TÉCNICAS DE CONTAGEM – EXPLORANDO POSSIBILIDADES

Maria Eduarda Hojnacki Costa[1]

Raissa de Mello Brunauth[2]

Eduardo Meliga Pompermayer[3]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este trabalho descreve uma proposta didática para um minicurso de Introdução ao Pensamento Combinatório, tendo como público-alvo alunos ingressantes no Ensino Médio. Os conceitos abordados serão o princípio fundamental da contagem, fatorial, permutação simples, arranjo simples e combinação simples. O objetivo geral de aprendizagem é permitir que os alunos desenvolvam habilidades para resolver problemas que envolvem os conteúdos deste minicurso e para a aplicação desses conceitos em sua vida escolar ou no cotidiano; além disso, pretende-se incentivar e desenvolver a capacidade de organização, o raciocínio lógico e a criatividade dos mesmos. Este artigo tem como principal objetivo disseminar esta proposta didática, a fim de que a mesma seja utilizada em sala de aula, propiciando ao professor uma ressignificação da prática pedagógica e ao aluno uma ressignificação da sala de aula.

Palavras Chaves: Análise Combinatória. Ensino de Matemática. Pensamento Combinatório.

INTRODUÇÃO

Sabendo que a Análise Combinatória é a utilizada para saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter de contá-los, ou seja, não se preocupa em listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto, atuando como uma determinação de possibilidades (MERAYO, 2001), acreditamos que seja necessário abordá-la através de atividadesludopedagógicas, para proporcionar que os alunos consigam abstrair mais facilmente diferentes técnicas de contagem, sabendo distinguí-las e resolver problemas envolvendo estes conceitos, sem ter de recorrer à construção de uma lista de resultados possíveis ou ao diagrama de árvore, por exemplo. Compreendemos que o raciocínio combinatório é

> umconjunto de ações cognitivas, não inatas ao sujeito, que permitam a ele encaminhar procedimentos de seleção, partição ou colocação, de objetos, pessoas, números ou letras, combinando-os adequadamente de modo que o resultado dessas ações tenha significado, obedeça a sistematizações e sua representação possa ser feita utilizando diferentes linguagens – língua materna (a primeira língua que se aprende, pode ser Libras ou de Sinais), verbal, matemática, gráfica ou na forma de tabelas – como meio de produzir, expressar e comunicar ideias, interpretando diferentes intenções e situações. (TEIXEIRA, 2013, p. 6).

---

[1] Graduanda em Licenciatura em Matemática. IFRS – *Campus* Canoas. eduardahojnacki@hotmail.com
[2] Graduanda em Licenciatura em Matemática. IFRS – *Campus* Canoas. rmbrunauth@gmail.com
[3] Mestre em Ensino de Matemática. IFRS – *Campus* Canoas. eduardo.pompermayer@canoas.ifrs.edu.br

Sendo assim, desenvolve-se o raciocínio combinatório na prática de combinar, associar, juntar ou compor elementos de um dado conjunto. Deste modo, o mesmo engloba um conjunto de habilidades que são desenvolvidas antes mesmo de o aluno precisar dos conceitos formais da Análise Combinatória para resolver problemas, ou atém mesmo antes dele entrar para a escola. Portanto, esta proposta didática é descrita levando em conta os conhecimentos prévios do aluno, proporcionando que os mesmos sejam agentes ativos e participantes na construção do próprio conhecimento.

PROPOSTA DIDÁTICA

Para execução desta proposta didática, planejada para ser realizada em 4h, são necessários recursos tais como quadro branco ou quadro negro, canetões ou giz, lápis, papel, bonecos e peças de roupa produzidos com e.v.a (espuma vinílica acetinada) ou outro material, computador e projetor. Inicialmente, propõe-se uma atividade mobilizadora de estudo, a fim de motivar os alunos a conhecer os conceitos que iremos discutir ao longo deste minicurso:

"Qual a vantagem de adicionarmos um número 9 à frente do número do nosso celular? Supondo que números de celular podem ser escritos iniciando com 6, 7, 8 ou 9 e que, a partir do segundo dígito, os dígitos possam ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, quantos números a mais podem ser vendidos com esta mudança? (Supõe-se que, antes da mudança, os números de celular eram escritos com 8 algarismos e que todos os números de 8 algarismos já estão vendidos)".

