



## VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA

ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil.

04, 05, 06 e 07 de outubro de 2017

### ENSINO DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS COM O SOFTWARE MAPLE

Amanda Cristina Siqueira<sup>1</sup>

Rafael Zanovelo Perin<sup>2</sup>

#### Educação Matemática no Ensino Superior

**Resumo:** Visto que as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral estão presentes em grande parte dos cursos de Ciências Exatas, e servem como ferramentas para a análise de modelos e desenvolvimento de padrões de eficiência, os bolsistas do Grupo PET Matemática, do IFRS-BG, estruturaram um minicurso intitulado “Ensino de Cálculo de várias variáveis com o *software* Maple”, a fim de abordar alguns conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral de várias variáveis, a partir de funções específicas disponíveis no *software* Maple, visto que o mesmo possui funções específicas sobre esses conteúdos. A proposta também tinha o intuito de amenizar o alto índice de reprovação nessas disciplinas, associando os métodos de resolução analíticos com a visualização geométrica dos problemas abordados, buscando contribuir e complementar os estudos desenvolvidos nas disciplinas. Essa ação foi ofertada aos licenciandos em Matemática e em Física do Campus, e estruturou-se em cinco encontros, totalizando vinte horas. Nos encontros foram abordados os comandos básicos do *software*, algumas construções gráficas tridimensionais, os comandos específicos de conceitos de cálculo e conceituou-se os processos de diferenciação e integração de funções de duas ou mais variáveis.

**Palavras Chaves:** Ensino de Cálculo de várias variáveis. Maple. Visualizações tridimensionais.

#### INTRODUÇÃO

As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral estão presentes em grande parte dos cursos de Ciências Exatas, e, segundo Lopes (1999) desenvolvem a “[...] análise sistemática de modelos, e [...] padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico.” (p. 125). Mas a compreensão desses métodos depende de inúmeros conceitos matemáticos que deveriam ter sido construídos no decorrer da vida escolar e acadêmica.

O mesmo autor exemplifica essas “dependências conceituais” na seguinte questão: “Você começa a aprender Matemática no primeiro ano de escola. Se você não sabe dividir, não vai saber o que é uma taxa, se você não sabe o que é uma taxa não vai saber o que é uma derivada e assim por diante” (p. 125).

---

<sup>1</sup> Licencianda em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Bento Gonçalves. amandac.siqueira.01@gmail.com

<sup>2</sup> Licenciando em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Bento Gonçalves. rafael-perin@hotmail.com

Pesquisas como a de Barufi (1999) e Lopes (1999), salientam um alto índice de reprovação nessas disciplinas, e percebe-se que muitos casos são decorrentes da falta de domínio do pensamento matemático avançado e de erros na compreensão, assimilação e desenvolvimento de conceitos. Tall (1991) afirma que “[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições” (p.20).

Partindo desse pressuposto, consideramos que a utilização de novas metodologias reflete diretamente no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) complementam que “[...] os elementos tecnológicos estão cada vez mais presentes nas diferentes atividades da população. O uso desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática [...]” (BRASIL, 1998, p. 43).

Se optarmos pela utilização desses recursos, devemos compreender que essa escolha “[...] deve ser coerente com um novo modo de agir do professor, favorecendo a criação de um ambiente criativo em que a sua ação mediadora possa ser eficientemente exercida” (GARCIA e LINS, 2008, p. 250).

No que se refere aos conceitos vistos nas disciplinas de Cálculo, percebe-se uma grande dificuldade na interpretação dos problemas de integração e diferenciação de funções de duas ou mais variáveis, principalmente na visualização tridimensional e na interpretação dos limites de integração, que dependem diretamente da visualização 3D. Portanto, torna-se indispensável associar as curvas a uma superfície reconhecendo os parâmetros de variação nos três eixos coordenados.

A representação gráfica de uma superfície pode ser um processo complicado se dependermos apenas de construções com régua e compasso, visto que a falta de profundidade e má escala podem representar uma superfície deformada em relação a sua função. Com isso, acreditamos que a utilização de *softwares* pode ser uma alternativa para a *plotagem*<sup>3</sup> de gráficos e a interpretação de parâmetros. Nesse contexto, optamos por utilizar durante a atividade proposta, o *software* Maple, que se caracteriza em um ambiente de computação algébrica, não livre, com uma interface

---

<sup>3</sup> Termo utilizado para a construção de gráficos.

acessível, que permite analisar, explorar, visualizar e resolver problemas matemáticos. (MAPLESOLFT).

