A METODOLOGIA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITES NO ENSINO MÉDIO

Caroline Conrado Pereira[1]
Vanilde Bisognin[2]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Este trabalho tem por objetivo investigar se a metodologia de Resolução de Problemas contribui para a compreensão do conceito de limite no infinito de funções reais por alunos do Ensino Médio. A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública de Santa Cruz do Sul, RS e utilizou a metodologia de pesquisa qualitativa e como metodologia de ensino a Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009), juntamente com os pressupostos teórico de Tall e Vinner (1981). Foram propostas atividades envolvendo o conceito de limite no infinito que explorou a parte gráfica, a lei de formação e o uso de tabelas. Por meio desta pesquisa, pode-se concluir que a aplicação da metodologia da Resolução de Problemas foi válida, uma vez que possibilitou aos alunos a construção de imagens conceituais para a definição do conceito de limites no infinito. Ao final de cada encontro realizado com os alunos, foi possível identificar que os estudantes evoluíram no conhecimento sobre limite, apropriando-se de conceitos que são ensinados somente no Ensino Superior.
Palavras Chaves: Resolução de Problemas; Limites; Ensino Médio

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresenta-se resultados de uma pesquisa que teve por objetivo investigar se a metodologia de Resolução de Problemas contribui para o ensino e aprendizagem do conceito de limite no infinito de funções reais com alunos do terceiro ano do Ensino Médio .Embora o conteúdo de limites de funções não está incluído no programa das escolas públicas do estado, o trabalho busca respostas de como metodologia da Resolução de Problemas pode contribuir para a construção do conceito de limites de funções reais.

Para o desenvolvimento da pesquisa, tomou-se como pressuposto teórico as ideias de Tall e Vinner (1981), que tratam da teoria de "imagem de conceito" e "definição de conceito".

Para o trabalho em sala de aula, foi utilizada a metodologia de ensino-aprendizagem de Resolução de Problemas, seguindo as ideias de Onuchic e Allevato (2009). A partir da proposição de uma unidade didática, constituída de diferentes problemas, o trabalho explorou a construção de imagens conceituais para a

[1] Mestre em Ensino de Matemática, Escola Estadual de Ensino Médio Ernesto Alves de Oliveira, Santa Cruz do Sul, RS. caroline_conrado@ymail.com
[2] Doutor em Matemática. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria, RS. vanilde@unifra.br

construção do conceito de limite no infinito com alunos da última série do Ensino Médio.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Para ser um bom solucionador de problemas, o indivíduo precisa estar diante de situações que mobilizem estratégias e procedimentos. Para que isso aconteça, o papel do professor é fundamental. Criar no indivíduo o hábito da investigação, seja qual for a área do conhecimento, e ensiná-lo a resolver problemas, propondo situações que exijam procedimentos adequados ou atitudes de enfrentamento para busca de solução, é, conforme Pozo (1998), uma das habilidades a serem alcançadas pelos alunos ao final da Educação Básica.

Nessa direção, os PCNs (BRASIL, 1998) apontam que, no ensino de Matemática, seja contemplada a resolução de problemas, proporcionando, assim, a possibilidade de o aluno desenvolver a cognição para que, dessa forma, adquira habilidades com o intuito de desenvolver o pensamento lógico e de lidar com questões do cotidiano. Da mesma forma, importa que o aluno possa adquirir o hábito da investigação e tomar atitudes para enfrentar qualquer situação.

Aqui no Brasil, os PCNs (BRASIL, 1998) foram elaborados para orientar os professores na busca de novas abordagens e metodologias. Os PCNs traçam um perfil para o currículo, apoiado em competências básicas, para que o jovem estudante seja inserido na vida adulta, e orientam os professores na sua prática pedagógica. O PCN Ensino Médio – Orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais na área de conhecimento de Matemática – prevê que o estudante de matemática possa adquirir competências na resolução de problemas:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2006. p. 112).

De acordo com Onuchic e Allevato (2009), a metodologia de ensino-aprendizagem – avaliação de matemática, por meio da Resolução de Problemas, proporciona que os alunos construam os conhecimentos que estão relacionados a conceitos e conteúdos matemáticos. Conhecimentos estes que os estudantes, na sua grande maioria, saem da educação básica sem saber para que realmente aprenderam, ou seja, não lembram o que foi aprendido na escola, em razão da falta de sentido.

