DO CONCRETO AO ABSTRATO: SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE NO INFINITO

Eliane Bihuna de Azevedo[1]

Jéssica Meyer Sabatke[2]

Elisandra Bar de Figueiredo[3]

Ivanete Zuchi Siple[4]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: A complexidade de noções e obstáculos cognitivos fazem o ensino e aprendizagem do limite ser um processo difícil, visto que os alunos nem sempre conseguem abstrair as ideias relativas ao conceito. Temos a suposição que o entendimento de ideias do limite, pode ser enriquecido utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Assim, o objetivo desse artigo é relatar o desenvolvimento e adaptação de uma sequência didática que visava explorar as ideias envolvidas no conceito de limite no infinito. As atividades foram experimentadas em turmas de Cálculo Diferencial e Integral de uma Universidade pública brasileira. Os resultados apontam que a resolução de problemas contextualizados pode facilitar a aprendizagem, bem como, auxiliar os processos de generalização e síntese do conceito.

Palavras Chaves: Sequência Didática. Resolução de Problemas. Limite no Infinito

INTRODUÇÃO

A utilização de novas práticas, considerando diferentes tendências no ensino da matemática, pode possibilitar na sala de aula um ambiente participativo e colaborativo motivando os alunos no processo de aprendizagem. Uma tendência que leva em consideração esses aspectos é a metodologia de Resolução de Problemas (RP), que se constitui em um contexto bastante propício à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento, colocando o aluno como participante ativo e central nas atividades de sala de aula, sem prescindir do fundamental papel desempenhado pelo professor como organizador e mediador no andamento dessas atividades. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Essa metodologia pode trazer contribuições para o ensino de Cálculo, em especial na compreensão do conceito de limite, que envolve o infinito e a abstração. Muitas pesquisas, nacionais e internacionais, têm sido realizadas nessa temática (CHURCHMAN, 1972; TALL e VINNER, 1981; SIERPINSKA, 1987; CELESTINO, 2008; SWINYARD e LARSEN, 2012). Esses estudos mostram que o limite é um dos

[1] Mestre. Universidade do Estado de Santa Catarina. eliane.bihuna@gmail.com
[2] Mestranda. Universidade do Estado de Santa Catarina. jessicasabatke2@gmail.com
[3] Doutora. Universidade do Estado de Santa Catarina. elis.b.figueiredo@gmail.com
[4] Doutora. Universidade do Estado de Santa Catarina. ivazuchi@gmail.com

conceitos mais complexos para ensinar e aprender, pois envolve a abstração, a noção de quantidades infinitamente grandes e pequenas e geralmente é priorizado, no ensino, o processo do cálculo. Entretanto é um conceito presente e fundamental para a compreensão de várias aplicações no Cálculo. Juter e Grevholm (2007) dizem que os conceitos envolvendo infinito são complexos, porém, necessários para os estudos de matemática, e afirmam que esses conceitos devem ser introduzidos e tratados com mais cuidado por professores, além disso, os "professores nas universidades devem estar cientes de como os alunos criam suas concepções iniciais sobre limites e sobre o infinito, tentando oferecer oportunidades para os alunos desenvolvê-las (...)". (JUTER; GREVHOLM, 2007, p. 347).

Nesse contexto elaboramos uma sequência didática que visa explorar as ideias envolvidas no conceito de limite no infinito que foram experimentadas em turmas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), com alunos de Engenharia e Licenciatura, de uma universidade pública brasileira. Na sequência, abordaremos as contribuições oriundas dessa prática.

IDEIAS DE CONCRETO E ABSTRATO E O CONCEITO DE LIMITE

Antes de falarmos sobre a abstração das ideias do conceito de limite, cabe falar sobre o significado das palavras "concreto" e "abstrato". No latim, "concretus" significa simplesmente "misturado", "fundido", "composto", "combinado"; enquanto a palavra latina "abstractus" significa "retirado", "retirado de", "extraído" (ou "isolado"), ou "distante". (ILIENKOV, 1960). Vemos que todas estas estão contidas no significado etimologicamente original dessas palavras, no entanto, percebe-se que muitas vezes não é nesse sentido que os termos são usados, corroborando com essa ideia, Ilienkov (1960, s.p.), diz que "os termos 'o abstrato' e 'o concreto' são ambos empregados no discurso cotidiano e na literatura especial de maneira ambígua". Baseando-se em autores que dão um suporte mais unânime sobre o significado desses conceitos, temos a concepção que, "conceitos concretos são aqueles que refletem objetos ou classes de objetos que realmente existem. Conceitos abstratos são aqueles que refletem uma propriedade do objeto abstraída mentalmente do próprio objeto". (KONDAKOV, 1954, p. 300 apud ILIENKOV, 1960, s.p.).

