# CONHECIMENTOS ESPECIALIZADOS PARA ENSINAR ADIÇÃO DE FRAÇÕES E COMO SE RELACIONAM: UM CASO SOBRE ERROS COMUNS DE ESTUDANTES, SUAS FONTES E MODOS DE SUPERÁ-LOS

**Jeferson Gomes Moriel Junior**[1]

**Glauco Cauê Yamamoto Moral**[2]

## Formação de Professores que Ensinam Matemática

**Resumo**: O objetivo deste artigo é caracterizar conhecimentos especializados sobre erros comuns de estudantes ao lidarem com adição de frações, possíveis fontes e modos de superá-los mobilizados por um licenciando em Matemática, bem como, descrever o modo como se relacionam entre si e entre os domínios matemático e didático. Utilizamos o marco teórico *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) e a análise de conteúdo da entrevista com o sujeito, cujos elementos de informações foram comparados sistematicamente com as definições dos subdomínios do MTSK. Os resultados expressam uma importante rede de conhecimentos que um professor pode ter que conectar visando planejar ou realizar sua atividade docente. Concluímos que o MTSK possibilitou a exploração analítica profunda de conhecimento especializado para ensinar matemática e que não há mais espaço para conceber a profissão docente com base em ideias fundadas no senso comum, como vocação, dom ou mesmo na crença em algum tipo de notório saber para ensinar.

**Palavras Chaves**: Conhecimento Especializado para Ensinar Matemática. MTSK. Adição de Frações.

## INTRODUÇÃO[3]

Uma das acepções para *conhecimento* é o "domínio, teórico ou prático, de uma arte, uma ciência, uma técnica" (HOUAISS, 2009), enquanto *especializado* significa algo "próprio, exclusivo para" (HOUAISS, 2009). Neste sentido, pensar em conhecimento especializado de professores de matemática nos remete ao domínio daquilo que é exclusivo e próprio do profissional que deve para ensinar matemática, o professor. Esta ideia pode ser aprimorada a partir da literatura específica (CARRILLO et al., 2014; SCHOENFELD, 2010) e mais precisamente entendida como a informação que um professor de matemática possui para resolver problemas, atingir metas ou desenvolver qualquer tarefa de ensinar e fazer aprender

---

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática (UFMT/ REAMEC), Professor no Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT, Cuiabá e pesquisador orientador no Programa de Pós-graduação em Ensino (PPGEn). Email: jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br

[2] Mestrando do Programa de Pós Graduação em Ensino (PPGEn) do Instituto Federal de Mato Grosso (IFMT) em Cuiabá, MT, Brasil, Professor da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso. Email: glauco.moral@hotmail.com

[3] Estudo fomentado pelo IFMT (Resolução 10/2015) e pela FAPEMAT (Edital Universal 42/2016), vinculado ao projeto "Conhecimento especializado para ensinar matemática"

matemática. Neste sentido, nos questionamos: qual é o conhecimento que um professor necessita para ensinar matemática? E qual é o conhecimento necessário para ensinar e fazer aprender divisão ou adição de frações, sabendo que são temas com baixos índices de aprendizagem no Brasil (INEP, 2014)?

O objetivo deste artigo é caracterizar conhecimentos especializados sobre erros comuns de estudantes ao lidarem com a divisão de frações, suas possíveis fontes e modos de superá-los mobilizados por um licenciando em Matemática, bem como, descrever o modo como se relacionam entre si e entre os domínios matemático e didático. Para atingir nosso objetivo, utilizamos o marco teórico *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) apresentado a seguir.

## *MATHEMATICS TEACHER'S SPECIALIZED KNOWLEDGE (MTSK)*

O MTSK é um modelo teórico que caracteriza o conhecimento profissional específico e especializado que possui (ou deve possuir) um professor para ensinar matemática (CARRILLO et al., 2014). Este modelo é constituído por dois domínios – *Conhecimento matemático* (MK) e *Conhecimento didático do conteúdo* (PCK) –, estando cada um deles dividido em três subdomínios (Fig. 1). No centro do modelo estão as crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, as quais permeiam os subdomínios, pois elas dão sentido às suas ações.