Ao realizar a aplicação de uma unidade didática contendo diferentes problemas, seguiu-se os passos descritos por Onuchic e Allevato(2009), que orientam o trabalho de sala de aula por meio da observação das seguintes etapas:

1) Preparação do problema.
2) Leitura Individual.
3) Leitura em conjunto.
4) Resolução do Problema.
5) Registro das Resoluções na Lousa.
6) Registros das Resoluções na Lousa.
7) Plenária.
8) Busca de Consenso.
9) Formalização do Conteúdo.

A metodologia de Resolução de Problemas vem ao encontro do objeto de estudo deste trabalho que é construir o conceito de limites no infinito de funções reais por meio dessa metodologia. Segundo Onuchic e Allevato(2009), esta metodologia permite ensinar matemática de maneira que os alunos pensem produtivamente, e que, diante de situações novas, possam ser autônomos nas tomadas de decisões.

IMAGEM CONCEITO E DEFINIÇÃO CONCEITO

A ideia de imagem de conceito e definição de conceito é defendida pelos pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner (1981), que focalizam a maneira como se dá a aquisição de um conhecimento matemático. Segundo os autores, para apropriar-se de um determinado conceito, não se deve partir de sua definição formal, ou seja, daquela definição que se busca em livros e que é aceita pela comunidade científica. Ao contrário, deve-se buscar a construção de um conceito matemático a partir das diferentes representações do objeto de estudo. Os professores expõe sua ideia sobre imagem de conceito e definição de conceito:

> Nós usaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo amadurece e se depara com novos estímulos [...]. Definição de

> conceito é a forma de palavras usadas para especificar o conceito (TALL e VINNER *apud* AMORIN, 1981, p. 152)

Além disso, essa teoria busca valorizar a construção das imagens conceituais, ou seja, aquelas que precedem a definição de conceito a partir do uso de diferentes recursos, tais como tabelas, formas algébricas e gráficas. Busca-se, na riqueza desses materiais, a promoção do indivíduo, a partir do uso de imagens diferentes de um mesmo conceito. Dessa maneira, o aluno, ao ser estimulado por meio das várias representações de um mesmo objeto de estudo, passa a criar imagens conceituais; assim, constrói as várias representações do objeto de estudo e formaliza, com palavras, o que Tall e Vinner consideram definição de conceito.

Na teoria defendida pelos autores, "definição de conceito" é a forma verbal que o aluno utiliza para explicar a imagem e que só pode ser formalizada a partir de uma imagem conceitual ou imagem de conceito bem definida e formada. Nesse sentido, o papel do professor é extremamente relevante, e, quanto mais enriquecedores são os contatos com o objeto de estudo, maior é a criação das imagens conceituais na mente do aluno.

Nesse trabalho, buscou-se utilizar situações-problema envolvendo várias imagens conceituais do objeto de estudo, a fim de formalizar-se o conceito de limite

METODOLOGIA DE PESQUISA

A coleta de dados desta pesquisa foi realizada durante a aplicação de uma sequência didática composta de 8 problemas distribuídos em 4 unidades, cada uma com 2 situações-problema. Tinham como objetivo construir o conceito de limite no infinito de funções de uma variável real

A turma foi dividida em 6 grupos, e a escolha dos componentes de cada grupo ficou a critério dos alunos. Os grupos foram classificados em A, B, C, D, E e F, e cada aluno do grupo foi identificado como A1, A2, ... até F1, F2, etc. Os grupos A, B , C e E ficaram compostos com 4 alunos, o grupo D tinha 3 alunos, e o grupo F, 5 alunos.

Além disso, o trabalho desenvolvido foi realizado na sala de aula dos alunos, e foram utilizados como recursos didáticos: quadro branco, canetão, cópia reprográfica para cada grupo e máquina fotográfica para os registros realizados durante a plenária e observação da professora.

Neste trabalho são apresentadas duas atividades da Unidade Didática correspondente a criação de imagens conceituais relacionadas ao conceito de limite no infinito de funções reais.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

A unidade didática teve como objetivo construir imagens conceituais de limites quando x tende a, $+\infty$ e $-\infty$. Dessa maneira, foram propostas duas situações-problema, dentre as quais uma explora a parte gráfica, e a outra explora a lei de formação e o uso de tabela.