Para Mendes (2009) a abstração matemática, é baseada em dois processos: a *generalização*, que "perpassa uma ação cognitiva de derivação ou indução a partir de especificidades, ou seja, a identificação de características comuns ou a expansão dos domínios de validade de conclusões particulares" (MENDES, 2009, p. 76); e a *síntese,* que "trata da combinação ou composição de partes visando formar um todo, que muitas vezes é mais do que a soma das partes". (DREYFUS, 1991, *apud* MENDES, 2009, p.76).

Mendes (2009) também sugere que o envolvimento dos alunos com problemas reais e abertos favorece o desenvolvimento das representações mental[5] e simbólica[6] para representar um pensamento matemático. Além disso, o autor comenta que no processo cognitivo desenvolvido na busca da formulação matemática das situações-problemas, bem como as possíveis representações e soluções para o problema, conduz o aluno ao alcance da abstração de conceitos, cujo processo ocorre por generalização ou síntese.

A respeito do conceito de limite, Cornu (2002, p.165, apud SANTOS, 2013, p. 36) diz que, "a diversidade de concepções, a riqueza e a complexidade de noções e os obstáculos cognitivos fazem o ensino do conceito de limite extremamente difícil". Além disso, de acordo com Santos (2013), um problema adicional é o estabelecimento de um lugar onde o aprendizado ocorre, pois,

> A noção de limite tem que ser usada para resolver problemas específicos. É preciso que sejam apresentadas situações pelas quais os estudantes certifiquem-se de que o limite é uma ferramenta útil. O limite deve ser visto como parte da resposta para questões indagadas pelos estudantes. Isso é deixado frequentemente de fora do ensino atual. A definição da noção de limite é dada seguida por uma sequência de problemas e exercícios normalmente baseados somente na capacidade de lidar com a álgebra do conceito de limite: da soma, do produto, da composição de duas funções ou de duas séries. (SANTOS, 2013, p. 37).

Desse modo, o que pode acontecer, é que os alunos saibam apenas efetuar os cálculos na resolução de exercícios envolvendo limites, mas não consigam abstrair o que de fato ele significa.

Soares e Rêgo (2015) defendem que as concepções sobre os conceitos de concreto e abstrato influenciam as práticas de ensino, por isso, a escolha do tipo de material didático a ser utilizado deve levar em consideração: "a especificidade do objeto, em termos de nível de concretude e, que é necessária uma relação dialética entre o concreto e o abstrato para que conhecimento matemático tenha sentido para

---

[5] Constitui-se no modo individual que cada um tem para formular sua internalização acerca de qualquer situação-problema e geralmente é fruto da experiência matemática vivenciada. (MENDES, 2009).

[6] Manifesta-se de forma escrita ou oral, normalmente com a finalidade de viabilizar a comunicação de um conceito matemático construído. (MENDES, 2009).

o aprendiz”. (SOARES; REGO, 2015, p. 711). Mendes (2009) sugere que “as representações simbólica e mental de um mesmo conceito matemático, formulado a partir da **resolução de problemas**, são peças essenciais no processo de abstração matemática”. (MENDES, 2009, p. 76, grifo nosso).

Por isso, nos propomos a investigar como a RP pode ser útil diante do cenário da aprendizagem numa sequência didática que propõe aos alunos abstraírem as ideias do conceito de limite no infinito.

EVOLUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Abordaremos a evolução de uma sequência didática cujo objetivo era que os alunos construíssem a ideia de limite no infinito, e para isso, era necessário que utilizassem conceitos de equação exponencial e logarítmica, e construção de gráficos - já vistos no Ensino Básico e também na própria disciplina de CDI. Ela foi proposta a cinco turmas de CDI – uma no primeiro semestre de 2016, duas no segundo semestre de 2016; e, duas no primeiro semestre de 2017 – após ter sido aplicada uma sequência didática para introduzir o conteúdo de limite no ponto através da metodologia RP, seguindo as orientações do roteiro de Onuchic e Allevato (2014) para atuação do professor em sala de aula.

A primeira versão da sequência, apresentada no Quadro 1, começava com uma situação problema e propunha questões que tinham o propósito de formalizar o conceito de limite no infinito.

A experimentação ocorreu em sala de aula e os alunos se reuniram em grupos para resolverem as questões. Constatamos que a maior parte das equipes conseguiu interpretar corretamente o problema, encontrando a produção mínima, a produção máxima e a quantidade mínima de semanas de trabalho para um operário contribuir para o lucro da empresa. Porém, houve erros nas questões relacionadas com as propriedades de funções logarítmicas e exponenciais e na interpretação geométrica e algébrica do significado das variáveis M, N, ε e L, pois o reconhecimento dessas variáveis envolvia a generalização do conceito. Uma análise detalhada dessa aplicação pode ser encontrada em SABATKE et al (2017).

Quadro 1 – Sequência aplicada no primeiro semestre de 2016.

