CONCEPÇÕES E CONHECIMENTOS DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE DEMONSTRAÇÃO

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho[1]

História da Matemática, História da Educação Matemática e Cultura

Resumo: Neste trabalho são discutidas as concepções dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre a demonstração em Matemática. Para isso, foi estabelecido um referencial teórico que possibilitou entender o raciocínio, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos para construí-la, tomando por base, inicialmente, as pesquisas de Nickerson (2010). Para possibilitar uma melhor compreensão dos aspectos inerentes aos métodos de demonstração, optamos por uma orientação histórica, filosófica e matemática, numa perspectiva epistemológica e ontológica, presente no processo de demonstração. Em seguida, foi aplicado um questionário para alunos de Licenciatura em Matemática com questões que tiveram como objetivo abordar as concepções desses alunos sobre demonstração em Matemática. Neste texto discutimos os resultados obtidos por meio da análise das respostas dadas ao questionário. Ao analisar as respostas dos alunos ao questionário, notamos que prevalece uma concepção de que a demonstração teve origem na Grécia Antiga, de que o que é considerado uma demonstração em Matemática varia em conformidade com o contexto social e o período histórico e de que uma demonstração é válida quando não se encontram contraexemplos que contradigam o que foi provado. Entretanto, a concepção do que é uma demonstração e como as demonstrações são construídas é diversa.
Palavras Chaves: Demonstração. História e Filosofia da Matemática. Concepções. Formação Inicial de Professores.

Introdução

Em geral, nossas primeiras noções de argumentação matemática surgem quando aprendemos aritmética, geometria e álgebra elementar nos anos iniciais de nossa formação e, em especial, no Ensino Médio, quando em alguns momentos, o professor demonstra alguns resultados relacionados ao conteúdo matemático ministrado. Em virtude dessa experiência, ficamos com a impressão que, em Matemática, os resultados (proposições) devem ser demonstrados para que tenhamos a certeza de sua validade. Já em outros ramos do conhecimento, essa verdade tem certa subjetividade que, algumas vezes, depende de um contexto ou experiência, mas que pode ser contestada numa outra situação ou por meio de um novo experimento.

Podemos afirmar que experiências de contato com procedimentos e métodos em demonstração são raros durante nossa formação. E mesmo alguns dos alunos que ingressam na universidade para cursar uma Licenciatura em Matemática, durante sua formação profissional, não têm disciplinas que contribuam para que se

[1] Doutor. UNESP – Câmpus de Ilha Solteira. balieiro@mat.feis.unesp.br

tenha um conhecimento necessário de métodos de demonstração para um aprofundamento dos conteúdos que fazem parte das disciplinas que compõem um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática.

Além disso, diversas pesquisas, como, por exemplo, Fennema e Leof (1992) e Thompson (1992) apontam que os professores de Matemática sabem pouco sobre a História e a Filosofia dessa ciência, e isso faz que tendam para uma visão absolutista e instrumental da Matemática, considerando-a como uma acumulação de fatos, regras, procedimentos e teoremas. Fennema e Leof (1992) apresentam vários exemplos que sugerem que o conhecimento e a cultura matemática do professor podem ter influência no seu estilo de ensino.

Nesta perspectiva, o objetivo do presente trabalho é discutir as concepções dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática sobre a demonstração em Matemática. Para isso, foi estabelecido um referencial teórico que possibilitou entender o raciocínio, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos para construí-la, tomando por base, inicialmente, as pesquisas de Nickerson (2010).

Referencial Teórico

Nickerson (2010) afirma que para compreender o raciocínio matemático de uma forma global, temos de entender, pelo menos da perspectiva de nossa cultura e de nosso tempo, sobre o raciocínio matemático, a natureza da demonstração matemática e os processos envolvidos em sua construção. Diante desses pressupostos, Nickerson estabelece e discute, não nesta ordem, algumas questões que respondidas poderão promover um conhecimento aprofundado sobre tais questões.

Dentre as questões discutidas por Nickerson, a primeira é: *Onde e quando surgiu a ideia de uma demonstração?*

Ao rememorar historicamente as conquistas matemáticas realizadas pelas antigas civilizações (egípcia, babilônica, chinesa e indiana) em distintos momentos históricos, pode-se conjecturar que a origem e a noção de demonstração surgiram com o desenvolvimento da Matemática dessas civilizações?