Essa ferramenta diferencia-se das demais pelo ótimo desempenho no processamento de dados, e por definir-se como um *software* de computação algébrica (CAS<sup>4</sup>), que permite manipulações e construções a partir de pacotes de funções específicos, como por exemplo, os pacotes *student*, *plots*, *plottools*, que possuem funções específicas para a resolução de derivadas e integrais, para a plotagem de gráficos em duas ou três dimensões,... Nesses pacotes, o Maple dispõe de “subpacotes” que carregam funções específicas de determinados conteúdos. No que se refere ao Cálculo de uma variável, o comando (*Student[Calculus1]*) apresenta *applets* interativos para a abordagem dos conceitos de antiderivada, aproximação de áreas pela Soma de Riemann, análise de curvas a partir das suas inflexões, declividades e zeros, dentre outros.

E ainda, para o Cálculo de várias variáveis, o Maple dispõe do subpacote (*Student[MultivariateCalculus]*) que auxilia na visualização tridimensional de seções transversais de superfícies em *applets* interativos, na determinação geométrica de vetores gradientes, na análise de pontos críticos de uma função, na resolução analítica e geométrica de derivadas direcionais,...

## **METODOLOGIA**

No que se refere à pesquisa, optamos pela utilização do *software* em questão, para explorar as inúmeras funções específicas que o mesmo dispõe, visando manipulações algébricas, visualizações geométricas de superfícies, determinação de derivadas parciais, direcionais, implícitas, assim como definições e visualizações de vetores gradientes e métodos de integração de duas ou mais variáveis.

Essas funções foram abordadas em um minicurso desenvolvido pelo Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – Campus Bento Gonçalves (IFRS-BG), com o intuito de auxiliar os licenciandos em Física e Matemática da mesma instituição na visualização de superfícies e na compreensão dos conceitos desenvolvidos.

A ação foi estruturada em quatro encontros presenciais aos sábados de manhã, com duração de quatro horas cada, e um encontro à distância, totalizando uma carga

---

<sup>4</sup> Computer algebra system.

horária de 20 horas. Durante a atividade, os bolsistas envolvidos apresentam os conceitos de diferenciação e integração e suas interpretações geométricas, além de mostrar as potencialidades do software Maple, como por exemplo, as funções específicas de construções de gráficos bidimensionais e tridimensionais disponíveis no pacote *with(plots)*.

Para a utilização dos comandos disponíveis no *software*, considerou-se imprescindível a conceituação dos processos de integração e diferenciação e as suas devidas resoluções algébricas, para contextualizar as construções geométricas.

No primeiro encontro, foram apresentadas as funções básicas do Maple, como por exemplo, operadores, funções pré-definidas, representações decimais, comandos de pacotes de funções e janelas gráficas disponíveis. Também se discutiu sobre definições de funções de várias variáveis, gráficos de funções implícitas e explícitas e quais seus comandos respectivos. Na sequência, definiram-se algebricamente curvas de nível (ou mapa de contornos) de uma função e qual seria o tutorial do Maple que representaria essa estrutura. E ao final do encontro, mostrou-se a representação geométrica de derivadas parciais e qual seus métodos algébricos de resolução.

No segundo momento, o conteúdo de derivação direcional foi associado ao conceito de derivadas parciais, e discutiu-se sobre o processo de normalização de um vetor e qual sua função disponível no Maple. Demonstrou-se a construção de uma superfície e a representação geométrica de uma derivada direcional a partir de um ponto no plano cartesiano e de um vetor dado. Essa atividade foi desenvolvida no tutorial do *software* a partir do comando *DirectionalDerivative*. Após cada conceituação e demonstração geométrica, eram dispostos alguns exercícios referentes aos conteúdos para mostrar aos participantes que o a ferramenta computacional pode auxiliar positivamente na resolução e interpretação dos problemas. Na sequência, foram desenvolvidos os conceitos de derivação implícita, vetor gradiente, campo de vetores e determinação de pontos críticos de uma função, sendo máximos, mínimos ou pontos de inflexão (sela) locais. Todos esses conceitos eram associados a tutoriais ou funções do *software* disponíveis no subpacote *with (Student [MultivariateCalculus])*.

