DEMONSTRAÇÃO DIDÁTICA – A PIRÂMIDE E SEU VOLUME

Sandro Antônio Godeiro de Andrade[1]

Luis Gustavo Fontoura dos Santos[2]

Emanuel Gomes Lourenço[3]

Francisco Aldrin Armstrong Rufino[4]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Neste minicurso, objetiva-se esclarecer uma alternativa didática que descomplica e proporciona ao corpo docente e discente, inclusive aos estudantes de licenciatura em matemática, uma maneira interessante de solucionar o volume da pirâmide usando limite da soma de uma série geométrica. Tratando-se de um alicerce através de princípios geométricos, algébricos e lúdicos de extrema praticidade. Para corroborar com a antecedente problemática, em razão da predominantemente discussão da fórmula do volume da pirâmide no atual ensino médio se basear apenas em apresentações normalmente habituais – livros didáticos, quadros e giz -, propomos inserir atividades lúdicas (utilizando material concreto como mecanismo para verificação clara da fórmula do volume da pirâmide) que legitimam o cálculo do volume da pirâmide. Ademais, questões que abrangem o conteúdo de tal problema no ensino médio serão lançadas aos participantes do minicurso, a fim de preencher e fixar esse assunto.

Palavras Chaves: Pirâmide. Volume. Demonstração.

INTRODUÇÃO

Neste minicurso, mostraremos um recurso para constatação axiomática da fórmula do volume da pirâmide, em razão da dificuldade de tal temática ser discutida na rede de ensino médio, a fim de fortalecer uma alternativa didática que, apesar de ser raramente utilizada, torna as aulas mais interativas e agradáveis, incentiva o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação aos alunos, além de buscar imediata transmissão de informações relativamente ao assunto ministrado.

Em pesquisa feita nas instituições educacionais da grande Natal-RN, pudemos identificar a ausência da aplicação do “Método Algébrico usando limite da Soma de uma Série Geométrica” para fins justificativos do cálculo do volume da pirâmide, e, em sustentação a esse contratempo, há excessivo percentual de professores que se limitam ao uso da fórmula para apenas resolver problemas desse conteúdo.

A partir dessa problemática, definimos a exposição de tal conteúdo como essencial, visto que, lamentavelmente, não há suficiente valorização - embora seja

[1] Me. Instituto Federal do Rio Grande do Norte. sandro.godeiro@ifrn.edu.br

[2] Discente. Instituto Federal do Rio Grande do Norte. gfontoura85@yahoo.com

[3] Me. Instituto Federal do Rio Grande do Norte. emanuel.lourenco@ifrn.edu.br

[4] Me. Instituto Federal do Rio Grande do Norte. aldrin.rufino@ifrn.edu.br

uma forma compreensível de aprendizagem. Soma-se a isso, a alta possibilidade de diferentes níveis de ensino captarem e assimilarem essas informações para concepção e fixação da temática, desde o ensino fundamental ao de nível superior.

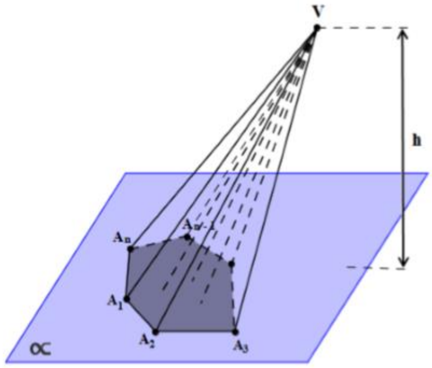
Por fim, oferecemos problemas que envolvem o estudo do tema "pirâmide" presentes no ensino médio. Todas as questões estão resolvidas com o propósito de que o leitor aprenda ou maximize os conceitos e procedimentos envolvidos na execução de tal método.

A PIRÂMIDE E SEU VOLUME

Noções geométricas

Consideremos um polígono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_n$ situado num plano α e um ponto *V* fora de α. Define-se pirâmide a reunião dos segmentos com uma extremidade em *V* e a outra nos pontos do polígono. O ponto *V* é chamado de vértice e o polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$, a base da pirâmide.

Figura 1: Pirâmide com base de um polígono convexo



Fonte: Acervo pessoal

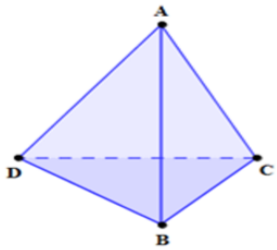
Assim, temos: a distância do vértice *V* ao plano da base, que indicamos por *h*, é chamada de *altura* da pirâmide; os segmentos $\overline{A_1V}$, $\overline{A_2V}$, $\overline{A_3V}$, ..., $\overline{A_{n-1}V}$ e $\overline{A_nV}$ são chamados de *arestas laterais*; e as regiões A_1A_2V, A_2A_3V, A_3A_4V, ..., $A_{n-1}A_nV$ e $A_{n-1}A_1V$ são chamadas *faces laterais* da pirâmide.