A pergunta será feita em duas etapas, pois queremos saber para quê os alunos pensam que serve esta mudança, e se os mesmos acreditam que é uma mudança significativa. Então, será feita a segunda pergunta, mas a mesma só será respondida ao final. Após, será explicado que resolver um problema como este significa quantificar a possibilidade de números diferentes de celular que se podem escrever a partir destas condições. A Análise Combinatória é o campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de maneira eficiente, do número de elementos de um conjunto. Seu estudo encontra aplicação em diversas situações, como por exemplo na contagem das diferentes possibilidades de se fazer uma placa de carro, ou até mesmo no esporte, ao se montar tabelas de campeonatos!

Finalizada a exibição da situação problema e explicada a importância da Análise Combinatória para a resolução de problemas como este, iniciaremos a atividade ludopedagógica que irá permitir a dedução e compreensão do Princípio Fundamental da Contagem (PFC).Primeiramente, será entregue a cada grupo de 5ou 6 pessoas um pacote com 20 bonecos, 6 camisas do tipo A, 6 camisas do tipo B, 6 camisas do tipo C, 6 calças do tipo A, 6 calças do tipo B, 6 calças do tipo C, 10 calçados do tipo A e 10 calçados do tipo B(todos produzidos com espuma vinílicaacetinada). A primeira atividade será vestir os bonecos de todas as formas possíveis utilizando as camisas do tipo A ou B, as calças do tipo A ou B e os calçados do tipo A ou B. A segunda atividade será vestir os bonecos de todas as formas possíveis utilizando as camisas do tipo A, B ou C, as calças do tipo A ou B e os calçados do tipo A ou B. A terceira e última atividade será vestir os bonecos de todas as formas possíveis utilizando as camisas do tipo A, B ou C, as calças do tipo A, B ou C e os calçados do tipo A ou B. Em cada atividade, sempre que os alunos terminarem de "vestir os bonecos", anotaremos a quantidade de "tipos" de cada peça de roupa utilizada e o número de *looks* que os alunos conseguiram montar, conforme a tabela a seguir:

Tabela 1 – *Looks* elaborados a partir de diferentes quantidades de peças de roupa.

Atividade	**Tipos de Camisa**	**Tipos de Calça**	**Tipos de Calçado**	**Conjuntos**
1	2	2	2	8
2	3	2	2	12
3	3	3	2	18

Fonte: Os autores, 2017.

Então, será perguntado aos alunos se os mesmos conseguem identificar qual é a relação que existe entre a quantidade de tipos de camisas, calças e calçados e o resultado final da quantidade de conjuntos que podem ser montados. Espera-se que os alunos visualizem que basta multiplicá-los, por exemplo, $2 \times 2 \times 2 = 8$. Então, será formalizado o Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Define-se o PFC como sendo o produto de duas ou mais etapas independentes, ou seja, quando consideramos que determinada atividade pode ser realizada em duas etapas, de m e n maneiras distintas, o total de possibilidades será dado por $m \times n$. Vamos resolver o exemplo $Ex.1$:

"Vamos considerar que numa escola haja 18 professores e entre eles serão escolhidos um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas são as possibilidades de escolha?"

Como cada evento é sucessivo e independente entre si e cada um tem uma quantidade de possibilidades (m possibilidades para o 1º evento, n possibilidades para o 2º e p para o 3º), pelo PFC teremos que o total de possibilidade será dado pela multiplicação de todas as possibilidades, ou seja, $m \times n \times p$. Quantas são as possibilidades para diretor? E para vice-diretor? E coordenador pedagógico? Estas perguntas serão feitas aos alunos e, a partir de suas respostas, serão solicitadas explicações como "porquê esta quantidade de possibilidades?". Então, será resolvido o problema, sendo $m \times n \times p = 18 \times 17 \times 16 = 4896$.