Na verdade, Joseph salienta que houve, por parte de alguns historiadores,

> um entusiasmo excessivo para tudo que é grego, decorrente da crença de que muito do que é desejável e digno de ser imitado na civilização Ocidental teve origem na Grécia antiga, (o que) levou a uma relutância em permitir que outras civilizações antigas participassem do patrimônio histórico das descobertas em Matemática. (Joseph, 2011, p. 177-178).

A maioria das histórias de Matemática tiveram uma excessiva influência em obras posteriores que foram escritas no século XIX e início do século XX. Durante esse período, dois acontecimentos contrastantes ocorreram e tiveram um impacto sobre o conteúdo e o equilíbrio desses livros, especialmente, produzidos na Inglaterra e nos Estados Unidos.

Excitantes descobertas de Matemática antiga em papiros no Egito e tabuletas de argila na Mesopotâmia empurram para trás as origens de registros matemáticos escritos por pelo menos 1.500 anos. Mas, uma influência muito mais forte e de compensação foi o culminar da dominação europeia na forma de controle político de vastas áreas da África e da Ásia.

Externo a essa dominação surgiu à ideologia da superioridade europeia que era permeada por uma ampla gama de atividades sociais e econômicas, com vestígios que podem ser encontrados na História da Ciência, que enfatizaram o papel único da Europa no fornecimento do solo e espírito para a descoberta científica.

As contribuições dos povos colonizados foram ignoradas ou desvalorizadas como parte da justificativa para a subjugação e dominação. E o desenvolvimento de Matemática anterior aos gregos – especialmente no Egito e na Mesopotâmia – sofreu um destino semelhante, rejeitado como de pouca importância para a história posterior do assunto. (Joseph, 2011, p. 4)

Recentes e aprofundadas pesquisas sobre a Matemática cultivada por esses povos mostram um desenvolvimento considerável de procedimentos, métodos e fórmulas aproximadas e exatas no estudo da aritmética, geometria, álgebra e astronomia.

Em especial, sobre a Matemática egípcia, Gillings, afirma que

> as conclusões das demonstrações não são realmente necessárias, apenas confirmadas. O rigor está implícito no método. Nós temos de aceitar a circunstância de que os egípcios não pensaram e raciocinaram como

> fizeram os gregos (...) e não é adequado ou apropriado que no século XX comparemos criticamente os seus métodos com os dos gregos ou qualquer outra nação emergente posterior, que, por assim dizer, estava sobre os seus ombros. (Gillings, 1982, p. 233-234).

A segunda pergunta: *O que constitui uma demonstração?*

Nickerson (2010) afirma que as demonstrações matemáticas são relativas de várias formas. Qualquer demonstração matemática existe dentro de algum sistema axiomático específico, já que a verdade que ela estabelece é relativa aos axiomas desse sistema. Isto quer dizer, que a demonstração de uma proposição ou teorema estabelece apenas sua veracidade, uma vez que os axiomas do sistema são selecionados, organizados e mantidos para serem verdadeiros.

Além disso, a História da Matemática mostra uma gama de exemplos de demonstrações que no transcorrer do desenvolvimento da Matemática, após um período de repouso, num tempo considerável, se mostraram insuficientes para uma geração ou várias gerações posteriores. Alguns desses exemplos clássicos, conforme Eves, em especial, encontram-se nos *Elementos* de Euclides.

Mesmo as demonstrações que são declaradas perfeitas diferem consideravelmente na sua capacidade de convencer, já que existem muitos teoremas (o teorema de Pitágoras, irracionalidade da $\sqrt{2}$, a infinidade dos números primos, teorema fundamental da aritmética, entre tantos outros) que foram demonstrados de várias maneiras diferentes.

O conceito de demonstração evolui e assinala que as mudanças na ideia do que constitui uma demonstração rigorosa têm gerado revoluções na Matemática. E, mesmo considerando períodos históricos da Matemática, o conceito de demonstração pode ter conotações díspares em contextos diferentes. Por fim, mesmo entre os matemáticos que concordam com as regras (estabelecidas pela comunidade matemática) que caracterizam uma demonstração, surgem controvérsias sobre a validade das demonstrações específicas.