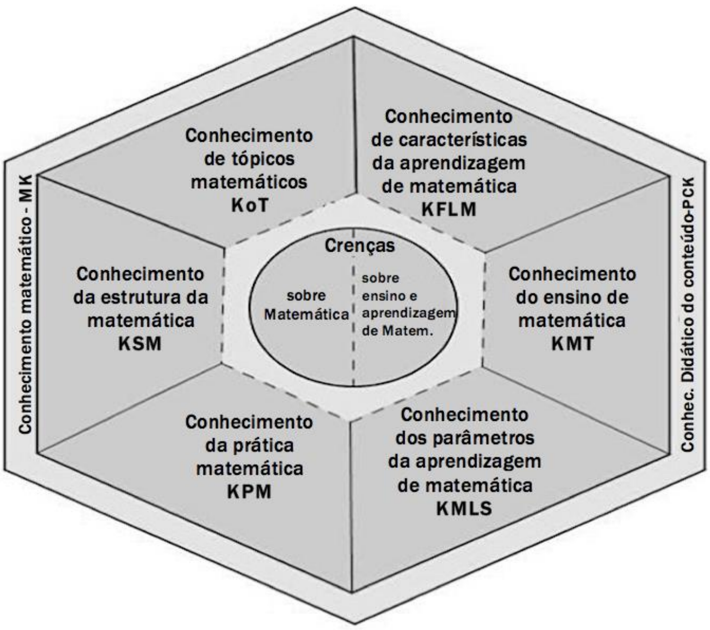



Figura 1. Domínios e subdomínios do MTSK (CARRILLO et al., 2014, p. 1, tradução nossa).

Detalhamos a seguir os seis subdomínios contemplados no MTSK (CARRILLO et al., 2014; CARRILLO; CONTRERAS; MONTES, 2015; ESCUDERO, 2015; FLORES, 2015), iniciando pelo domínio do Conhecimento Matemático (MK). O *conhecimento dos tópicos* (KoT) trata dos conteúdos matemáticos a serem ensinados e sua fundamentação conceitual profunda, englobando definições, interpretações e propriedades de conceitos, uma ou mais demonstrações de um tópico específico, justificativas para procedimentos algorítmicos, exemplos e contraexemplos, modelos realísticos, situações de aplicação e usos extra matemáticos. O *conhecimento da estrutura matemática* (KSM) inclui conexões entre tópicos (avançados e elementares, prévios e futuros, de diferentes áreas matemáticas, exceto as de fundamentação previstas em KoT) que permitem reconhecer certas estruturas da Matemática, bem como, vê-la como um sistema de elementos integrados. O terceiro de seus subdomínios é o *conhecimento da prática matemática* (KPM), no qual estão as maneiras de proceder em Matemática, incluindo modos de criar ou produzir na área (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, elementos que estruturam uma demonstração, modos de definir e usar definições, de selecionar representações, de argumentar, de generalizar, explorar ou modelar em matemática, conhecimento útil para avaliar a correção de argumentações e resoluções criadas pelos estudantes.