Em uma indústria, um funcionário recém-contratado produz menos que um operário experiente. A função que descreve o número de peças produzidas diariamente por um trabalhador da metalúrgica é

$$p(t) = 180 - 110 \cdot (2^{-0,5t}),$$

em que t é o tempo de experiência no serviço, em semanas.

a. Determine quantas peças um operário recém-contratado produz diariamente.
b. Desenhe o gráfico de $p(t)$.
c. Determine a assíntota horizontal no gráfico e explique o que ela representa.
d. Matemáticos avisaram de que somente com um volume de produção das peças superior a $\boldsymbol{N}$ a rentabilidade do processo seria satisfatória. Assim, se o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção for a produção de $\mathbf{160}$ peças determine a quantidade mínima de tempo, $\boldsymbol{M}$, de experiência de serviço do funcionário para atingir essa produção mínima.
e. Quando o funcionário tem experiência maior do que "M", então a produção ficará sob controle de uma garantia de uma produção mínima de peças que será superior ao valor "N" fornecido como o mínimo de produção aceitável. *Dito em outras palavras: a distância entre o máximo de produção "L", que pode produzir o funcionário e o mínimo "N" aceitável pelos matemáticos é "ε" (L - N = ε). Portanto, mesmo se os matemáticos variassem o valor de N ou ε (sendo relativo à produção, ε é sempre positivo), sempre seria possível determinar um novo valor M de tal forma a controlar a produção pelo tempo de experiência.*
   Como citado acima, as variáveis $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}\ \varepsilon\ e\ \boldsymbol{L}$ podem controlar a produção de peças. Represente no gráfico que você desenhou no item **b.** essas variáveis.
f. Com relação a definição formal de limite, como ficaria a sentença abaixo? Substitua os espaços em branco pelas informações encontradas nas questões anteriores, utilizando, conforme necessário, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{\varepsilon}\ ou\ \boldsymbol{L}$.

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = L \Leftrightarrow \forall \_\_\_ > 0, \exists \_\_\_ > 0 \ \ tal\ que\ t > \_\_\_ \rightarrow |p(t) - \_\_\_| < \_\_\_$$

Fonte: Produção das autoras, 2016.

Em função das dificuldades detectadas na primeira experimentação (Quadro 1) foram inseridas questões para os alunos determinarem as constantes envolvidas na função com o objetivo de trabalhar mais com as propriedades das funções logarítmica e exponencial (Quadro 2). Nesta aplicação o trabalho foi individual e em horário extraclasse. Na análise observou-se que as soluções não apresentaram mais os erros relacionados com as propriedades de funções logarítmicas e exponenciais. Porém, os alunos continuaram apresentando dificuldades para identificar $M, N, \varepsilon\ e\ L$, além de confundirem a definição de limite no infinito com limite num ponto.

Quadro 2 – Sequência aplicada no segundo semestre de 2016

Um especialista em eficiência, contratado por uma empresa, compilou os seguintes resultados com relacionando a produtividade dos seus operários com a sua experiência:

Experiência (meses)	0	6
Produtividade (peças/hora)	300	410

Este especialista sabe que a função que descreve o número de peças produzidas mensalmente por um trabalhador é $p(t) = 500 - c * e^{kt}$, em que t é o tempo de experiência no serviço, em meses.

a. Determine as constantes c e k que retratam a situação acima descrita.
b. Quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para que atinja um nível de produtividade de 350 peças/hora?
c. Quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para atinja um nível de produtividade de 600 peças/hora?
d. Use o gráfico da função $p(t)$ para descrever a evolução da produtividade em relação ao tempo de experiência do funcionário.
e. Que razões justificariam (conjecture) a resposta do item **d**?
f. Matemáticos avisaram de que somente com um volume de produção das peças superior a ***N*** é que a rentabilidade do processo seria satisfatória. Assim, se o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção for a produção de **450** peças determine a quantidade mínima de tempo, ***M***, de experiência de serviço do funcionário para atingir essa produção mínima.
g. Quando o funcionário tem experiência maior do que "*M*", então a produção ficará sob controle de uma garantia de uma produção mínima de peças que será superior ao valor "*N*" fornecido como o mínimo de produção aceitável. *Dito em outras palavras: a distância entre o máximo de produção "L", que pode produzir o funcionário e o mínimo "N" aceitável pelos matemáticos é "ε" (L - N = ε). Portanto, mesmo se os matemáticos variassem o valor de N ou ε (sendo relativo à produção, ε é sempre positivo), sempre seria possível determinar um novo valor M de tal forma a controlar a produção pelo tempo de experiência.*
Como citado acima, as variáveis ***M,N ε e L*** podem controlar a produção de peças. Represente no gráfico da função $p(t)$ essas variáveis.
h. Com relação a definição formal de limite, como ficaria a sentença abaixo? Substitua os espaços em branco pelas informações encontradas nas questões anteriores, utilizando, conforme necessário, ***M,N, ε ou L.***

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = L \Leftrightarrow \forall \_\_\_ > 0, \exists \_\_\_ > 0 \;\; tal\; que\; t > \_\_\_ \rightarrow |p(t) - \_\_\_| < \_\_\_$$

Fonte: Produção das autoras, 2016.