Note que a pirâmide possui uma base, *n* faces laterais (triângulos), *n+1* faces, *n* arestas laterais, *2n* arestas e *n+1* vértices.

Além disso, a nomenclatura das pirâmides depende da sua base.

Por exemplo:

Figura 2: Pirâmide $ABCD$



Fonte: Acervo pessoal

A pirâmide *ABCD* é chamada de pirâmide de base triangular (pirâmide triangular ou tetraedro), pois a sua base é um triângulo.

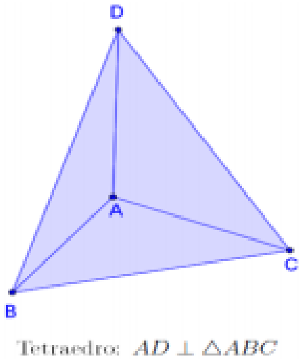
Método Algébrico usando limite de Soma de uma Série Geométrica

A partir do teorema "*o volume de qualquer pirâmide é um terço do produto da área de sua base pela medida de sua altura, ou seja,* $V = \frac{1}{3}S_b h$", apresentaremos um método diferenciado para o cálculo do volume da pirâmide.

Demonstração:

Seja uma pirâmide de base triangular *ABC*, com o ponto *D* sendo o vértice, de modo que a projeção ortogonal de *D* sobre o plano seja o vértice A.

Figura 3: Pirâmide $AD \perp \Delta ABC$



Fonte: Acervo pessoal

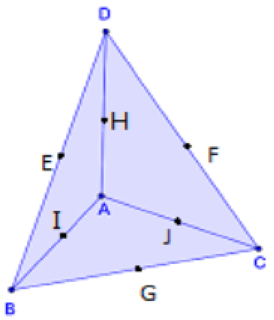
Sendo:

Área$(\Delta ABC) = S$.

h a medida da altura da pirâmide $(h = AD)$.

Marcamos os pontos médios *E, F, G, H, I* e *J* das arestas $\overline{BD}, \overline{DC}, \overline{CB}, \overline{AD}, \overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Figura 4: Pirâmide $AD \perp \Delta ABC$ com seus devidos pontos médios

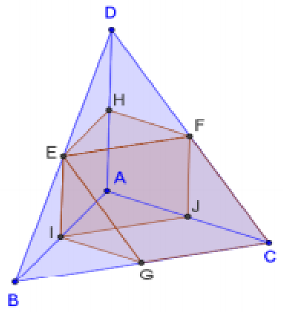


Fonte: Acervo pessoal

Traçamos os segmentos cujas extremidades são os pontos médios *E, F, G, H, I* e *J* e os vértices da pirâmide *A, B, C* e *D*.

Formamos os segmentos: $\overline{DH}, \overline{DF}, \overline{DE}, \overline{EH}, \overline{FH}, \overline{EF}, \overline{AH}, \overline{AI}, \overline{AJ}, \overline{JI}, \overline{BE}, \overline{EI}, \overline{FJ}, \overline{CF}, \overline{EG}, \overline{BI}, \overline{GI}, \overline{CJ}, \overline{CG}, \overline{BG}$.

Figura 5: Pirâmide $AD \perp \Delta ABC$

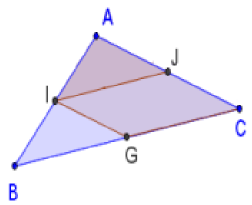


Fonte: Acervo pessoal

Formamos, assim, dois primas ($IJAHEF$ e $IEGCJF$) e duas pirâmides triangulares iguais ($BGIE$ e $EFHD$), além disso $IE \perp \Delta IBG$ e $HD \perp \Delta EHF$.

Vamos analisar como a Área(ΔABC) foi dividida: a área da base do triângulo *ABC* foi dividida em dois triângulos e uma paralelogramo.

Figura 6: Área da base da pirâmide $AD \perp \Delta ABC$



Fonte: Acervo pessoal

Pelo teorema da base média, temos que:

$$\overline{IJ} = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow \frac{\overline{IJ}}{\overline{BC}} = \frac{1}{2}$$

e $\overline{IJ} \,//\, \overline{BC}$.

Portanto, os triângulos *AIJ e ABC* são semelhantes, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Lembrando que a razão das áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Segue que:

$$\frac{A(\Delta AIJ)}{A(\Delta ABC)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{A(\Delta AIJ)}{S} = \frac{1}{4} \Rightarrow A(\Delta AIJ) = \frac{1}{4}S.$$

Como os triângulos ΔAIJ e ΔIBG são congruentes (caso *LLL*). Segue que a área(ΔIBG) $= \frac{1}{4}S$.