Quanto aos subdomínios do Conhecimento didático do conteúdo (PCK), há o *conhecimento do ensino de matemática* (KMT) que diz respeito a materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e suas respectivas características (limitações/potencialidades existentes em si mesmos) que permitam ao professor optar por uma estratégia para ensinar determinado conteúdo (incluindo organizar uma série de exemplos ou criar analogias e metáforas). Por exemplo, conhecer a estratégia de ensinar frações utilizando uma figura geométrica (circular ou retangular, por exemplo) ou um modelo (como pizzas ou chocolates) e saber que isto é (mais) adequado para desenvolver a interpretação parte-todo. Também inclui o conhecimento (formal ou informal) de elementos teóricos sobre o ensino de Matemática, por exemplo, sobre a resolução de problemas. Também há o *conhecimento das características de aprendizagem de Matemática* (KFLM) que inclui como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos (modelos e teorias formais ou informais), as características desse processo de compreensão, erros comuns e suas fontes prováveis, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos aprendizes ao lidar com cada conceito. Por exemplo, conhecer a teoria APOS (ARNON et al., 2014) para descrever como ocorre o desenvolvimento cognitivo de um estudante em aprendizagem Matemática. Por fim, está o *conhecimento das normas da aprendizagem de Matemática* (KMLS) que se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemático nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, materiais convencionais de apoio, objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos.

Os subdomínios do modelo descrevem como compreender o conhecimento especializado de um professor de matemática e serão utilizados como categorias na análise do episódio de um Licenciando sobre erros comuns de estudantes ao lidarem com adição de frações, cuja metodologia apresentamos a seguir.

## METODOLOGIA

Visando atingir o objetivo de caracterizar conhecimentos especializados relacionados a erros comuns de estudantes com adição de frações, suas possíveis fontes e modos de superá-los realizamos um estudo de caso qualitativo, com enfoque analítico-interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1991).

O contexto da pesquisa é o conjunto de atividades formativas desenvolvido pelo primeiro autor deste trabalho entre 2013 e 2014 para professores das escolas e licenciandos envolvidos no Projeto Observatório da Educação (OBEDUC) em Cuiabá, Mato Grosso (financiado pela CAPES/INEP/SECADI e desenvolvido em parceria entre UNESP - Bauru, UNEMAT - Cáceres e UFMT - Cuiabá). Foram realizadas oficinas para a exploração, mobilização e construção de conhecimento especializado para ensinar matemática cuja temática era a seguinte situação de prática: como explicar para um aluno por que na divisão de frações multiplica-se o numerador pelo inverso do denominador? Em seguida foram realizadas entrevistas (gravadas em áudio, registradas em imagem e posteriormente transcritas) com alguns sujeitos visando aprofundar a compreensão dos conhecimentos especializados por eles mobilizados.

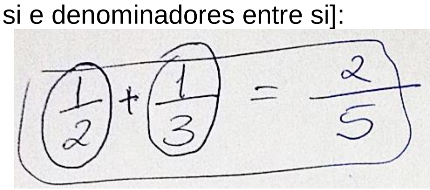
Dentre os 54 participantes das oficinas, quatro foram selecionados para realizarmos uma investigação para caracterizar o conhecimento especializado para ensinar divisão de frações (MORIEL JUNIOR, 2014). Neste artigo trataremos de um episódio da entrevista com um dos participantes. Trata-se do episódio que teve como tema os erros comuns que estudantes comentem ao lidarem com a adição de frações, suas possíveis fontes e modos de ajudar a superá-los. O sujeito foi um Licenciando em matemática que já havia participado do Projeto OBEDUC, estava nas etapas finais do curso de graduação e tinha dois anos e meio de experiência com ensino em escolas da educação básica, tendo neste período trabalhado com o conteúdo de frações e operações com frações nos níveis de ensino fundamental e médio. A condução da entrevista utilizou etapas e procedimentos de entrevista reflexiva (SZYMANSKI; ALMEIDA; PRADINI, 2011).