A terceira pergunta: *O que os matemáticos querem dizer quando usam o termo demonstração?*

Segundo Rossi (2006), em seu trabalho diário, o matemático pode se utilizar do raciocínio indutivo para elaborar as suas hipóteses matemáticas, porém não é esse procedimento que ele emprega para demonstrar essas suposições, visto que, o método de raciocínio indutivo não garante a veracidade de sua conjectura.

Assim, para o matemático demonstrar suas proposições, ele utiliza o método de raciocínio dedutivo, num esquema estabelecido por estrutura axiomática incorporada à Matemática que começa com um conjunto de axiomas e definições que são explicitamente declarados e, em seguida, com base nesses axiomas e definições, os matemáticos fazem conjecturas (proposições ou teoremas) que podem ser demonstradas utilizando uma sequência de argumentos lógicos viabilizados pelas regras da Lógica que fornece, de modo convincente, a veracidade do resultado.

A quarta e quinta perguntas: *Como as demonstrações são construídas? Como se pode ter certeza de que uma demonstração proposta é válida?*

Para responder às interrogações formuladas acima, necessita-se recorrer à Filosofia da Matemática e à Lógica Matemática: a Filosofia da Matemática busca explicitar aspectos intrínsecos relacionados à demonstração matemática e as diversas correntes filosóficas procuram mostrar, dentre os diferentes enfoques epistemológicos e ontológicos, que as várias demonstrações que se apresentam nos múltiplos ramos da Matemática são capazes de fornecer um conhecimento global dessa ciência; a Lógica Matemática tem contribuído ao abordar esse tema, pois estuda e fornece explicações racionais de padrões axiomáticos utilizados pelos matemáticos na construção de uma teoria e, em especial, em formalizar e avaliar por meio de regras de inferências quando demonstrações em Matemática podem ser construídas e consideradas válidas no interior dessa área.

Nesta perspectiva, a construção de uma teoria matemática inicia-se com o estabelecimento de um sistema axiomático que comporta em sua constituição alguns elementos fundamentais: uma linguagem subjacente ao sistema axiomático; um sistema lógico; um vocabulário de palavras não definidas; um conjunto de proposições (axiomas) referente às palavras não definidas; e um conjunto de definições derivadas desse conjunto de palavras não definidas e desse conjunto de axiomas. Shoenfield (1967) afirma que, em sistemas formais, a Lógica Matemática é a estrutura sobre a qual as demonstrações rigorosas são edificadas.

A sexta pergunta: *Quem é qualificado para julgar a validade de uma demonstração?*

Ao se percorrer a História da Matemática, em diversos momentos, pode-se observar o surgimento de comunidades matemáticas inseridas em escolas filosóficas, academias antigas, museu, escolas monásticas, escolas catedráticas, escolas palatinas, universidades e academias de ciências.

De certo modo, essas comunidades matemáticas foram responsáveis pelo desenvolvimento e divulgação da Matemática e, também, em particular, a partir do século XIX, implicitamente, de definir, julgar e deliberar sobre a validade de uma demonstração. Outros aspectos importantes e presentes na formação da ciência Matemática foram: a estruturação, a organização e uma linguagem única em nível internacional professada pelas várias comunidades matemáticas.

Segundo Parshall em Robson e Stedall (2009), outros aspectos importantes à consolidação das comunidades matemáticas são a fundação em 1920, da União Internacional de Matemática (IMU), a internacionalização de periódicos especializados na difusão do conhecimento matemático, a institucionalização em 1897 do Congresso Internacional de Matemáticos, a premiação com a medalha Fields, em 1936, em reconhecimento ao(s) excelente(s) trabalho(s) matemático(s) desenvolvido(s), o estabelecimento de agendas de pesquisas para os vários ramos da Matemática e a consolidação de uma linguagem matemática em nível internacional.

Metodologia

Com o objetivo de compreender as concepções dos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática sobre demonstração foi aplicado um questionário para alunos que se inscreveram num minicurso da Semana de Matemática do Curso, realizado no início de 2016. Um total de 20 alunos respondeu ao questionário. Desse total, 5 alunos estavam matriculados no 4º ano, 2 alunos matriculados no 3º ano, 8 alunos no 2º ano e 5 no 1º ano do Curso. O Curso tem duração de 4 anos.