Logo, a área da base do triângulo *ABC* foi dividida em dois triângulos congruentes e um paralelogramo. Temos que:

$$\text{Área}(\Delta AIJ) + \text{Área}(\Delta IBG) + \text{Área}(\Delta IJCG) = \text{Área}(\Delta ABC)$$

$$\tfrac{1}{4}S + \tfrac{1}{4}S + \text{Área}(\Delta IJCG) = S$$

$$\text{Área}(\Delta IJCG) = S - \tfrac{1}{4}S - \tfrac{1}{4}S$$

$$\text{Área}(\Delta IJCG) = \tfrac{4S-S-S}{4} = \tfrac{1}{2}S.$$

Assim, a área do paralelogramo *IJCG é* $\frac{1}{2}S$*.*

Em seguida, vamos analisar como a altura $h = \overline{AD}$ foi dividida:

A altura $h = \overline{AD}$ foi dividida pelo ponto médio *H*.

Dessa forma,

$$\overline{HD} + \overline{HA} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{HD} + \overline{HD} = \overline{AD}$$

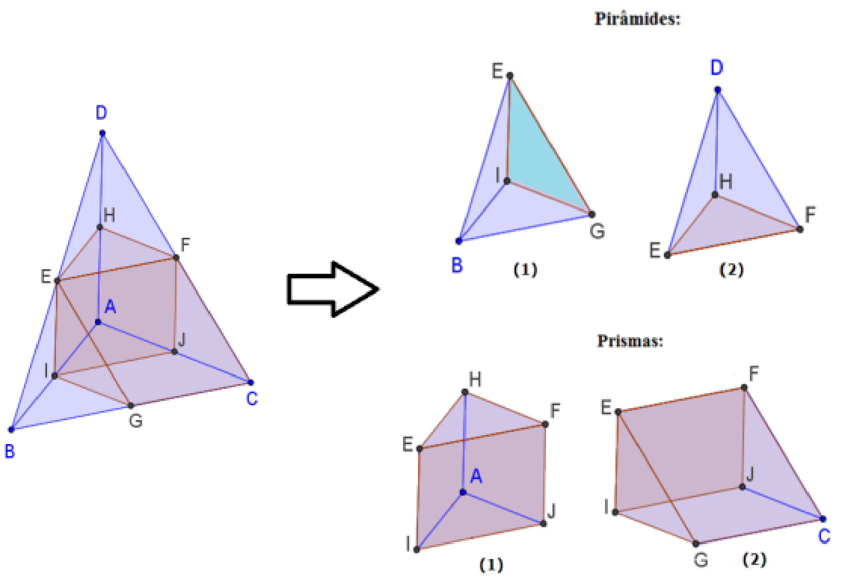
$$2\overline{HD} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{HD} = \frac{\overline{AD}}{2}.$$

Agora, sabemos que:

$$\begin{cases} área(\Delta AIJ) = \dfrac{1}{4}S \\ \overline{HD} = \dfrac{1}{4}S \end{cases}.$$

Observamos que a pirâmide de base *ABC* com vértice *D* foi dividida em duas pirâmides iguais e dois prismas, vejamos:

Figura 7: Desconstrução da pirâmide $AD \perp \Delta ABC$

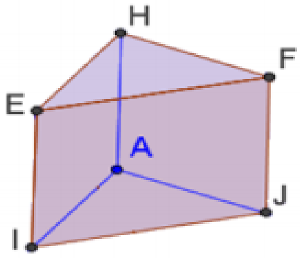


Fonte: Acervo pessoal

Depois disso, vamos calcular os volumes dos dois prismas:

Prisma (1): Prisma de base ΔAIJ.

Figura 8: Prisma de base ΔAIJ



Fonte: Acervo pessoal

Tendo que $\overline{AH} = \frac{1}{2}h$ e área$(\Delta AIJ) = \frac{1}{4}S$, o volume do Prisma (1) é dado por:

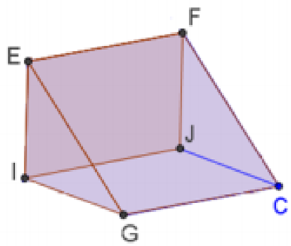
$$V_{Prisma\ (1)} = A_{Base} \cdot \overline{AH}$$

$$V_{Prisma\ (1)} = Área(\Delta AIJ) \cdot \frac{1}{2}h$$

$$V_{Prisma\ (1)} = \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}Sh.$$

Prisma (2): A metade de um paralelepípedo.

Figura 9: Paralelepípedo de base $IJCG$



Fonte: Acervo pessoal

Sabendo que a área do paralelogramo $(IJCG) = \frac{1}{2}S$ e que $\overline{EI} = \overline{FJ} = \frac{1}{2}h$.