Para a análise dos dados para caracterização dos conhecimentos mobilizados pelo sujeito utilizamos a técnica de análise de conteúdo (KRIPPENDORFF, 1990) dos trechos transcritos a partir da entrevista, cujos elementos de informações resultantes foram comparados sistematicamente com as definições dos subdomínios do MTSK possibilitando explorar analiticamente tais conhecimentos, caracterizá-los e descrever como se relacionam entre si. A seguir apresentamos os resultados obtidos e discutimos segundo os aportes teóricos adotados.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao ser questionado sobre os erros comuns que estudantes com os quais ele trabalhara cometiam quando lidaram com a divisão de frações, ele curiosamente menciona um ligado a outra operação, a adição:

> **Pesquisador:** Eu queria que você dissesse erros que os estudantes cometiam quando estavam lidando com divisão de frações.
> **Licenciando:** O primeiro erro notório quando você manda ele [o aluno] fazer a soma é aparecer exatamente isso aqui [se referindo a somar numeradores entre si e denominadores entre si]:




O trecho apresentado mostra que o Licenciando menciona o erro de somar numeradores e denominadores entre si para realizar a adição de frações. Com isto fica evidente um conhecimento pertencente ao subdomínio KFLM e que inclusive é validado pela literatura (ASHLOCK, 2006; LOPES, 2008). Na continuação, o futuro professor manifesta conhecer duas possíveis fontes de tal erro (pertencentes ao KFLM), as quais também estão em consonância com a literatura, a saber: (i) o estudante se basear no procedimento da multiplicação de frações (ASHLOCK, 2006); (ii) usar conhecimento das operações já conhecidas para números inteiros e estender equivocadamente às frações (vistas como um número inteiro em cima do outro) (BERTONI, 2008):

> **Pesquisador:** Saberia dizer uma possível fonte desse erro?
> **Licenciando:** [...] a possível fonte desse erro é a simplificação da regra [...], ou seja, eles querem simplificar ao máximo, vamos colocar a regra da multiplicação valendo pra tudo.
> Ele ia pensar que isso aqui é um número natural [aponta e circula o ½]:
>
> $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$$
>
> Ele ia ter isso na cabeça. Ele não conhece o racional. Ele só conhece o 2, o 3, o 4, o 5. E o professor ensinou somar o 2, o 3, o 4, o 5. Na cabeça dele ele não conhece esse universo. [...] Ele está vendo dois números naturais, só que ele não tem a consciência que esse número é um número racional. Ele tá vendo um número natural em cima do outro.

Em seguida, o Licenciando espontaneamente explica que para fazer o estudante superar tal erro ele utiliza a própria estratégia procedimental do aprendiz para mostrar a inadequação do mesmo, deste modo:

> **Licenciando:** Eu começo a fazer eles refletirem sobre o assunto desse jeito aqui. Já que isso vale [somar em cima e embaixo], então peço ao aluno que faça essa conta aqui: meio menos meio. [E escreve a expressão:]
>
> $$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0}$$
>
> [Em seguida questiona:] Mas isso aí tá certo? Na matemática isso pode? Tenho zero pra dividir por zero? Tenho nada pra dividir por nada? [Espera que o aluno diga:] É mesmo, o professor falou que não pode. Então eu digo que se isso [a regra errada] não vale pra isso [meio menos meio], então [a regra errada] não vale pra isso [soma de frações]. Já começa fazer o aluno refletir sobre isso aí. Então você concorda que esse jeito está errado? Está! Então vamos aprender o certo. Aí começa. Eu uso essa estratégia para ele perceber que ele fez uma coisa absurda de erro.

O modo proposto pelo Licenciando para ajudar os estudantes a superarem o erro procedimental se baseia na ideia de que se existe um único caso em que tal procedimento não funciona, então ele é inadequado. Trata-se de uma explicação instrucional que visa instruir ou ajudar o aluno que consiste na apresentação de um contraexemplo útil para mostrar que o procedimento do aluno falha $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0}\right)$ com a finalidade de desencorajá-lo a usar a regra incorreta e buscar uma adequada, pertencente ao conhecimento do ensino de matemática (KMT). Tal explicação se sustenta numa argumentação estritamente lógico-matemática e exige conhecimento para compreender o procedimento utilizado pelo aluno e, principalmente, das formas de validação e generalização para avaliar a (in)correção do mesmo, algo contemplado no KPM. Também envolve conhecimento do significado de fração como uma operação de divisão ($\frac{0}{0}$ é 0 dividido por 0) e sobre quando não se pode realizar o procedimento de divisão (não se pode dividir um número por zero). Ao usar o caso $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0}$ para mostrar que o procedimento do aluno não é adequado por fornecer um resultado "incorreto" ($\frac{0}{0}$), fica subentendido que tal abordagem funciona com alunos que já sabem que $\frac{0}{0}$ é indeterminado, o que nos dá indício de conhecimento do nível de desenvolvimento conceitual esperado para este nível educativo (KMLS).