Problema 1:A datação de um fóssil, utilizando-se o carbono-14 (C-14), é uma técnica que auxilia a pesquisa arqueológica para determinar, com boa exatidão, a sua idade. O carbono-14 acumula-se durante a vida de qualquer ser vivo e decai a partir de sua morte. Como a meia vida do C-14 é de, aproximadamente, 5.715 anos, muitos fósseis apresentam quantidades mensuráveis de C-14 depois de milhares de anos. Este estudo mostra que, se uma pequena fração da quantidade original de C-14 estiver presente, com medições apropriadas em laboratório, pode-se determinar a idade de qualquer fóssil. A equação que fornece a quantidade de C-14 remanescente em função do tempo é dada por: $Q(t) = Q_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5715}}$*, em que* Q_0 *é a quantidade inicial, e t é o tempo em anos.*

Fonte: FARAGO; CARNEIRO, 2010, p.62.

Em relação ao texto acima, responda:

a) Sendo 10 mg/kg a quantidade aproximada de C-14 no corpo de um animal, qual a idade aproximada de um fóssil que foi encontrado com apenas 0,625 mg de carbono-14 por Kg?

b) Qual o tempo decorrido se a quantidade remanescente for a metade da quantidade inicial?

c) Qual o tempo decorrido se a quantidade remanescente for a quarta parte da quantidade inicial?

d) Qual o tempo decorrido se a quantidade remanescente for a oitava parte da quantidade inicial?

e) Observe o gráfico que relaciona a massa de Carbono-14 em função do tempo.

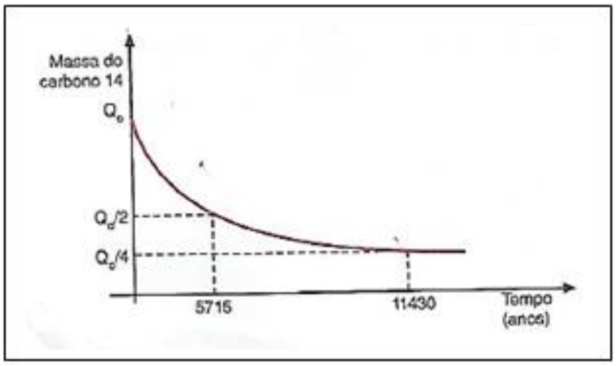


Figura 1: Gráfico da massa de carbono. FARAGO; CARNEIRO, 2010, p.62.

O que acontece como os valores da massa do C-14 quando o tempo em anos aumenta? Os valores da massa tendem a algum valor? Justifique.

O problema foi distribuído aos grupos pela professora-pesquisadora. Primeiramente, a professora observou os grupos na tomada de decisão e em seu comportamento perante o desafio.

Durante o trabalho, foi observado que os grupos não estavam conseguindo realizar as atividades, pois não conseguiram compreender o conceito de meia vida. Então, a professora realizou conjecturas para todos os grupos.

Professora: O que a expressão "meia vida" quer dizer?

Aluno C1: Quer dizer metade da vida.

Professora: Se meia vida, de acordo com o aluno C1, é metade da vida, então meia vida decai quanto?

Aluno A1: Decai pela metade.

Aluno C1: Então, por que temos que usar a fórmula?

Professora: A fórmula serve para determinar a quantidade de C-14 em função do tempo.

Aluno E2: Mas podemos fazer sem a fórmula, pois não lembro como se faz.

Professora: Pode fazer sem a fórmula, sim.

Após o momento de mediação da professora, os alunos iniciaram seus esquemas na realização do item (a). No decorrer das atividades, conseguiram identificar claramente o que foi solicitado, e não ocorreram indagações a respeito do item (a).

A professora solicitou que os grupos observassem atentamente o gráfico e o esquema que haviam construído no item (a). Nesse momento, a professora circulou pelos grupos a fim de sanar dúvidas que fossem surgindo, e provocava, em alguns grupos, questionamentos quanto à análise do gráfico, tais como:

Professora: Observe se esta curva aumenta ou diminui.

Professora: Quanto mais passa o tempo, o que acontece com a massa de carbono?