No terceiro encontro, estimou-se a aproximação de um volume genérico entre uma curva e o plano  $z=0$  a partir da *Soma dupla de Riemann*, onde as subdivisões deste sólido representam paralelepípedos que “preenchem” este espaço entre a superfície e o plano. O Maple dispõe do comando *ApproximateIntTutor*, que permite a

representação geométrica dessa aproximação e determina um valor estimado, referente ao volume dos paralelepípedos e um valor real, resultante do processo de integração dupla definida. A partir da noção introdutória do problema do volume, demonstrou-se algebricamente a resolução de uma integral dupla e qual a função disponível no Maple que poderia auxiliar nesse processo. Na sequência, mostramos que o método de resolução de integrais duplas não se restringe apenas a regiões retangulares, e que os limites de integração podem representar curvas que delimitam paralelamente aos eixos coordenados, à região de integração.

No quarto encontro, abordaram-se problemas de volume que recaiam em resoluções algébricas mais complexas, e a partir das dificuldades encontradas, introduziu-se o conceito de transformação de coordenadas, visando simplificar a resolução dos problemas. Na sequência, conceituou-se as coordenadas polares, as relações necessárias para a mudança de coordenadas, a relação entre raio ( $r$ ) e ângulo ( $\theta$ ), o fator de integração, o sistema de coordenadas a partir do comando *Polarplot* e as substituições necessárias para o cálculo de volume. Em seguida explanou-se alguns tópicos da atividade à distância, esclarecendo a utilização de alguns comandos, visto que a mesma foi estruturada a ser desenvolvida no *software* Maple .

## CONSIDERAÇÕES

A realização da proposta do Grupo PET, intitulada “Cálculo de várias variáveis com o *software* Maple”, permitiu que os bolsistas complementassem seus conhecimentos a cerca dos conteúdos abordados e refletissem sobre sua prática pedagógica, visto que saber o conteúdo não é condição necessária para o exercício da docência (Freire, 1996). Assim, a partir da realização do minicurso, percebe-se que a junção entre pesquisa e extensão permite a construção do conhecimento, e que o professor aprende sobre sua prática atuando na profissão (Goulart, 2004).

Na proposta, estudamos metodologias a serem adotadas, para que os conteúdos abordados na ação complementassem os conceitos vistos nas disciplinas de Cálculo. Dessa forma, os participantes tiveram a possibilidade de aprimorar seus conhecimentos e desenvolver novas perspectivas. Entretanto, adotou-se o uso do *software* Maple, o qual possui grandes possibilidades na manipulação algébrica (como por exemplo, fatorações, simplificações, resoluções de sistemas, determinação de

derivadas – a partir das propriedades aplicadas) e na visualização geométrica, seja ela bidimensional ou tridimensional.

No que diz respeito à contribuição da atividade para a formação dos bolsistas envolvidos, percebemos que a mudança da condição de aluno para ministrante exige dos mesmos um enfoque maior quanto às definições e compreensões do comportamento de funções. Também, torna-se necessário, estudar além da ementa das disciplinas de Cálculo, visto que a abordagem dada nas aulas possui algumas restrições, como os recursos disponíveis e carga horária. Assim, um minicurso extracurricular – desenvolvido em um laboratório de informática – pode complementar ou suprir lacunas deixadas no componente curricular.

Atividades de pesquisa e extensão, como as realizadas nos Grupos PET, acrescem tanto a formação dos ministrantes, quanto a formação dos participantes. Essas ações complementares a grade curricular são ofertadas a comunidade escolar, com o intuito de desenvolver uma formação integral dos licenciandos. Portanto, torna-se necessário avaliar o minicurso desenvolvido para planejar futuras ações, visto que as mesmas contribuem para a instituição.

