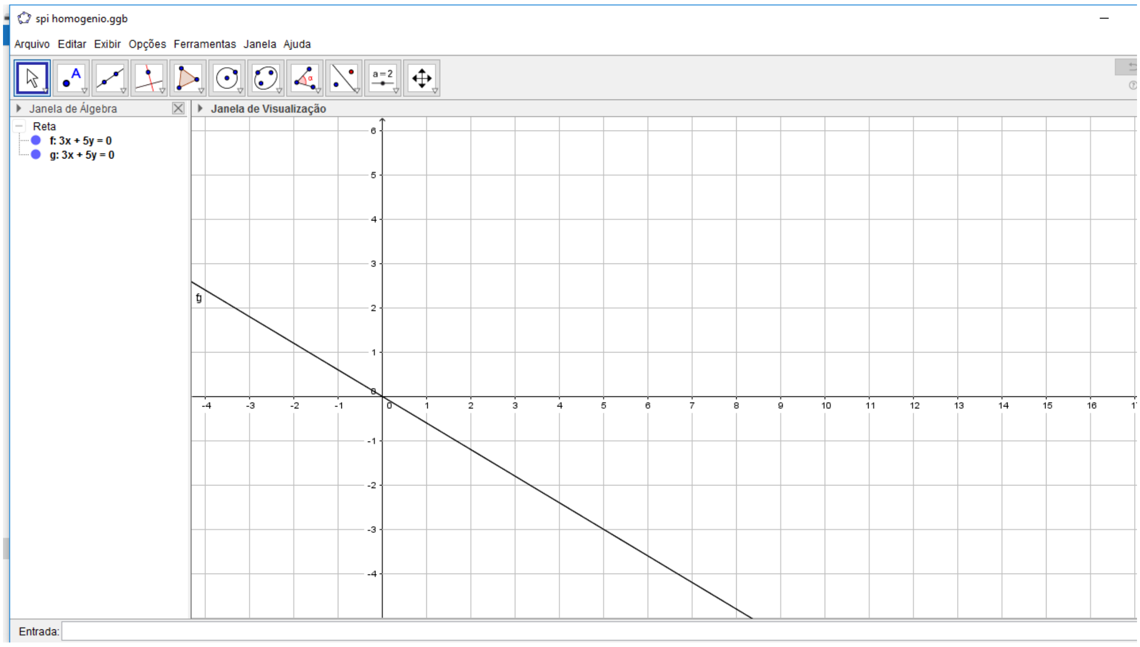


Fonte: A autora, 2017.

Exemplo 2:

$$\begin{cases} 6x + 10y = 0 \\ 3x + 5y = 0 \end{cases}$$

Imagem 8- Sistema homogêneo SPI



Fonte: A autora, 2017.

Para encerrar ressaltamos que todo sistema linear homogêneo admite a solução nula (0, 0,..., 0), chamada de solução trivial. Um sistema linear homogêneo pode ter outras soluções além da trivial.

CONSIDERAÇÕE FINAIS

Esta proposta oportuniza aos alunos maior familiarização com o software Geogebra uma vez que o mesmo apresenta diversas representações de um mesmo objeto de forma mais dinâmica e menos tradicional. A utilização dessa tecnológica possibilita ao aluno sair apenas do processo algébrico e passar a interpretar as equações do tipo f(x)= ax + b e fazendo relações existentes quanto ao número de soluções de um sistema e as posições relativas das retas, através da construção do gráfico de suas equações, tornando assim, o processo de ensino aprendizagem mais palpável e possibilitando ao professor maior credibilidade e consistência quanto ao conteúdo propriamente dito.

REFERENCIAS

Ponte, J. (1986). **O computador - Um Instrumento da Educação**. Lisboa: Texto Editora.

BRASIL, Ministério da Educação – Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

FREIRE, Paulo. **A máquina está a serviço de quem?** Revista Bits, p. 6, maio de 1984.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva/ Manoel Paiva**. -2. Ed. São Paulo: Moderna, 2013.

HOHENWARTER, Markus. **Geogebra - Informações**. Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_BR.pdf>. Acesso em 18 de abril de 2017.

DOMINGUES, Hygino H. **Origem dos Sistemas Lineares e Determinantes.** Disponível em:<http://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php> . Acessado em: 10 de junho de 2017.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação matemática: da teoria á prática. Campinas**, SP: Papirus, 1996, p. 17-28. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).