Tabela 1. Conhecimentos especializados mobilizados pelo Licenciando sobre erros comuns de estudantes com adição de frações, fontes possíveis e modos de superá-los.

| **Conhecimento mobilizado (na ordem em que identificamos)** | **Subdomínio MTSK** |
|---|---|
| 1. Erro comum de estudantes ao iniciarem o processo de aprendizagem de adição de frações: somar numeradores e denominadores entre si $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ (ASHLOCK, 2006; LOPES, 2008). | KFLM |
| 2. Fontes possíveis do erro anterior: (i) o estudante se basear no procedimento da multiplicação de frações (ASHLOCK, 2006); (ii) usar conhecimento das operações já conhecidas para números inteiros e estender às frações (vistas como um número inteiro em cima do outro) (BERTONI, 2008). | KFLM |
| 3. O algoritmo da multiplicação de frações: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$. | KoT |
| 4. O algoritmo da multiplicação não pode ser estendido para a adição de frações. | KoT |
| 5. Uma explicação instrucional para ajudar o estudante a superar o erro em questão que consiste na apresentação de um contraexemplo útil para mostrar que o procedimento do aluno falha $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{0}{0}\right)$ visando desencorajar o uso da regra incorreta e buscar uma adequada. | KMT |
| 6. Formas de validação e generalização do procedimento utilizado pelo aluno para avaliar a (in)correção do mesmo: se existe um único caso em que ela não funciona então seu procedimento é inadequado (similar à demonstração por redução ao absurdo). | KPM |
| 7. O significado de fração como uma operação de divisão: $\frac{0}{0}$ é 0 dividido por 0. | KoT |
| 8. Quando não se pode realizar o procedimento de divisão: não se pode dividir um número por zero. | KoT |

| | |
|---|---|
| 9. Que o aluno conheça a indeterminação $\frac{0}{0}$ para compreender a explicação instrucional sobre a subtração de frações. | KMLS |

**Fonte**: Produção do próprio autor.

É importante ter claro que a argumentação estritamente matemática apresentada pelo Licenciando pode não ser suficiente ou, mesmo, gerar outra dúvida: por que não se pode dividir por zero? Responder a este por que exige do professor, dentre outras coisas, conhecimento da definição de divisão de inteiros ou ainda conexões entre conceitos matemáticos elementares – divisão de números e potenciação – e avançados – limites de funções – (LIMA, 1982). Isto se torna inviável se estivermos nos primeiros níveis da educação básica, reforçando assim a importância de conhecer outras estratégias úteis para superar o erro em questão. Embora o Licenciando tenha afirmado que não sabia outras alternativas, a literatura nos ajuda a buscá-las, como discutimos a seguir.

Pode-se mostrar que a regra de somar numeradores e denominadores não deve ser usada porque ela simplesmente não se adapta à realidade. Algumas regras matemáticas existem e foram criadas para modelar certas situações empíricas (CARAÇA, 1951; KLINE, 1976; LO; LUO, 2012), logo, poderíamos utilizar o exemplo "$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ = ?" (já que estamos tratando da adição ao invés da subtração) e interpretar como: *um garoto ganhou metade da pizza e outro garoto ganhou a outra metade da pizza. Juntos, os garotos tem quanto de pizza?* Em geral desde muito cedo os alunos sabem somar metades empiricamente e podem verificar que a resposta é uma pizza inteira e que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ resulta 1. Comparando o resultado intuitivo com o da regra em avaliação ($\frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4}$ que equivale a $\frac{1}{2}$) se compreende a inadequação.