Durante a observação da professora, foi constatado que nenhum grupo conseguiu usar a fórmula apresentada no enunciado; os alunos não conseguiram mobilizar imagens conceituais referentes à lei de formação, pois estas são inconsistentes. Conseguiram, porém, utilizar o raciocínio lógico para resolução do problema.

Após a realização da atividade pelos grupos, a professora solicitou que um representante de cada grupo fosse ao quadro explicar como foi realizado o processo. Nessa etapa, foi observado que somente os grupos B e D não haviam registrado corretamente o item (a), enquanto os demais grupos conseguiram responder corretamente, e o fizeram de modo idêntico ao seguinte esquema:

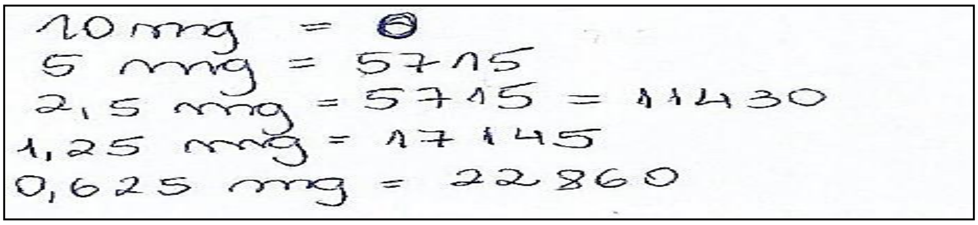


Figura 2: Solução do grupo C ao item (a).

A ideia registrada por estes grupos segue o raciocínio lógico da seguinte maneira, discutida por eles: o ano inicial é zero, e, no corpo do animal, já se encontram 10 mg de C-14. Após 5.715 anos, a quantidade de C-14 se reduz à metade, ou seja, a meia vida, que é de, aproximadamente, 5.715 anos. Logo, ao se aumentar mais 5.715 anos, ou seja, aumentar para 11.430, a quantidade de C-14 se reduzirá à metade, e assim por diante.

No que se refere ao item (b), somente os grupos A, C, E e F responderam corretamente, ou seja, 5.715 anos; os demais grupos não conseguiram chegar a essa resposta, fato que pode ser explicado, pois esses grupos não conseguiram criar um esquema correto para responder ao item (a).

Quanto ao item (c), somente os grupos C e F registraram corretamente suas respostas, enquanto os demais não conseguiram registrá-la corretamente. Apesar de o grupo E ter feito o registro igual ao exposto na figura 2, não interpretou corretamente o significado da quarta parte da quantidade inicial - no caso, a quarta parte de 10, que é 2,5, sendo, então, o tempo de 11.430 anos decorridos. Dante (1999) compreende que estar diante de situações-problema provocará no aluno um bom conhecimento básico matemático, o que, de fato, faltou a alguns grupos.

No item (d), somente os grupos C e F apresentaram respostas corretas. Os grupos E e D não fizeram nenhum registro para esse item.

Quanto ao item (e), o grupo F solicitou a ajuda da professora durante a mediação. Ela, então, interveio, fazendo perguntas:

Professora: Ao ler o enunciado, digam: o que compreenderam?

Aluno F1: Que, quanto maior o tempo em anos, menor é a massa de carbono C-14.

Professora: Para quais valores a massa tende?

Aluno E1: A tendência é que se aproxime de zero, conforme o gráfico.

Professora : Isso mesmo, e o tempo, tende para algum valor?

Aluno E1: Não, mas continua infinitamente.

O grupo A respondeu que o valor limite era 10; não compreendeu que quanto maior o tempo, menor seria a massa de C-14. Os grupos B e D registraram que o valor do carbono diminuiria. Já os grupos C, E e F responderam que os valores da massa diminuiriam quando conforme se passasse mais tempo, e que os valores de massa tenderiam a zero.

A solução correta escolhida pelos grupos foi a do grupo F.