Essa sequência teve uma terceira evolução, com o intuito que os alunos conseguissem superar os erros que ainda ocorreram na segunda aplicação. A sequência do Quadro 3 foi proposta para duas turmas de CDI, que possuíam ao todo 87 alunos matriculados (51 na turma A[7] e 36 na turma B[8]) e podia ser feita de forma individual ou em grupo de até 4 integrantes. A entrega do trabalho foi via plataforma Moodle. Ao todo, 64 alunos entregaram o trabalho. Destes, 11 trabalharam de forma individual e, dos demais, foram 5 duplas, 5 trios e 7 quartetos. Mesmo essa atividade tendo sido em caráter avaliativo, 23 alunos não entregaram.

[7] Turma de Licenciatura em Matemática com alunos dos demais cursos. Desses, 5 fazem pela primeira vez a disciplina.
[8] Turma de Licenciatura em Química com alunos dos demais cursos. Desses, 31 fazem pela primeira vez a disciplina.

Quadro 3 – Sequência aplicada no primeiro semestre de 2017

Um especialista em eficiência, contratado por uma empresa, compilou os seguintes resultados relacionando a produtividade dos seus operários com a sua experiência:

Experiência (meses)	0	6
Produtividade (número de peças por mês)	200	410

Este especialista sabe que a função que descreve o número de peças produzidas mensalmente por um trabalhador é $f(x) = 500 - ce^{kx}$, em que x é o tempo de experiência no serviço, em meses.

a. Determine as constantes c e k que retratam a situação acima descrita.
b. Quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para que atinja um nível de produtividade de 350 peças/mês?
c. Quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para atinja um nível de produtividade de 600 peças/mês?
d. Use o gráfico da função $f(x)$ para descrever a evolução da produtividade em relação ao tempo de experiência do funcionário. Justifique sua resposta.
e. Chamaremos de tolerância à diferença entre o máximo de peças que um funcionário pode produzir e o número de peças produzidas por um funcionário para que a empresa atinja o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção. Admitindo uma tolerância de 15% da capacidade de produção da empresa de um funcionário, quanto tempo de experiência ele deve ter para que satisfaça o mínimo de produção almejada pela empresa? E se for 10% de tolerância?
f. Se a tolerância (do item anterior) for chamada de ε e o tempo mínimo de experiência para que o funcionário esteja satisfazendo essa meta da empresa seja M, encontre a relação entre as constantes M e ε.
g. Admitindo que L é a capacidade de produção de um funcionário, usando as constantes M e ε do item anterior, como ficaria escrito M em função L e ε? Represente no gráfico da função $f(x)$ essas variáveis.
h. Com relação a definição formal de limite, como ficaria a sentença abaixo? Substitua os espaços em branco pelas informações encontradas nas questões anteriores, utilizando, conforme necessário, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{\varepsilon}$ **e** $\boldsymbol{L}$.

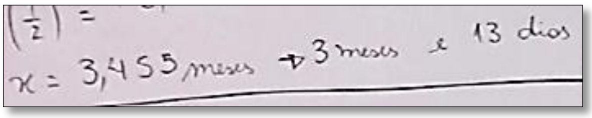
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \_\_\_ > 0, \exists \_\_\_ > 0 \ tal \ que \ x > \_\_\_ \to |f(x) - \_\_\_| < \_\_\_$$

Fonte: Produção das autoras, 2017.

O item *a* solicitava para que fossem encontradas as constantes *c* e *k* que retratassem a situação proposta, ou seja, que inicialmente um funcionário produzisse 200 peças por mês e, após 6 meses de experiência produzisse 410 peças mensais. Alguns alunos tiveram dificuldades na determinação dessas constantes, pois não haviam compreendido que deveriam utilizar os valores da tabela. Várias equipes procuraram o atendimento para sanar tal dúvida. Essa dificuldade surpreendeu, pois o conteúdo de funções fora trabalhado através da RP e com vários problemas propostos, mas poucos problemas apresentavam dados na forma tabular. Apesar disso, somente um estudante, que trabalhou de forma individual, errou a determinação da constante *k*, pois pela resolução apresentada nos outros itens, percebe-se que ele não entendeu que a constante *k* solicitada seria a mesma utilizada em todos os itens, pois encontrou vários valores de *k*. Das respostas apresentadas, duas equipes não seguiram o caminho tradicional para escrever a função, mantendo a exponencial de base "e" que fora proposta inicialmente. Eles usaram propriedades de exponenciais e logaritmo para trocar o termo $e^{\frac{x}{6}ln\left(\frac{3}{10}\right)}$ por $\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{6}}$. Assim, trabalharam com a função $f(x) = 500 - 300\left(\frac{3}{10}\right)^{\frac{x}{6}}$.