Logo, o volume do Prisma (2) é dado por:

$$V_{Prisma\ (2)} = \frac{1}{2}A_{Base} \cdot \overline{EI}$$

$$V_{Prisma\ (2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}S\right) \cdot \frac{1}{2}h$$

$$V_{Prisma\ (2)} = \frac{1}{8}Sh.$$

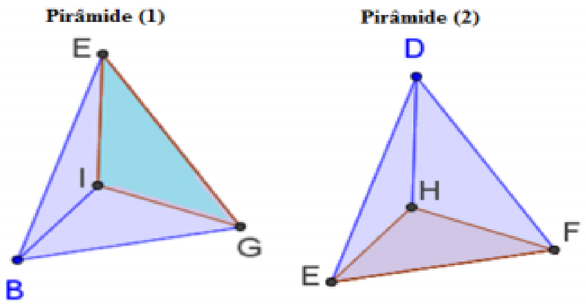
De fato, provamos que ambos os prismas têm o mesmo volume. Em seguida, somando o volume do Prisma (1) e Prisma (2), temos:

$$V_{Prisma\,(1)} + V_{Prisma\,(2)} = \frac{1}{8}Sh + \frac{1}{8}Sh$$

$$V_{Prisma\,(1)} + V_{Prisma\,(2)} = \frac{2}{8}Sh = \frac{1}{4}Sh.$$

Ainda temos as duas pirâmides iguais, onde $\overline{IE} \perp \Delta(IBG)$ e $\overline{HD} \perp \Delta(HFE)$, sendo que $\overline{IE}$ e $\overline{HD}$ são as alturas das pirâmides (1) e (2), respetivamente. Veja as figuras a seguir:

Figura 10: Pirâmides encontradas a partir da desconstrução da pirâmide $AD \perp \Delta ABC$



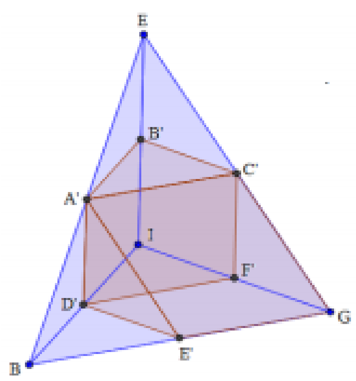
Fonte: Acervo pessoal

Repetindo o procedimento de dividir cada pirâmide triangular em dois prismas e duas outras pirâmides triangulares iguais.

Marcamos os pontos médios *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, *E'* e *F'* das retas $\overline{BE}, \overline{EI}, \overline{EG}, \overline{BI}, \overline{BG}, \overline{GI}$, respectivamente.

Pirâmide (1):

Figura 11: Pirâmide $IE \perp \Delta BIG$

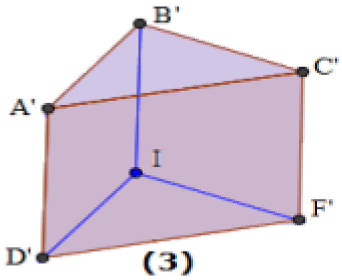


Fonte: Acervo pessoal

Vamos calcular os volumes dos prismas (3) e (4). Assim:

Prisma (3): Prisma de base $\Delta D'F'I$.

Figura 12: Prisma de base $\Delta D'F'I$



Fonte: Acervo pessoal

Sabendo que $\overline{B'I} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}h$ e área($\Delta D'F'I) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}S\right) = \frac{1}{16}S$.

Logo, o volume do Prisma (3) é dado por:

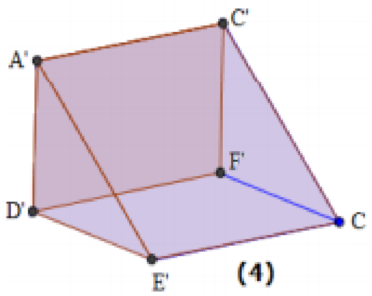
$$V_{Prisma\ (3)} = A_{Base} \cdot \overline{B'I}$$

$$V_{Prisma\ (3)} = Área(\Delta D'F'I) \cdot \frac{1}{4}h$$

$$V_{Prisma\ (3)} = \frac{1}{16}S \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{64}.$$

Prisma (4): A metade de um paralelepípedo.

Figura 13: Paralelepípedo de base $D'F'CE'$



Fonte: Acervo pessoal

Sabendo que a área do paralelogramo $(D'F'CE') = \frac{1}{2} \cdot área(\Delta BIC) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}S\right) = \frac{1}{8}S$ e que $\overline{D'A'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{EI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}h\right) = \frac{1}{4}h$.

Portanto, o volume do Prisma (4) é dado por:

$$V_{Prisma\ (4)} = \frac{1}{2}A_{Base} \cdot \overline{D'A'}$$

$$V_{Prisma\ (4)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}S\right) \cdot \frac{1}{4}h$$

$$V_{Prisma\ (4)} = \frac{1}{64}Sh.$$

Somando o volume do Prisma (3) e Prisma (4), temos:

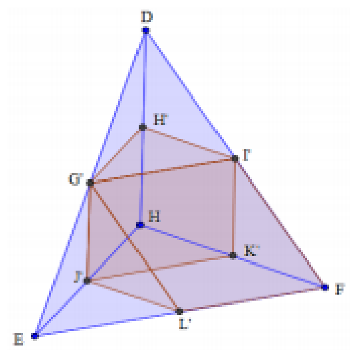
$$V_{Prisma\ (3)} + V_{Prisma\ (4)} = \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh$$

$$V_{Prisma\ (3)} + V_{Prisma\ (4)} = \frac{2}{64}Sh = \frac{1}{32}Sh.$$

Pirâmide (2):

Marcamos os pontos médios *G'*, *H'*, *I'*, *J'*, *K'*, *L'* das arestas $\overline{ED}, \overline{DH}, \overline{DF}, \overline{HE}, \overline{FH},$ e $\overline{EF}$, respectivamente.