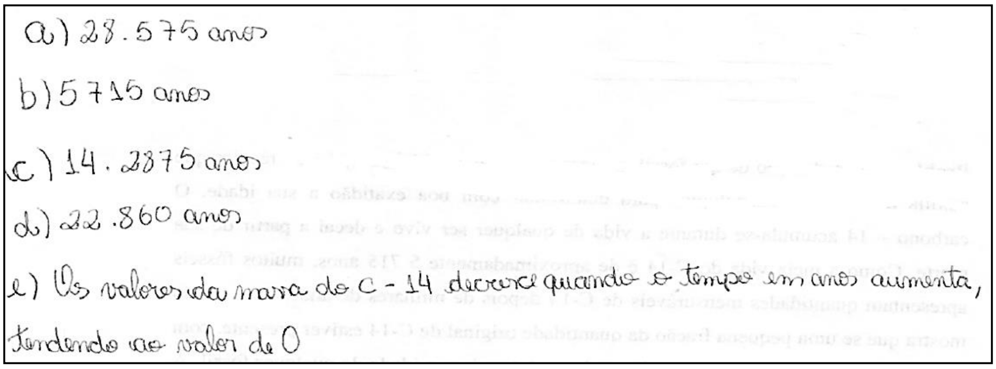

a) 28.575 anos
b) 5715 anos
c) 14.2875 anos
d) 22.860 anos
e) Os valores da massa do C-14 decresce quando o tempo em anos aumenta, tendendo ao valor de 0

Figura 3: Solução do grupo

Observa-se que os alunos, em sua maioria, conseguiram construir imagens conceituais e assim formalizar o conceito de limites quando x tende a um valor infinito. A intervenção nos grupos, realizada pela professora, ajudou na compreensão do conceito.

Problema 2: *Construa o gráfico da função f(x) = 2x + 6, com domínio os reais.*

a) Complete as tabelas:

Valores de x, para x real positivo.

x	*3,5*	*4*	*4,5*	*5*	*5,5*	*7*	*...*
f(x)							

Valores de x, para x real negativo.

x	*-1*	*-1,5*	*-2*	*-3,5*	*-4*	*-6*	*...*
f(x)							

b) Quando x tende a valores infinitos positivos, qual o comportamento da função f(x)?

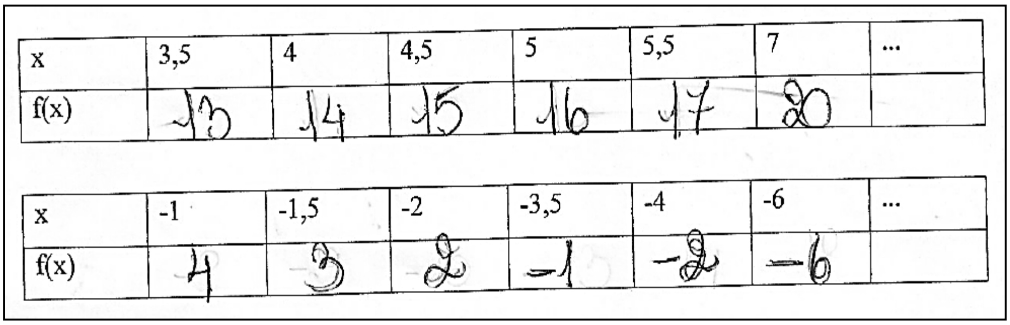
c) Quando x tende a assumir valores negativos, qual o comportamento da função f(x)?

d) Esses valores encontrados nas letras "a" e "b" são iguais? Justifique.

e) Existe o limite da função f(x), quando x tende ao infinito?

A professora-pesquisadora entregou a cada grupo o problema 2. Os alunos leram-no individualmente, e, logo após, a professora o leu em conjunto com os grupos. Depois, a professora circulou entre os grupos e observou que os alunos não estavam apresentando dificuldades na interpretação e desenvolvimento dos itens e, assim, começaram a traçar estratégias de solução.

Após a professora constatar que os alunos não apresentaram dificuldades na resolução da atividade, solicitou que um representante de cada grupo fosse ao quadro explicar como foi o processo de resolução. Para a letra (a), as soluções apresentadas pelos grupos foram idênticas: todos registraram corretamente, como mostra a figura a seguir.

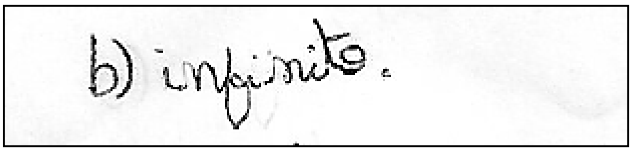


x	3,5	4	4,5	5	5,5	7	...
f(x)	13	14	15	16	17	20	

x	-1	-1,5	-2	-3,5	-4	-6	...
f(x)	4	3	2	-1	-2	-6	

Figura 4: Solução do grupo F ao item (a).