O item *b* solicitava o tempo de experiência que um funcionário deveria ter para produzir 350 peças mensais. O resultado dependia da determinação das constantes, logo o aluno que errou o item *a*, também errou o item *b*. Os demais grupos concluíram corretamente a questão, contudo as respostas tiveram pequenas variações causadas por arredondamentos. A grande maioria apresentou resposta com duas casas decimais, por exemplo, $x = 3{,}45$ meses. Somente 4 equipes fizeram a conversão deste número para meses e dias (Figura 1).

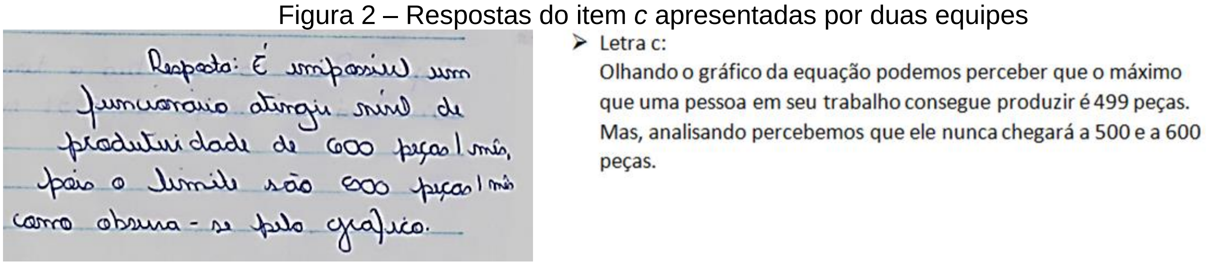
Figura 1 – Resposta do item *b* apresentada por uma equipe



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

O item *c* questionava quanto tempo de experiência deve ter um funcionário para atingir um nível de produtividade de 600 peças/mês. Esse item foi respondido corretamente por 25 equipes. Para solucionar, a maioria das equipes seguiu uma ou as duas das seguintes estratégias: determinar analiticamente o valor de x para que $f(x) = 600$; determinar pela interpretação gráfica o limite da função para x tendendo a mais infinito. Os estudantes que seguiram a primeira estratégia chegaram em um logaritmo de logaritmando negativo e concluíram que um funcionário não poderia atingir um nível de produção de 600 peças mensais. Os estudantes que construíram o gráfico da função, o fizeram de forma manual ou com uso de algum software gráfico e o interpretaram de duas formas diferentes. Muitos responderam que a produção máxima é de 500 peças e três equipes responderam que a produção máxima é de 499 peças (Figura 2).

Figura 2 – Respostas do item *c* apresentadas por duas equipes

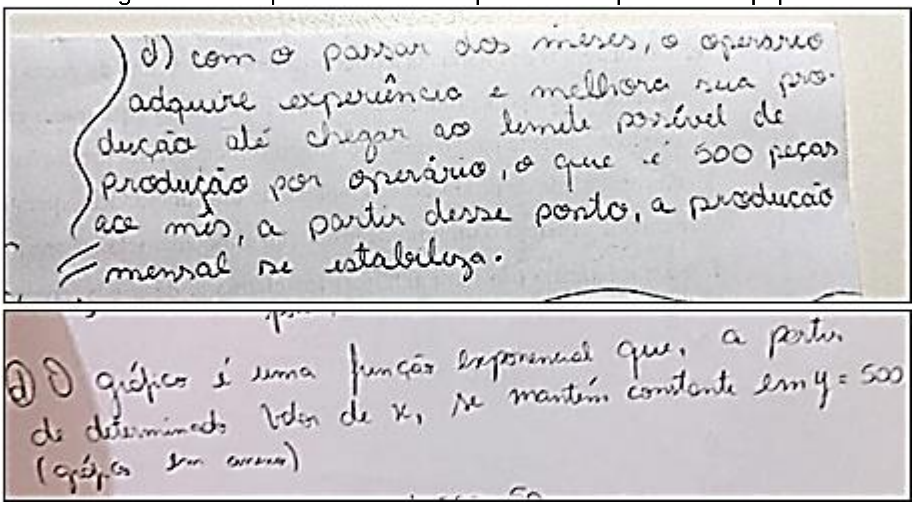


Fonte: Produção dos alunos, 2017.

E ainda, uma equipe, formada por alunos que já cursaram ao menos uma vez a disciplina de CDI, calculou analiticamente o limite da função e obteve a resposta de que a produção máxima é de 500 peças. Destaca-se que a professora não tinha trabalhado em sala de aula cálculo de limites por meio de propriedades, ou seja, os alunos lembravam do conteúdo de outros semestres. Duas equipes responderam errado. Dessas, uma chegou na expressão $ln = 0{,}33$. Para obterem este resultado erraram um sinal, aplicaram a função logaritmo natural somente no lado esquerdo da igualdade além de não escreveram o argumento do logaritmo. E, a outra equipe tomou o valor absoluto somente de um dos lados da igualdade a fim de continuar manipulando. Uma equipe não respondeu.