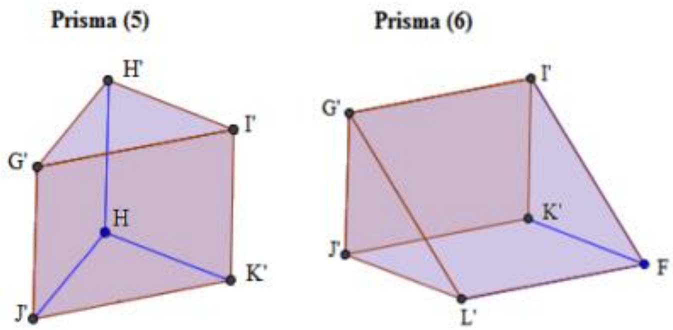
Figura 14: Pirâmide $HD \perp \Delta EHF$



Fonte: Acervo pessoal

Desta vez, calcularemos os volumes dos prismas (5) e (6), temos:

Figura 15: Prismas da pirâmide $HD \perp \Delta EHF$



Fonte: Acervo pessoal

Como a Pirâmide (1) $\overline{IE} \perp \Delta IBG$ e na Pirâmide (2) $\overline{HD} \perp \Delta EHF$.

Então, o volume do Prisma (5) é igual ao volume do Prisma (3), ou seja:

$$V_{Prisma\ (5)} = V_{Prisma\ (6)} = \frac{1}{64}Sh.$$

E o volume do Prisma (6) é igual ao volume do Prisma (4), isto é:

$$V_{Prisma\ (6)} = V_{Prisma\ (4)} = \frac{1}{64}Sh.$$

Daí,

$$V_{Prisma\ (5)} + V_{Prisma\ (6)} = \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh$$

$$V_{Prisma\ (5)} + V_{Prisma\ (6)} = \frac{2}{64}Sh = \frac{1}{32}Sh.$$

Portanto,

$$\underbrace{V_{Prisma\ (3)} + V_{Prisma\ (4)}} + \underbrace{V_{Prisma\ (5)} + V_{Prisma\ (6)}} = \frac{1}{32}Sh + \frac{1}{32}Sh = \frac{2}{32}Sh$$

$$\underbrace{V_{Prisma\ (3)} + V_{Prisma\ (4)}} + \underbrace{V_{Prisma\ (5)} + V_{Prisma\ (6)}} = \frac{1}{16}Sh$$

Continuando esse procedimento, na próxima etapa, teríamos 8 prismas cuja soma dos volumes seria:

$$Soma\left[V_{Prismas\{7,8,9,\dots,14\}}\right] = \frac{1}{64}Sh.$$

Seguindo esse mesmo processo, infinitamente, o volume da pirâmide original $(\overline{AD} \perp \Delta ABC)$ correspondente à soma dos volumes de todos os prismas, desta maneira:

$$V_{Pirâmide} \cong \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} Sh.$$

A série é uma série geométrica, então ela converge.

Assim,

$$V_{Pirâmide} \cong \underbrace{V_{Prisma\ (1)} + V_{Prisma\ (2)}} + \underbrace{V_{Prisma\ (3)} + V_{Prisma\ (4)} V_{Prisma\ (5)} + V_{Prisma\ (6)}} + \cdots$$

$$V_{Pirâmide} \cong \frac{1}{4}Sh + \frac{1}{16}Sh + \frac{1}{64}Sh + \cdots$$

$$V_{Pirâmide} \cong \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right)Sh.$$

Usando o Limite da Soma dos termos de uma série geométrica de primeiro termo a_1 e de razão q tal que $|q| < 1$ que é dado por $\frac{a_1}{1-q}$, segue que:

$$V_{Pirâmide} = \left(\frac{a_1}{1-q}\right) \cdot Sh,$$

onde $a_1 = \frac{1}{4}$ e $q = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Assim,

$$V_{Pirâmide} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \cdot Sh$$

$$V_{Pirâmide} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} \right) \cdot Sh$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3} \cdot Sh$$

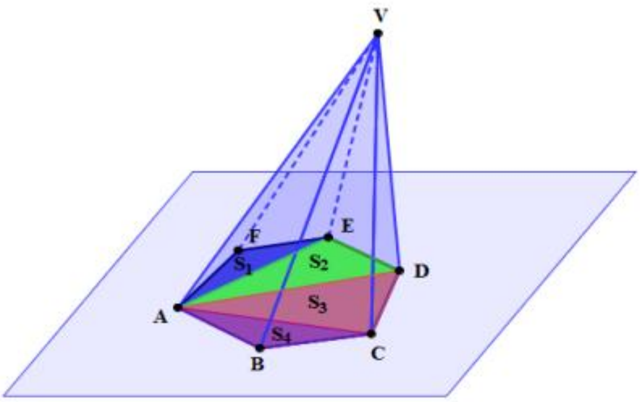
Isso demonstra que o volume de uma pirâmide de base triangular cuja projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base coincide com um dos vértices da base é $\frac{1}{3} A_{Base} \cdot h$.