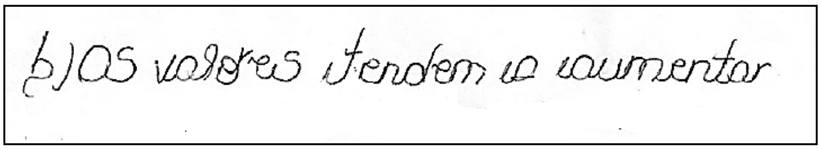
Quanto ao item (b), todos os grupos responderam corretamente, mas os grupos B, D e C foram os únicos que utilizaram as palavras “infinitamente” e “infinito”. Os demais grupos utilizaram a palavra “aumenta”.



b) infinito.

Figura 5 : Solução do grupo B ao item (b).

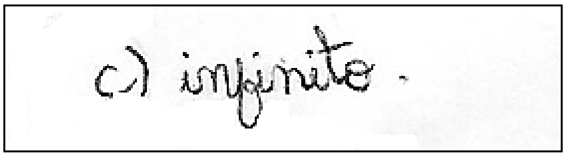
Neste item, foi possível observar a evolução do grupo B, pois já se percebia o uso da palavra “infinito”, ou seja, as imagens conceituais já são mais consistentes. Assim também ocorreu com o grupo F, com o uso da palavra “tendem”, conforme a figura a seguir.



b) os valores tendem a aumentar

Figura 6: Solução do grupo F, item (b)

A letra (c), todos resolveram corretamente, mas somente o grupo B utilizou a palavra “infinito”.



c) infinito.

Figura 7: Solução do grupo F, item (c).

Aqui, novamente, houve uso da palavra “infinito”, o que comprova que os alunos compreenderam o conceito de limite.

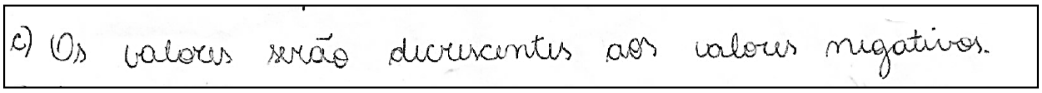

c) Os valores serão decrescentes aos valores negativos.

Figura 8: Solução do grupo C ao item (c).

Quanto à letra (d), todos os grupos responderam corretamente, fazendo uso das palavras “aumenta” e “diminui”. Os alunos já conseguiram mobilizar imagens conceituais referentes ao infinito positivo e negativo.

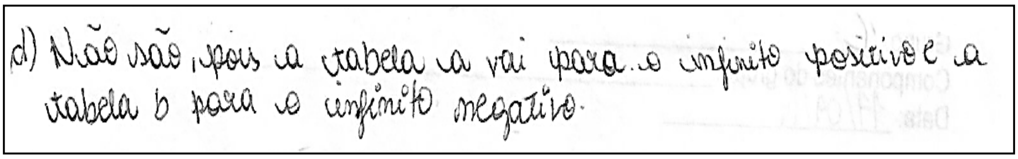

d) Não são, pois a tabela a vai para o infinito positivo e a tabela b para o infinito negativo.

Figura 9: Solução do grupo C ao item (d).

Quanto ao item (e), todos os grupos registraram corretamente.

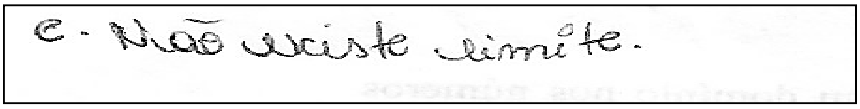
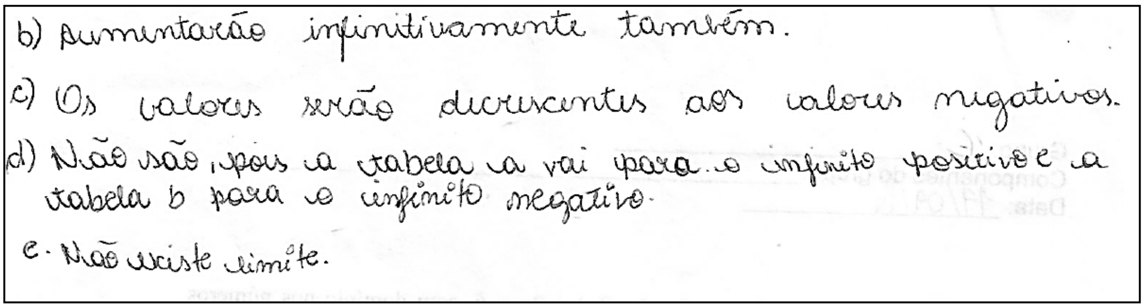

e. Não existe limite.