Nossa investigação é de natureza qualitativa, já que os questionários com perguntas abertas são considerados como documentos que constituem dados para esse tipo de pesquisa (Patton, 2002, p.4). Para a construção de nossa análise e discussão optamos pela análise de conteúdo (Moraes, 1999).

A primeira parte do questionário teve 4 questões abertas. Aqui apresentamos os resultados e análise das respostas dadas a essas questões.

Resultados

Em resposta a primeira questão “Onde e quando surgiu a demonstração em Matemática?”, dos 20 alunos que responderam ao questionário, 11 alunos responderam que consideram que a demonstração surgiu na Grécia (4 alunos do 4º ano e 7 alunos do 2º ano), 5 alunos não responderam à questão (1 aluno do 1º ano, 1 aluno do 2º ano, 2 alunos do 3º ano, 1 aluno do 4º ano). Um aluno do 1º ano respondeu que a demonstração surgiu a partir do momento em que o homem passou a fazer questionamentos, um aluno do 2º ano respondeu que surgiu quando se fez necessário o uso de demonstração e um aluno do 1º ano respondeu que acredita que a demonstração tenha surgido “há muito tempo atrás, em um período histórico muito antigo”. Um aluno deu uma resposta incompreensível à questão. Dentre os alunos que responderam que a demonstração surgiu na Grécia, 5 alunos responderam que a demonstração surgiu na Grécia antiga (3 alunos do 2º ano e 2 alunos do 4º ano), 3 alunos responderam que surgiu na Grécia em 300 a. C. (2 alunos do 2º ano e 1 aluno do 4º ano) e 3 alunos não souberam estimar um período (1 aluno do 1º ano, 1 aluno do 2º ano e 1 aluno do 4º ano). Vale registrar que o aluno do 4º ano que respondeu que a demonstração surgiu em 300 a. C. escreveu que a demonstração surgiu com a obra *Os Elementos* de Euclides. Dois dos alunos que responderam que a demonstração surgiu na Grécia antiga relacionaram seu surgimento também com o trabalho dos filósofos.

Para a segunda questão, “Em sua opinião, o que é considerado uma demonstração em Matemática varia em conformidade com o contexto social e o período histórico?”, 12 alunos afirmaram que sim (6 alunos do 2º ano, 3 do 4º ano, 2 do 1º e 1 aluno do 3º ano), 6 alunos afirmaram que não e 2 não souberam responder. Dentre os alunos que responderam “não”, 1 aluno era do primeiro ano do Curso, 3 alunos do segundo ano e 2 alunos do quarto ano.

Em reposta a terceira questão “O que é uma demonstração Matemática?”, 6 alunos (3 alunos do 1º ano, 1 aluno do 2º ano, 1 aluno do 3º ano e 1 aluno do 4º ano) responderam que a demonstração é a prova ou prova real de que um teorema é válido, 4 alunos (1 aluno do 1º ano, 2 alunos do 2º ano e 1 aluno do 4º ano) responderam que se baseia na lógica Matemática, 3 alunos (2 do 2º ano e 1 do 4º ano) responderam que as demonstrações são utilizadas para se explicar como se chegou em um dado resultado, 3 alunos (2 do 2º ano e 1 do 4º ano) responderam que a demonstração é um conjunto de argumentos para se chegar a uma tese inicia-se por uma hipótese, 1 aluno do 4º ano respondeu que são construídas valendo-se de técnicas e outras afirmações declaradas verdadeiras, 1 aluno do 2º ano que respondeu é construída com base em argumentos fortes da Matemática, 1 aluno do 1º ano respondeu que é uma conjectura e 1 aluno do 3º ano afirmou que a demonstração é uma hipótese que se mostra verdadeira.