Para concluir que o volume de uma pirâmide de base triangular qualquer também é $\frac{1}{3} A_{Base} \cdot h$ devemos usar o princípio de Cavalieri.

Finalmente, no caso de ser uma pirâmide com base qualquer, de *n* lados, podemos partir de um único vértice, dividindo esta base em triângulos e percorrer a demonstração anterior.

Vejamos a pirâmide a seguir:

Figura 16: Modelo de Pirâmide para demonstração



Fonte: Acervo pessoal

Onde:

- Altura da pirâmide é igual a *h*;
- A área da base é igual a *S*, onde $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_n$.

Neste caso, o volume da pirâmide é dado por:

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \frac{1}{3}S_4h + \cdots + \frac{1}{3}S_nh$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}h\,\underbrace{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots + S_n)}_{S} = \frac{1}{3}Sh.$$

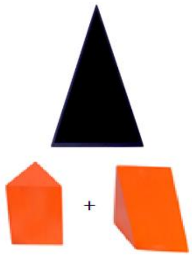
Caro leitor, usando um procedimento análogo ao que foi usado neste trabalho, para demonstrar o volume da pirâmide, pode-se demonstrar também que $V_{Cone} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h$. Para maiores detalhes, veja o artigo do professor Vincenzo Bongiovanni, que propõe uma abordagem do cálculo da fórmula do volume do cone, apoiado no conceito intuitivo de limite.

E que também é possível demonstrar a fórmula do volume da esfera, ou seja, $V_{Esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$, como está feito no livro Geometry - em LANG.

Método Lúdico

A soma dos volumes dos prismas colocados no interior da pirâmide cuja área da base triangular é *S* e altura *h* é aproximadamente calculada por:

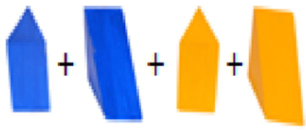
Figura 17: Modelos manipuláveis



Fonte: Acervo pessoal

$$\frac{1}{8}Sh + \frac{1}{8}Sh = \frac{2}{8}Sh = \frac{1}{4}Sh.$$

Figura 18: Modelos manipuláveis



Fonte: Acervo pessoal

$$\frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh + \frac{1}{64}Sh = \frac{4}{64}Sh = \frac{1}{16}Sh.$$

Figura 19: Modelos manipuláveis

Fonte: Acervo pessoal

$$\frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh + \frac{1}{512}Sh = \frac{8}{512}Sh = \frac{1}{64}Sh.$$

Assim, o volume da pirâmide é calculado pelo limite da soma da sequência geométrica, ou seja:

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{4}Sh + \frac{1}{16}Sh + \frac{1}{64}Sh + \cdots$$

$$V_{Pirâmide} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right)Sh$$

$$V_{Pirâmide} = \left(\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \right) Sh$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3} Sh.$$

Figura 20: Modelo Lúdico

Fonte: Acervo pessoal

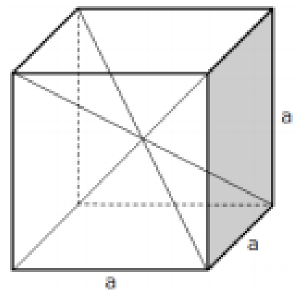
PROBLEMATIZAÇÕES PARA SALA DE AULA

Questão 1: Usando um cubo, mostre que a fórmula do volume de uma pirâmide (reta) de base quadrada é $V = \frac{1}{3}S_b \cdot h$.

Resolução:

Inicialmente, considere um cubo de aresta *a*.

Figura 21: Cubo



Fonte: Acervo pessoal

Se ligarmos por segmento o centro do cubo com cada um dos seus 8 vértices, formamos 6 pirâmides congruentes cuja base corresponde à face do cubo e cuja altura corresponde à metade da aresta do cubo. Assim:

$$V_{Cubo} = 6 \cdot V_{Pirâmide}$$

$$a^3 = 6 \cdot V_{Pirâmide}$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot a}{2}$$

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3} S_b h$$

sendo: $S_{Base} = a^2$ e $h = \frac{a}{2}$.

Questão 2: (ITA-SP) Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo do vértice *V*, determinando um triângulo *ABC* cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, e *5cm.* O volume, em *cm³*, do sólido *V ABC é?*

a) 2.

b) 4

c) $\sqrt{17}$.