O item *d*, que tratava da análise gráfico da função para descrever a evolução da produtividade em relação ao tempo de experiência do funcionário, foi respondido corretamente por dez equipes. Dentre essas estão as três que, no item *c*, responderam que a produção máxima é 499 peças e novamente destacaram isso. Com problemas contextualizados como este, pode-se perceber como muitas vezes os alunos não se dão conta que estão trabalhando com funções com domínio contínuo, mas cuja imagem é um conjunto discreto, pois ao tratar de peças produzidas, não teria sentido falar, por exemplo, em 499,5 peças. Houve 13 respostas parcialmente corretas, dessas a maioria com erros de interpretação equivocada da produção máxima em 500 peças, considerando que a produção se estabilizaria, ou seja, a função seria constante (Figura 3). Quatro equipes construíram o gráfico errado e uma não respondeu.

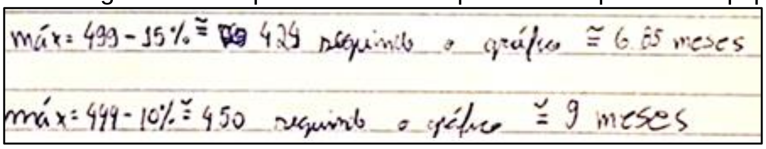
Figura 3 – Resposta do item *d* apresentada por duas equipes



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

O item *e* definia como tolerância a diferença entre o máximo de peças que um funcionário pode produzir e o número de peças produzidas por um funcionário para que a empresa atingisse o mínimo satisfatório economicamente para o desenvolvimento lucrativo da produção. A seguir, solicitava que fosse encontrado o tempo de experiência que um funcionário deveria ter para que a tolerância fosse de 15% e 10%. Ao todo 23 equipes responderam corretamente. Descobriram que os 15% e 10% do limite, correspondiam a 425 e 450 peças por mês, respectivamente. Efetuando os cálculos, encontraram por resposta em torno de 6,9 meses e 8,95 meses, respectivamente. Estes valores foram determinados a partir do limite de produção que é igual a 500 peças. Das três equipes que responderam que a produção máxima era 499 peças mensais, duas efetuaram os cálculos e a terceira usou o gráfico feito no GeoGebra para determinar os valores aproximados como ilustra a Figura 4. Nesta figura é possível observar que a equipe escreveu errado no início, pois fizeram 499-15%, faltou escrever que era 15% de 499. Mas, pela resposta apresentada, percebe-se que fizeram esta consideração nos cálculos.

Figura 4 – Resposta do item *e* apresentada por uma equipe


máx= 499 - 15% ≅ 424 seguindo o gráfico ≅ 6.85 meses

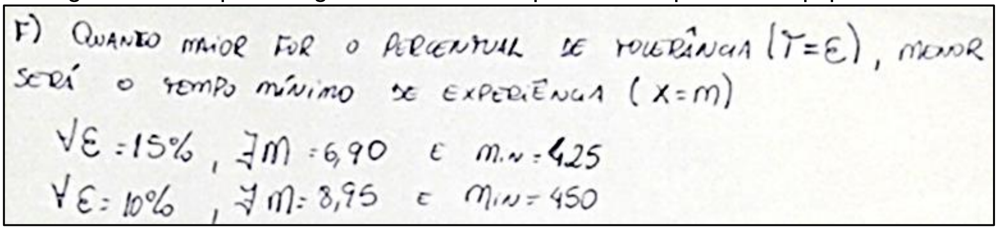
máx= 499 - 10% ≅ 450 seguindo o gráfico ≅ 9 meses

Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Três equipes acertaram parcialmente o item *e*: uma definiu *M* como sendo o limite e finalizaram de forma errada a resolução da inequação $M - 15\%M < f(x) < M + 15\%M$; outra interpretou, equivocadamente, que um funcionário deveria ter ao menos 7 meses de experiência para que fosse admitido na empresa; e, a terceira, ao chegarem na expressão $\frac{50}{300} = e^{-0.2x}$, para isolarem a variável x aplicaram a função logaritmo na base 10 e erraram ao considerar que $log(e^{-0,2x}) = -0,2x$. Apenas um aluno errou esse item ao considerar os 15% e 10% a partir da quantidade inicial de peças, e um aluno não respondeu este item.

O item *f* solicitava a relação existente entre *M* e ε. Seis equipes finalizaram a determinação da relação entre as *M* e ε: as que consideraram 499 peças como sendo o limite partiram de $f(M) = 499 - \varepsilon$ e encontraram $M = \frac{6\ln((1+\varepsilon)/300)}{ln(3/10)}$; as que usaram o limite de produção igual a 500 peças obtiveram $M = \frac{6\ln(\varepsilon/300)}{ln(3/10)}$; e duas equipes não isolaram M em função de ε. Doze equipes acertaram parcialmente este item: quatro erraram na interpretação da porcentagem; sete grupos responderam que quanto maior a tolerância menor é a exigência de experiência, usando valores fixos para chegar a essa conclusão (Figura 5); e uma equipe resolveu corretamente, mas na finalização escreveu $M < \frac{6\ln(\varepsilon/300)}{ln(3/10)}$, quando formalmente seria a inequação contrária.