Na quarta questão “Como se pode ter certeza de que uma demonstração é válida?”, 7 alunos (4 alunos do 2º ano e 3 alunos do 4º ano) responderam que uma demonstração é válida se não há nada que a contradiga ou quando não há um contraexemplo que contraponha o resultado, 4 alunos (1 aluno do 1º ano, 1 aluno do 2º ano, 1 aluno do 3º ano e 1 aluno do 4º ano) responderam que é válida se o que for empregado na demonstração é verdadeiro (ou se não for usado nada falso), 1 aluno do 1º ano respondeu que a demonstração é válida quando se chega no que se pretende provar, 1 aluno do 2º ano respondeu que ela é validada por outros profissionais da área (e se é encontrado em erro ou contraexemplo a demonstração é anulada), 1 aluno do 4º ano respondeu que é válida pela inferência lógica, 1 aluno do 1º ano respondeu que é válida quando se pode ter certeza e 5 alunos não responderam a questão.

Discussões

Em relação à primeira questão, notamos que, conforme apontado por Joseph (2011), para a maioria dos alunos, prevalece uma concepção de que a demonstração teve origem na Grécia Antiga. Podemos conjecturar que essa visão é formada ao longo dos anos do Ensino Básico, por meio de um currículo de Matemática que destaca as demonstrações de Teoremas de Geometria, em que os protagonistas são notórios nomes da cultura grega (Thales, Pitágoras, Platão, Herão entre outros). Na graduação essa visão é acentuada nas disciplinas que tratam da Geometria com uma ênfase ao modelo axiomático de Euclides. Nossa conjectura pode ser reforçada já que tanto alunos do 2º ano (7 alunos) quanto alunos do 4º ano (4 alunos) apresentam a mesma concepção.

Na segunda questão, a maioria dos alunos concorda que o que é considerado uma demonstração varia conforme o contexto social e o período histórico. De fato, como assinalamos no referencial teórico, o conceito de demonstração, no decorrer da História da Matemática, sofreu mudanças e evoluiu, assumindo distintas conotações em contextos diferentes. Novamente, nessa questão, não há uma tendência de resposta de acordo com o número de anos de graduação.

As respostas dadas a terceira questão foram variadas, mas podemos afirmar que os alunos não têm uma compreensão clara do que é uma demonstração.

Sobre a quarta questão, é consenso entre os alunos que a validade da demonstração está relacionada à tese que se deseja provar, ou seja, a maioria dos alunos entende que uma demonstração é válida quando não há um contraexemplo que contradiga o resultado (tese). Os alunos entendem que se não há um contraexemplo para uma dada tese, então ela é verdadeira e esse fato valida a demonstração de tal tese. As respostas obtidas para essa questão reforçam a conjectura de que os alunos têm uma visão equivocada e imprecisa do que seja uma demonstração.

Por fim, apontamos que conhecer vários tipos de demonstrações aceitáveis (não standard), pode contribuir para que o futuro professor tenha uma visão ampla sobre as diferentes formas de compreensão e habilidades de seus alunos em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática. E, além disso, é necessário que haja uma discussão com os alunos, em uma disciplina específica ou no interior de disciplinas, sobre os aspectos lógicos e filosóficos que estão envolvidos na demonstração em Matemática.

Referências Bibliográficas

Fennema, E.; Loef, M. Teacher's knowledge and its impact. Em D. A. Grouws (ed.), **Handbook of research in mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992.

Gillings, R. J. **Mathematics in the time of the Pharaohs**. New York: Dover, 1982.

Joseph, G. G. **The crest of the peacock: non-European roots of mathematics**. New Jersey: Princeton University Press, 2011.

Nickerson, R. S. Moraes, R. Análise de Conteúdo. Em **Revista Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

Mathematical reasoning: patterns, problems, conjectures, and proofs. New York: Psychology Press, Taylor & Francis Group, 2010.

Parshall, K. H. The Internationalization of mathematics in a world of nations. In E. Robson & J. Stedall (Ed.). **The Oxford of the History of Mathematics** (pp. 85-104). New York: Oxford University Press, 2009.

Patton, M. Q. **Qualitative research and evaluation methods**. Thousand Oaks: Sage, 2002.

Rossi, R. J. **Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006.

Shoenfield, J. R. **Mathematical Logical**. Reading: Addison-Wesley, 1967.

Thompson, A. G. Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Em D. A. Grouws (ed.), **Handbook of research in mathematics teaching and learning**. New York: Macmillan, 1992.