Após, serão feitas as seguintes atividades:

1. Uma moeda tem duas faces: cara (CA) e coroa (CO). Lança-se uma moeda três vezes seguidas e observa-se, em cada uma das vezes, qual face ficou voltada para cima. Quantos e quais são os resultados possíveis?
2. No Brasil, as placas de automóveis são formadas por uma sequência de três letras seguida de quatro algarismos, por exemplo: JGT - 3373. Quantas placas diferentes podem ser formadas com as letras I, J, K, L e os algarismos 1, 2, 4, 7 e 9?

É importante explicar aos alunos que os mesmos precisam identificar quais serão as possibilidades para cada evento, antes de utilizar o PFC, e que todos os problemas diferem entre si, sendo resolvidos de formas diferentes, mas utilizando os conceitos abordados até então. Na correção das atividades 1 e 3 será feita a construção do diagrama de árvore, além da resolução do exercícios utilizando o PFC. Após cada lista de exercícios dada será feita a correção, perguntando aos alunos a resposta em que os mesmos chegaram e como os mesmos resolveram cada atividade. Posteriormente, será dado início à explicação do conceito de permutação.Para iniciar a discussão sobre este conceito, será perguntado aos alunos:

“Oito cavalos estão participando de uma corrida. Supondo que, ao final da corrida, não haja empates. Quantas são as diferentes formas de classificar a chegada destes cavalos de 1º a 8º lugar, sendo o 1º lugar atribuído ao primeiro cavalo a chegar ao final da corrida e o 8º ao último?”

Espera-se que estes consigam resolver esta pergunta através do Princípio Fundamental da Contagem. Caso contrário, lhes será explicado que: melhor do que tentar fazer uma lista de todas as ordens, nós podemos usar o princípio fundamental da contagem. O cavalo que chega em primeiro pode ser qualquer um dos oito cavalos; depois que o cavalo ganhou, o cavalo em segundo lugar pode ser qualquer um dos sete cavalos restantes; o cavalo em terceiro lugar pode ser qualquer um dos seis cavalos restantes; e assim por diante. Pelo princípio fundamental da contagem, há $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$ maneiras de classificação final desta corrida.As diferentes maneiras nas quais os cavalos podem chegar são chamadas de permutações. Em matemática, definimos permutação por $P_n = n!$,que se lê: uma permutação de n elementos é dada por n fatorial. Por exemplo, a permutação destes 8 cavalos nós calculamos por $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, logo, $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Generalizando, $n!$significa multiplicar n por todos os seus antecessores naturais, até 1. Por definição, $0! = 1$. Então, serão feitas as seguintes atividades:

1. De quantas maneiras é possível criar uma senha de 9 dígitos utilizando as letras de A a I, sem repetir letras?
2. Sabendo que um anagrama é uma palavra formada a partir de uma palavra original, reordenando as letras, por exemplo: “roma” é um anagrama da palavra “amor”, da mesma forma que “amro” também é (para ser um anagrama, independe de ter ou não um significado). Quantos anagramas da palavra “sorte” existem?

Agora, veremos o conceito de arranjo. Voltemos ao exemplo$Ex. 1$.Vimos que a solução para este problema era dada por $18 \times 17 \times 16$, pelo Princípio Fundamental da Contagem. Mas e se, ao invés de pararmos no 16, nós tivéssemos continuado a multiplicar por 15, 14 e assim sucessivamente? Teríamos feito $18!$,masprecisaríamos dividir isto por $15!$, para termos apenas $18 \times 17 \times 16$, certo? Ou seja, fizemos $18!$dividido por $(18-3)!$, deste modo, calculamos os agrupamentos de 3 elementos distintos em um grupo de 18 elementos distintos. A isso, damos o nome de Arranjo Simples, que nada mais é do que o agrupamento de p elementos distintos,cada um desses agrupamentos se diferencia de outro pela ordem ou natureza de seus elementos, em um grupo de n elementos distintos, denotado por $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.Após, faremos algumas atividades de arranjo simples:

1. Considere os algarismos 1,2,3,4 e 5. Quantos números distintos, superiores a 100 e inferiores a 1000, podemos formar se:
   a) o número é par?
   b) onúmero é ímpar?
   c) o número é par ou ímpar?