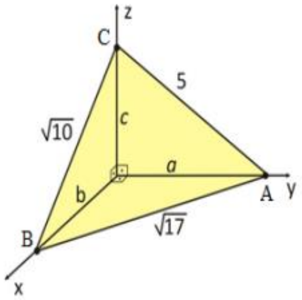
d) 6

e) $5\sqrt{10}$.

Resolução:

Vejamos a figura a seguir:

Figura 22: Triedro trirretângulo



Fonte: ITA

Consideremos a figura a seguir em que $VA = a$, $VB = b$ e $VC = c$.

Temos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \\ a^2 + c^2 = 5^2 \\ b^2 + c^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \end{cases} . \qquad (5.1)$$

Somando as três equações, obtemos:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 52 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 26,$$

e substituindo em (5.1), vem:

$$\begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 1. \\ c = 3 \end{cases}$$

Consequentemente, o volume da pirâmide *V ABC* é $\frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 2cm^3$.

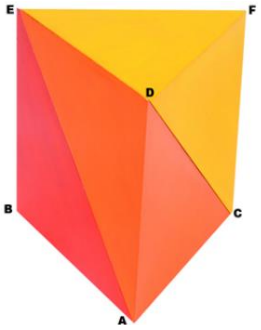
Portanto, $V = 2cm^3$, alternativa **(A)**.

Problema Lúdico 1: Volume da Pirâmide como Parte do Volume do Prisma.

Vamos mostrar com o uso de material concreto que o volume de uma pirâmide de base triangular é igual à terça parte do volume do prisma de mesma base e mesma altura, ou seja, $V = \frac{1}{3} S_b h$.

Para ver isto, consideremos o prisma da figura a seguir:

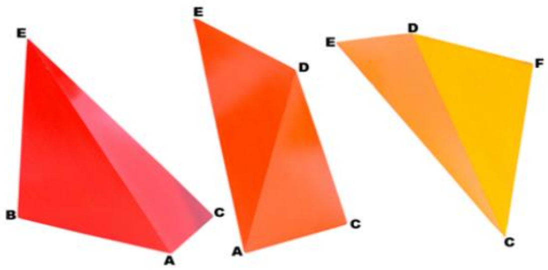
Figura 23: Prisma triangular



Fonte: Acervo pessoal

Seccionando o prisma, obtemos três pirâmides triangulares (tetraedro), como indica a figura a seguir:

Figura 24: Pirâmides de bases triangulares



Fonte: Acervo pessoal

Agora faça você mesmo, usando as folhas para recorte no *Apêndice A.1*.

Problema Lúdico 2: Volume da Pirâmide como Parte do Volume do Cubo.

Vamos verificar a mesma fórmula experimentalmente, utilizando o prisma cubo.

Temos o cubo sem tampa e três pirâmides. Veja a figura abaixo:

Figura 25: Cubo

Fonte: Acervo pessoal

Agora faça você mesmo, também usando as folhas para recorte no *Apêndice A.2*.

REFERÊNCIAS

BONFIOVANNI, Vincenzo. *Revisitando a Fórmula do Volume do Cone*. São Paulo: SBM, 2010. (Revista do Professor de Matemática, n. 73).

LANG, Serge.; MURROW, Gene. *Geometry. 2. ed*., New York – USA: Ed. Springer, 1988.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do ensino médio.* 6. ed., Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