Outros exemplos deste tipo poderiam ser utilizados até que os estudantes se convencessem que precisam de outra forma para somar frações. O próximo passo seria fazer o aluno compreender o conceito da adição de frações por meio de alguma proposta de ensino incluindo, por exemplo, sequência de atividades com representações geométricas ou reta numerada (GUERRA; SILVA, 2008; SILVA; ALMOULOUD, 2008), materiais manipuláveis (por exemplo, Geoplano, folha quadriculada, tiras de papel etc.), tecnologia ou jogos (ARAÚJO, 2013; RICONSCENTE, 2011) ou outras (BAYOUD, 2011; BERTONI, 2008; LOPES, 2008)**.**

É importante destacar que este erro também pode ser aproveitado didaticamente por meio da exploração de um contexto em que a regra $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ é válida: “considere a razão $\frac{a}{b}$ como relação gols/jogos, e cada razão representando um turno de campeonato” (LOPES, 2008, p. 10). Ao invés de turnos, poderíamos usar campeonatos e calcular a média de gols de um jogador que disputou apenas dois campeonatos em sua carreira. Se no primeiro campeonato ele fez 10 jogos e marcou 8 gols (média = $\frac{8}{10}$) e no segundo, 20 jogos e 10 gols (média = $\frac{10}{20}$), temos que a média de sua carreira é $\frac{8+10}{10+20} = \frac{18}{30}$, isto é, 0,6 gol por partida. A título de comparação, segundo a Revista Superinteressante (Ago/2004) o Pelé fez 1282 gols em 1375 jogos e o Maradona fez 365 gols em 695 jogos. Isto significa que o Pelé é o melhor com a média de 0,93 gol por jogo, seguido por nosso jogador fictício com 0,6 e, por último, o Maradona com 0,52.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados desta pesquisa nos permitiu identificar nove conhecimentos especializados para ensinar matemática mobilizados por um licenciando ao discutir uma situação de prática relativa a erros comuns de estudantes com a soma de frações, suas fontes possíveis e modos de superá-los (cf. Tabela 1). Eles contemplaram explicitamente cinco dos seis subdomínios MTSK, a saber, conhecimento dos tópicos matemáticos (KoT), da prática matemática (KPM), do ensino de matemática (KMT), das características da aprendizagem de matemática (KFLM) e dos parâmetros da aprendizagem de matemática (KMLS).

Para além da visão estanque dos conhecimentos isolados, conseguimos avançar na compreensão de como eles se relacionam e como ocorreram as conexões entre domínios matemáticos (MK) e didático do conteúdo (PCK) quando o foco estava na situação de prática analisada (cf. Figura 2). Os conhecimentos dos tópicos matemáticos (KoT) forneceram a base para a proposição de uma explicação instrucional (KMT) visando superar o erro comum de estudantes com adição de frações (e suas possíveis fontes) que o licenciando conhece (KFLM). Tal explicação teve influência de dois outros conhecimentos, um do domínio didático sobre nível de desenvolvimento conceitual esperado do aluno (KMLS) e outro pertencente ao domínio matemático ligado a formas de validação e generalização (KPM). Sendo que este último foi utilizado para compreender o procedimento do aluno e analisar sua (in)correção. Outras abordagens podem ser adotadas, conforme a literatura.