Então, seguiremos para a definição de combinação. Para isto, será colocada aos alunos a seguinte situação:

"Em um jogo de boliche, há 10 pinos que devem ser derrubados; porém, nem mesmo o melhor jogador de boliche consegue um strike toda vez. Suponha que um jogador de boliche jogue a primeira bola e derrube todos os pinos, exceto três. De quantas maneiras isso pode acontecer?"

Poderíamos pensar que há 10 possibilidades para o primeiro pino a não ser derrubado, 9 para o segundo e 8 para o terceiro e, desse modo, teríamos, pelo PFC, $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilidades. Porém, vamos supor que os pinos estão numerados de 1 a 10, entre as possibilidades que contamos estão estas: 1-2-4, 2-1-4, 4-2-1, 1-4-2 e 4-1-2. Precisamos notar que estas 6 combinações são, na verdade, uma única. Pois é indiferente a ordem em que os pinos estão de pé, o que importa é que são estes três (o 1, o 2 e o 4) que não foram derrubados. Mas, por que 6 combinações diferentes destes 3 pinos? Porque 6 é a permutação destes 3, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$. O produto $10 \times 9 \times 8$, então, conta as combinações de três pinos como se a ordem das coisas listadas fosse importante. Levando em conta que a ordem não é importante, o produto $10 \times 9 \times 8$ é 6, ou 3!, vezes maior do que o verdadeiro número de grupos diferentes de pinos. Dividindo, temos $\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$.

Logo, o número de combinações de 3 pinos que realmente são diferentes é 120. O problema que acabamos de resolveram chama-se problema de combinação. Uma combinação é uma seleção de coisas nas quais a ordem não importa.Outra maneira de escrever o número de maneiras nas quais três pinos de boliche podem ser escolhidos a partir de 10 é dizer que buscamos o “número de combinações dos 10 pinos tomados 3 a 3”. Isso pode ser escrito como $C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!}$. Deste modo, a combinação de n elementos tomados k a $k$pode ser escrita como $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Após, serão feitas as seguintes atividades:

1. Os membros da EuropeanEconomicCommunity (EEC) usam nove idiomas oficiais em seu trabalho:

- dinamarquês - holandês - inglês - francês
- alemão - grego - italiano - português- espanhol

Por causa disso, a EEC tem um enorme problema de tradução.

Suponha que há um tradutor para cada possível par de idiomas. Por exemplo, um tradutor de Dinamarquês para holandês, outro de dinamarquês para inglês, outro de holandês para inglês, e assim por diante.

a) Quantos tradutores são necessários?
b) Se outro idioma fosse inserido na lista, mais quantos tradutores seriam necessários?

Para finalizar, será feito um quiz elaborado em PowerPoint, com 20 perguntas sobre os conceitos abordados neste minicurso. Cada equipe escolhe um número de 1 a 20, que será a pergunta a ser respondida pelo grupo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que propostas como esta trazem contribuições para a Educação Matemática, mais especificamente sobre o raciocínio combinatório, uma vez que podem servir de base para uma prática de ensino mais consistente e que auxilie na compreensão de como este raciocínio se desenvolve, no planejamento e acompanhamento de processos de ensino e de aprendizagem e que se possa avançar nas investigações e na melhor compreensão sobre a aprendizagem de nossos alunos.

REFERÊNCIAS

FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia.**Mathematical Circles.** 1. ed. United States Of America: American Mathematical Society, 1996.

JACOBS, Harold R. **Mathematics, a human endeavor:** a book for the those who think they don’t like the subject.3. ed. United States Of America: W. H. Freeman, 1994. 678 p.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta.** Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães. **Os Blocos Lógicos e o Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório.** Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba: 2013.