Figura 5 – Resposta algébrica do item *f* apresentada por uma equipe


F) Quanto maior for o percentual de tolerância $(T = \mathcal{E})$, menor será o tempo mínimo de experiência $(x = m)$

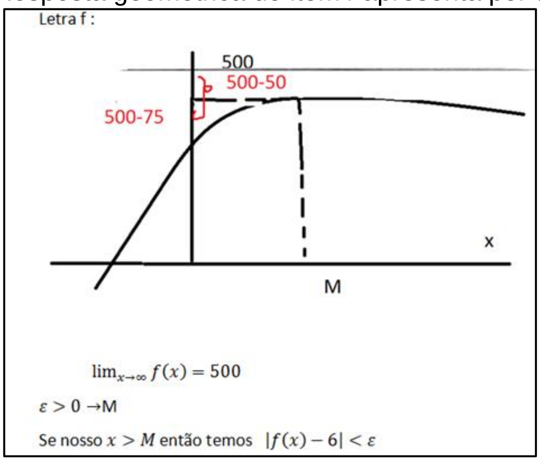
$\forall \mathcal{E} = 15\%$, $\exists M = 6{,}90$ e $m.n = 425$

$\forall \mathcal{E} = 10\%$, $\exists M = 8{,}95$ e $min = 450$

Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Cinco equipes erraram o item *f*. Uma delas construiu um gráfico (Figura 6), que não corresponde ao gráfico da função dada, indicaram a reta $y = 500$, considerando-a como sendo uma assíntota horizontal, porém no gráfico ilustrado isso não ocorre. Ainda, destacaram no gráfico as tolerâncias do item anterior e indicaram M. Para finalizar escreveram $\lim_{x\to\infty} f(x) = 500$, mas ao aplicarem a definição, escreveram $|f(x) - 6| < \varepsilon$ sem nenhuma justificativa. A outra equipe que errou fez $\varepsilon = f(M)$ e encontrou por resposta $M = \frac{-1}{2} ln\left(\frac{\varepsilon - 500}{-300}\right)$. A terceira equipe desta categoria, usou M como se fosse o δ da definição formal de limite num ponto. A quarta, apresentou a expressão $Mx = \varepsilon$, assumiu $M = 6{,}9086$ e $\varepsilon = 425$, encontrou $x = 61{,}5175$ e concluiu dizendo x era a relação entre M e ε. A quinta equipe, usou resultados errados obtidos no item anterior. E, cinco equipes não apresentaram solução.

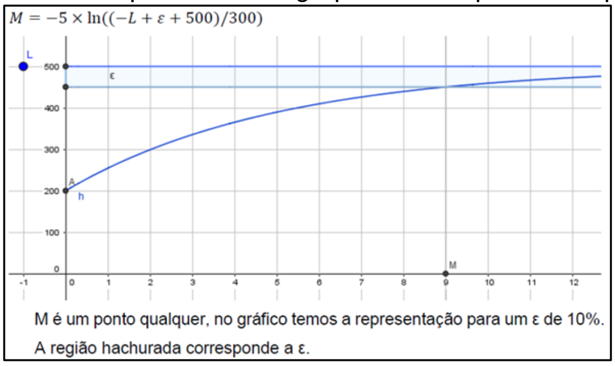
Figura 6 – Resposta geométrica do item *f* apresenta por uma equipe



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

O item *g* requisitava uma relação entre as variáveis M, L, ε, δ e representá-las no gráfico. Somente um aluno respondeu por completo este item (Figura 7).

Figura 7 – Resposta do item *g* apresentada por uma equipe

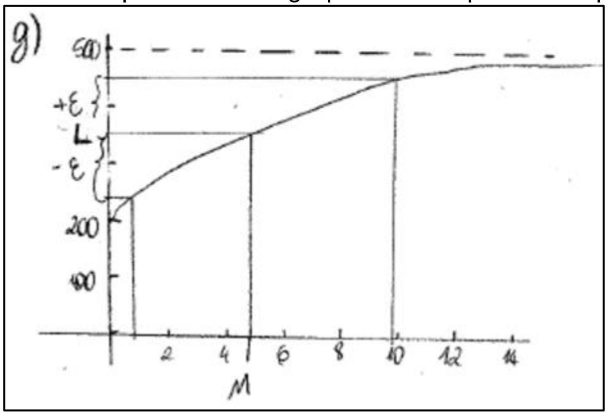


Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Dezenove equipes acertaram parcialmente, sendo que algumas representaram errado o gráfico ou representaram sem a indicação das variáveis e outras não encontraram a relação para *M*.

Cinco equipes não responderam. Quatro responderam errado: uma disse que $M = \varepsilon L$, porém não justificou essa informação; outra não encontrou *M* e na representação gráfica, misturou a interpretação geométrica de limite infinito com limite no ponto (Figura 8); uma errou tanto a determinação de M como representou o gráfico errado; e, a última deste grupo, representou um gráfico errado que não possui assíntota horizontal.