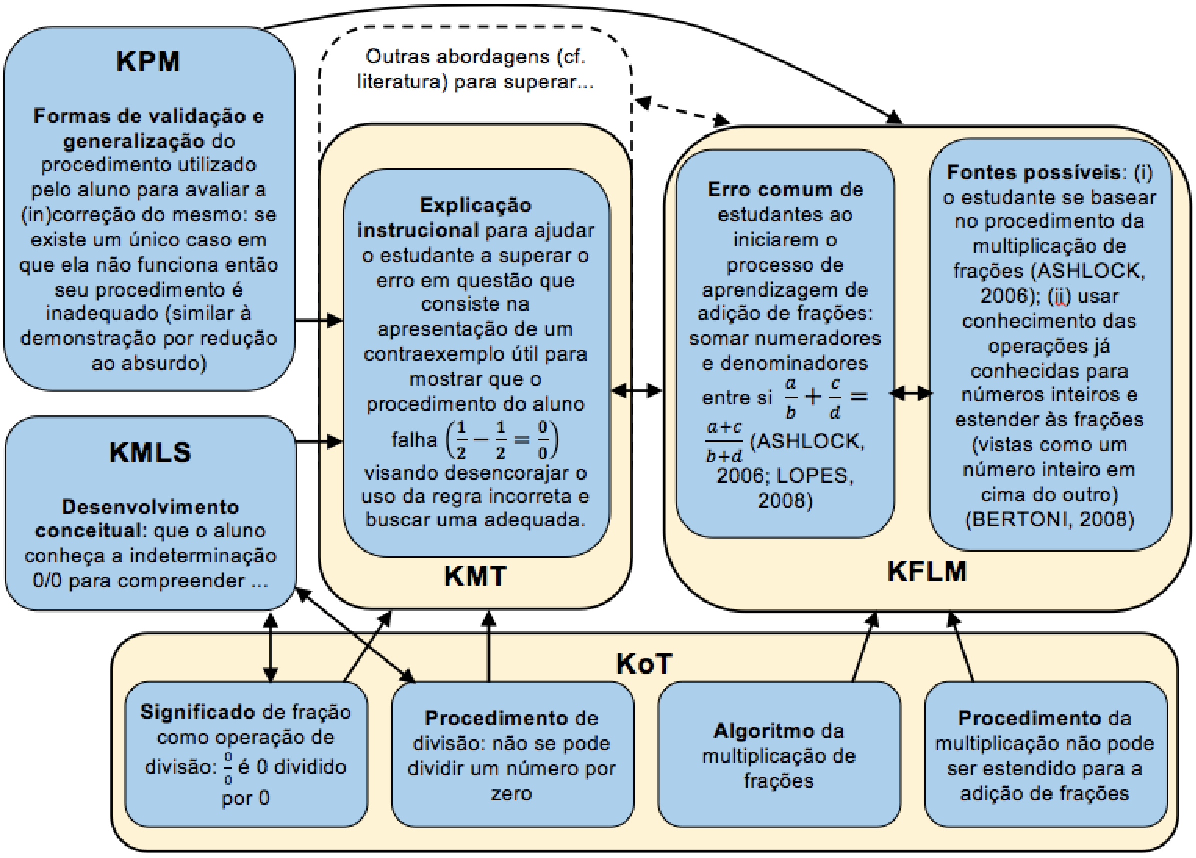



Figura 2. Esquema de relações entre conhecimentos especializados mobilizados pelo Licenciando sobre erros comuns de estudantes com adição de frações, fontes possíveis e modos de superá-los.

A figura anterior expressa uma pequena, mas importante, parte da rede de conhecimentos que um professor pode ter que conectar usando elementos dos subdomínios e das categorias do MTSK com a finalidade de planejar ou realizar sua atividade docente. Fica evidente a relevância do modelo teórico MTSK como ferramenta de exploração analítica profunda do conhecimento especializado necessário para professores ensinarem matemática, cujos resultados reforçam conclusões de pesquisas anteriores (BALL; HILL, 2008; CARRILLO et al., 2014; DUARTE, 2003; MORIEL JUNIOR, 2014; SHULMAN, 1986) no sentido de que não se pode mais conceber a profissão docente com base em ideias fundadas no senso comum, como vocação, dom ou mesmo na crença em algum tipo de notório saber para ensinar. Ao invés disso, para exercer a profissão de professor de matemática é necessário ter conhecimento especializado, construído em formação especializada e conduzida por formadores preparados, algo que está diretamente associado com a valorização da profissão docente e de investimento sério e contínuo nas instâncias educativas, incluindo cursos e instituições de formação e a Educação como um todo.