Figura 10: Solução do grupo C ao item (e).

A solução correta escolhida em consenso foi a do grupo C, em que os alunos conseguiram construir o conceito de limites quando x tende a valores infinitos.


b) Aumentarão infinitivamente também.

c) Os valores serão decrescentes aos valores negativos.

d) Não são, pois a tabela a vai para o infinito positivo e a tabela b para o infinito negativo.

e. Não existe limite.

Figura 11: Solução do grupo C

Após a conclusão das atividades, juntamente com os alunos, foi formalizado o conceito de limites quando x tende a valores no infinito.

A avaliação da aprendizagem dessas atividades foi processual, ou seja, a professora observou o envolvimento dos alunos na realização das tarefas propostas e, além disso, registrou, por meio do diário de campo, o desempenho de cada aluno durante a plenária.

Nessa unidade, concluiu-se que a maioria conseguiu evocar imagens que foram construídas no decorrer da unidade. Em atividades anteriores aos problemas propostos aqui foram resolvidos problemas que envolveram a construção do conceito de limite em um determinado ponto real. Nas atividades aqui propostas, foi possível perceber, que os alunos tiveram mais facilidade na identificação dos valores quando x tendia ao infinito e conseguiram, a partir das experiências anteriores, criar imagens conceituais de limites no infinito. Ou seja, as atividades anteriores proporcionaram maior facilidade na construção dos argumentos para esta última atividade. Foi possível perceber um crescente desenvolvimento dos alunos em relação a determinados conceitos que não haviam sido compreendidos nas unidades anteriores.

Um fato relevante nesta unidade foi o de que alguns grupos haviam começado a utilizar as expressões “infinito”, “limite” e “tender ao infinito”, o que corrobora com as ideias de Tall e Vinner (1981), quando defendem que as experiências diárias de cada indivíduo criam imagens de um determinado objeto, e, quando o sujeito é estimulado a pensar em determinado objeto, sua mente começa a trabalhar, surgindo, assim, representações visuais, impressões e propriedades.

Assim, a definição de conceito de limites laterais no infinito foi construída por todos os alunos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A asserção é de que, adequadamente trabalhado, é possível o ensino de limite no Nível Médio, por meio de uma metodologia coerente e de situações-problema de acordo com o nível do aluno.

Com base nas ideias Tall e Vinner (1981), de que a apropriação do conhecimento não deve partir da definição do conceito, e juntamente com utilização da Metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009), o método em questão mostrou-se eficiente em sala de aula, pois desafiou os alunos diante de questões que os levaram à construção de novos conceitos por meio de diferentes imagens de conceito criadas. Também contribuíram as discussões e o trabalho coletivo e colaborativo.

A construção de diferentes imagens conceituais aliada à metodologia contribuiu significativamente para a apropriação do conceito de limite, pois, ao final de cada unidade, observou-se nos grupos um crescimento em relação às unidades anteriores, o que contribuiu para a formalização dos conceitos atribuídos a cada unidade.

Claramente, a maioria dos alunos envolvidos na pesquisa conseguiu se apropriar dos conceitos propostos. A metodologia mostrou-se apropriada, pois os alunos foram protagonistas na construção do conhecimento, compartilhando informações e discussões dentro dos grupos, bem como expondo e defendendo opiniões.

REFERÊNCIAS

AMORIN, L. I. F**. A (re) construção do conceito de limite do cálculo para a análise:** um estudo com alunos do curso de licenciatura em matemática. 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**, Brasília, 2006, v. II.

FARAGO, J. L.; CARNEIRO. L. N. dos S. **Matemática:** 1ª série. Curitiba: Positivo, 2010. v. 3.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, v. 55, p. 1-19, 2009.

POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

TALL, D.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.