Figura 8– Resposta do item *g* apresentada por uma equipe



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

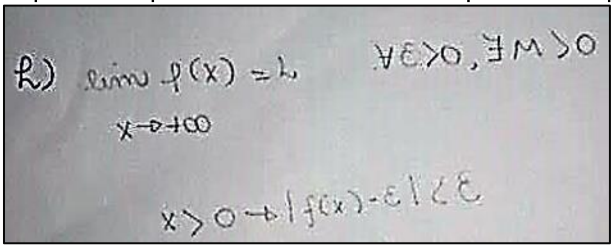
O item *h* solicitava que fossem preenchidos nos espaços em branco, da definição formal de limite no infinito, as constantes *M*, *L*, ε, δ. Aqui treze equipes responderam corretamente (Figura 9); onze equipes preencheram erroneamente ao menos um dos espaços (Figura 10); quatro não responderam.

Figura 9 – Exemplo de resposta correta do item *h* apresentada por uma equipe

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0,$ tal que $x > M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Fonte: Produção dos alunos, 2017.

Figura 10 – Exemplo de resposta incorreta do item *h* apresentada por uma equipe



Fonte: Produção dos alunos, 2017.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As experimentações das sequências possibilitaram verificar que a maior dificuldade dos alunos estavam relacionadas com a abstração do conceito de limite no infinito, ou seja, ao utilizar os símbolos e inequações na generalização ocorreram um número maior de erros comparado as questões anteriores que eram contextualizadas. No entanto, com as adaptações das atividades propostas, na última sequência, podemos perceber que o número de acertos ou acertos parciais foi maior do que o número de erros, apontando um resultado positivo. Com relação aos erros relacionados ao uso inadequado de propriedades de funções exponenciais e logarítmicas foi reduzido significativamente, visto que a maioria conseguiu acertar essas questões.

Acreditamos que o auxílio da resolução de problemas contextualizados pode facilitar a aprendizagem do conceito de limite no infinito ao atribuir algum significado concreto a definição formal. Salientamos que o professor que tem interesse de colocar em prática alternativas diferenciadas de ensino, não deve desanimar caso suas primeiras propostas de atividades não ocorram como previsto, pois elas permitem identificar erros e dificuldades apresentadas por seus alunos, e, com o intuito de amenizar estes problemas, readequar os recursos didáticos utilizados.

Além disso, também são necessárias mais experiências para os alunos adquirirem habilidades e competências matemáticas, pois assim, os processos de generalização e síntese se efetivarão.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina (FAPESC) e aos grupos de pesquisa NEPesTEEM e PEMSA.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CELESTINO, Marcos Roberto. **Concepções sobre limite:** imbricações entre obstáculos manifestos por alunos do ensino superior. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2008.

CHURCHMAN, Frank Leslie. **A comparative study of three different approaches to the limit concept. Dissertation**. University of Georgia, 1972.

ILIENKOV, Evald Vasilievich. A Concepção Dialética e Metafísica do Concreto. Tradução de Marcelo José de Souza e Silva. In: **A Dialética do Abstrato e do Concreto em O Capital de Karl Marx**, 1960. Disponível em: <https://www.marxists.org/portugues/ilyenkov/1960/dialetica/index.htm>. Acesso em: 04 dez. 2016.

JUTER, Kristina; GREVHOLM, Barbro. Limits and infinity: a study of university students' performance. In: BERGSTEN C.; GREVHOLM, B.; MÅSØVAL, H.; RØNNING. F. (eds.) **Relating practice and research in mathematics education:** Proceedings of Norma 05, Fourth Nordic Conference on Mathematics Education. Trondheim: Tapir Akademisk Forlag, 2007, p. 337-348.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

________. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G.; Noguti, F. C. H.; Justilin, A. M. **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**, p. 35-52. Jundiaí/SP: Paco Editorial, 2014.

SABATKE, Jéssica Meyer; FIGUEIREDO, Elisandra Bar; SIPLE, Ivanete Zuchi; AZEVEDO, Eliane Bihuna. **No prelo**. Limite no infinito: do contexto ao descontexto. **Anais do VIII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática**, Madrid, 2017.

SANTOS, Maria Bethânia Sardeiro. **Um olhar para o conceito de limite**: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado. 2013. 338 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2013.

SIERPINSKA, Anna. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. In: **Educational Studies in Mathematics**, n. 18, p. 371–397, 1987.

SOARES, Luis Havelange; REGO, Rogéria Gaudêncio. O concreto e o abstrato no ensino de matemática. In: 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Ilhéus. **Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2015. v. 4. p. 710-721.

SWINYARD, Craig; LARSEN, Sean. Coming to understand the formal definition of limit: Insights gained from engaging students in reinvention. In: **Journal for Research in Mathematics Education**, 43(4), p. 465–493, 2012

TALL, David; VINNER, Shlomo. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151–169, 1981.