**REFERÊNCIAS**


ARAÚJO, W. A. D. O uso do FRAC-SOMA 235 no processo de ensino e aprendizagem de frações para o ensino fundamental. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba, 2013. p. 1-10.

ARNON, I.; COTTRILL, J.; DUBINSKY, E.; OKTAÇ, A.; ROA-FUENTES, S.; TRIGUEROS, M.; WELLER, K. **APOS theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education**. Frankfurt: Springer, 2014. 254 p.

ASHLOCK, R. B. **Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction**. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Education, 2006.

BALL, D. L.; HILL, H. C. Mathematical knowledge for teaching (MKT) measures. Mathematics released items 2008. **Ann Arbor: University of Michigan**, 2008.

BAYOUD, J. M. **A comparison of pre-service and experienced elementary teachers' pedagogical content knowledge (PCK) of common error patterns in fractions**. 2011. 180 p. Thesis (Master of Arts). Departament of Education, American University of Beirut, Beirut.

BERTONI, N. E. A construção do conhecimento sobre número fracionário. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008. ISSN 0103-636X.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1991.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Tipografia Matemática, 1951. ISBN 9726626161.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. Á.; ESCUDERO, D.; MEDRANO, E. F. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad Huelva Publicaciones, 2014. 93p.

CARRILLO, J.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. Á. **Reflexionando sobre es conocimiento del professor (Actas de las II Jornadas del SIDM)**. Huelva: UHU, 2015. 106 p.

DUARTE, N. Conhecimento tácito e conhecimento escolar na formação do professor (por que Donald Schön não entendeu Luria). **Educação & Sociedade,** v. 24, n. 83, p. 601-625, 2003.

ESCUDERO, D. I. **Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria**. 2015. 200p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidad de Huelva, Huelva.

FLORES, E. **Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor deMatemáticas (MTSK)**. 2015. 200p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidad de Huelva, Huelva.

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. D. As Operações com Frações e o Princípio da Contagem. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v. 21, n. 31, p. 41-54, 2008.

INEP. **Banco de dados do SAEB de 2011**. Brasília: MEC, 2014. Disponível em: < http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/resultados/2012/Saeb_2011_primeiros_resultados_site_Inep.pdf >. Acesso em: 16 ago 2014.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

KRIPPENDORFF, K. **Metodología del análisis de contenido**. Barcelona: Paidós Ibérica, 1990. 279 p.

LIMA, E. L. Conceitos e controvérsias: alguns porquês. **Revista do Professor de Matemática,** v. 1, n. 1, p. 4-7, 1982.

LO, J.-J.; LUO, F. Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. **Journal of Mathematics Teacher Education,** v. 15, n. 6, p. 481-500, 2012. ISSN 1386-4416; 1573-1820.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. 2014. 162 p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). PPGECEM/REAMEC, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

RICONSCENTE, M. Mobile learning game improves 5th graders' fractions knowledge and attitudes. **GameDesk Institute**, p. 1-44, 2011.

SCHOENFELD, A. H. **How we think**. New York: Routledge, 2010.  ISBN 1659-2573.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational researcher,** v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SILVA, M. J. F.; ALMOULOUD, S. A. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v. 21, n. 31, p. 55-78, 2008.

SZYMANSKI, H.; ALMEIDA, L. R.; PRADINI, R. C. A. R. **A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva**. 4. Brasília: Liber Livro, 2011. 101 p.