Conforme as avaliações, o Participante A<sup>5</sup> afirmou que

*O curso foi bem proveitoso, apesar de conter conteúdos que seriam vistos mais adiante, os mesmos foram explicados de maneira objetiva e clara. Um ponto que respondeu positivamente às minhas expectativas foi à parte de verificação dos resultados das derivadas parciais pelo aplicativo. Assim como a parte de visualização dos gráficos em 3D que é algo complexo de se desenhar e imaginar. Em suma: gostei do curso, faria outros se possível.*

A partir de relatos como este, percebe-se a importância da organização e execução de minicursos que acrescem a formação dos alunos envolvidos e possibilitam um novo viés ao estudo do Cálculo Diferencial e Integral. Nessa ação, priorizou-se a definição de alguns conteúdos que ainda não foram vistos na disciplina de cálculo, o que se mostrou eficaz, segundo a avaliação dos participantes. A noção introdutória de conceitos do Cálculo de várias variáveis possibilita a compreensão de fenômenos físicos vistos em cadeiras dos cursos de Matemática e Física. Destacamos também, a importância da utilização do *software* no andamento das aulas, pois essa ferramenta auxiliou na visualização tridimensional de superfícies e na compreensão

---

<sup>5</sup>Para citar os participantes do minicurso, utilizou-se de nomes fictícios para referir-se aos mesmos.

de alguns conceitos do cálculo vetorial, como por exemplo, o campo de direções, as derivadas direcionais, o vetor gradiente,...

Segundo o Participante B,

*O minicurso tem uma proposta chave para os cursos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física, a ferramenta é versátil para todos os semestres. Quanto aos ministrantes, o domínio do conteúdo é claro e as ferramentas são utilizadas com clareza. O sistema de um ministrante acompanhando os alunos de perto demonstra a preocupação com o real aprendizado. A carga horária não se torna cansativa, mesmo que alguns conteúdos não foram vistos por alguns alunos, o foco se mantém nas ferramentas do software.*

Com estes apontamentos, reforça-se a importância da utilização do *software* aliada a teoria, pois além de desenvolver passo a passo alguns cálculos “trabalhosos”, ele apresenta-se como um recurso tecnológico que pode auxiliar os licenciandos ao longo de seus cursos. Entretanto, destacamos a importância da ação, visto que o curso de Licenciatura em Física não possui nenhuma disciplina na sua grade curricular que aborda esses recursos tecnológicos e suas potencialidades no estudo de Cálculo.

Enquanto isso, o curso de Licenciatura em Matemática, possui três disciplinas que utilizam esses recursos, mas mesmo assim estas ações são ofertadas a este público, pois complementam os conhecimentos destes alunos. O Participante C reforça essa ideia na seguinte afirmação: “Eu havia utilizado pouco do *software* Maple antes do minicurso. Como um todo, o minicurso me deu mais autonomia com o Maple”.

No que se refere à execução de outras atividades deste gênero, o Participante B complementa que “é interessante que o minicurso tenha tradição no campus, pois a ferramenta é essencial para nosso ambiente de trabalho e aprendizado”. Nesse sentido, avaliamos que a proposta do minicurso de “Cálculo de várias variáveis com o *software* Maple” deve ser repensada e planejada pelo Grupo PET para próximos anos, o que reforça a importância do fomento ao ensino, pesquisa e extensão nas instituições de ensino.

## REFERÊNCIAS

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. 1999.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental – Terceiro e Quarto Ciclos – Matemática**. Ministério da Educação: Brasília, 1998. Disponível em: <[www.portal.mec.gov.br](http://www.portal.mec.gov.br)>. Acesso em 12 de maio de 2017.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

GARCIA, L.A, LINS, V.S. **As Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores no Ensino de Ciências**. Cadernos do Aplicação, Porto Alegre, v. 21, n. 2, jan./jun. 2008.

LOPES, A. **Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS**. Matemática Universitária, nº 26/27 – junho/dezembro 1999 – p.123-146.

MAPLESOFT. Disponível em: <[www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com)>, acessado em 13 de maio de 2017.

SOARES, E. S.; GOULART, M. I. M. **Aulas compartilhadas em formação de licenciandos em matemática**. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v13n38/09.pdf>>, acessado em 31 de maio de 2017.

TALL, D. **AdvancedMathematicalThinking**. Dordrecht, KluwerAcademicPubl. 1991.