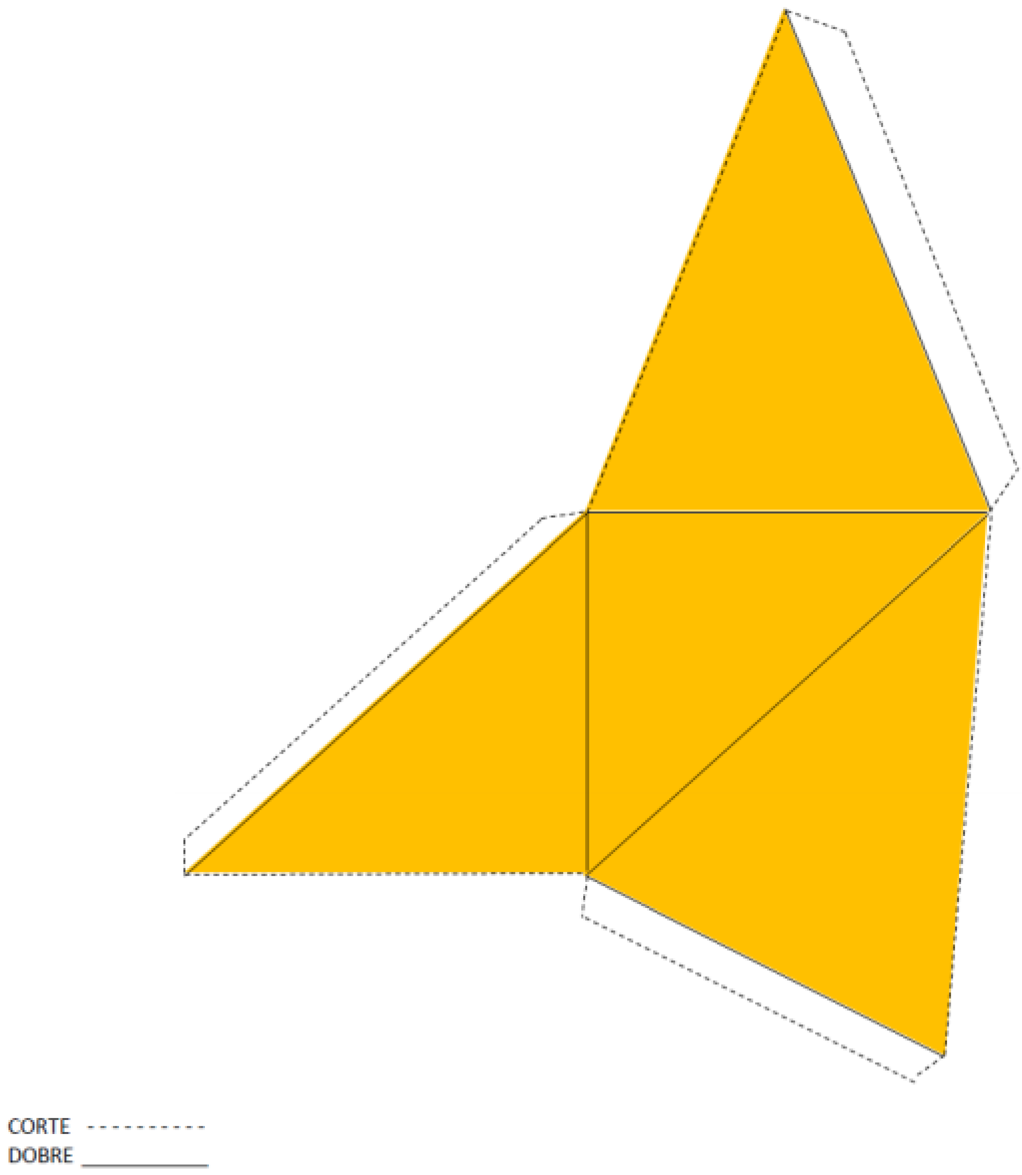
STILLWELL, John C. *Yearning for the impossible*: the surprising truths of mathematics. S.l.: A. K. Peters, 2006.

WANDERLINDE, Maria José. *Material concreto relacionando volumes de prisma e pirâmide*. S.l.: SBM, 1988. (Revista do Professor de Matemática, n. 13).

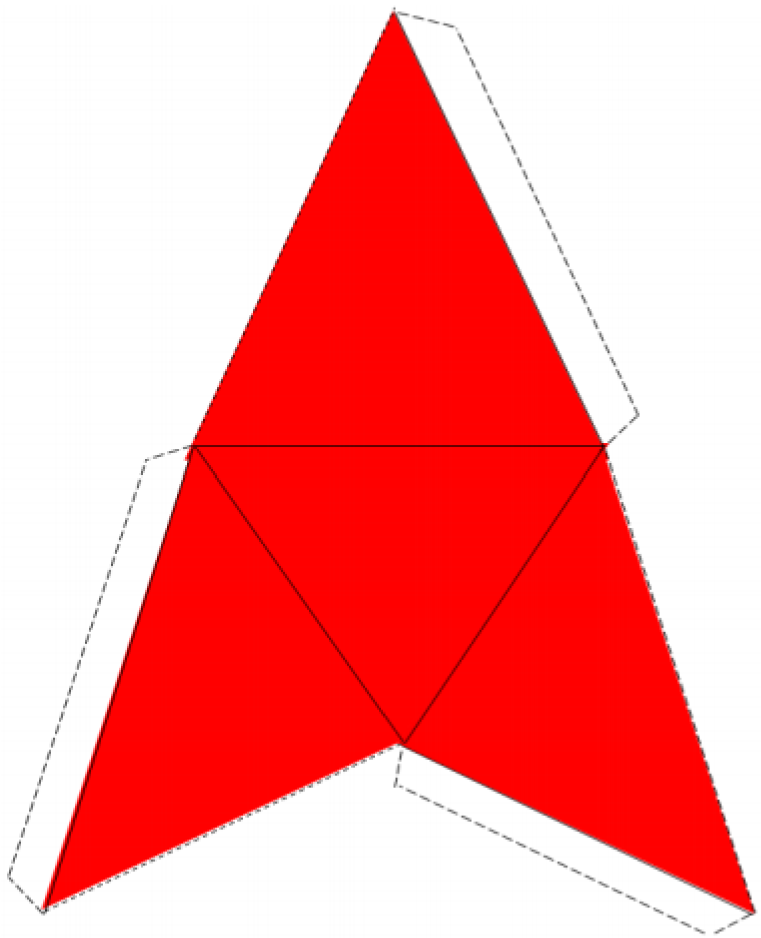
APÊNDICE

A.1 – Planificação das três pirâmides de base triangular para formar um prisma de base triangular.

Planificação da Pirâmide de Base Triangular.

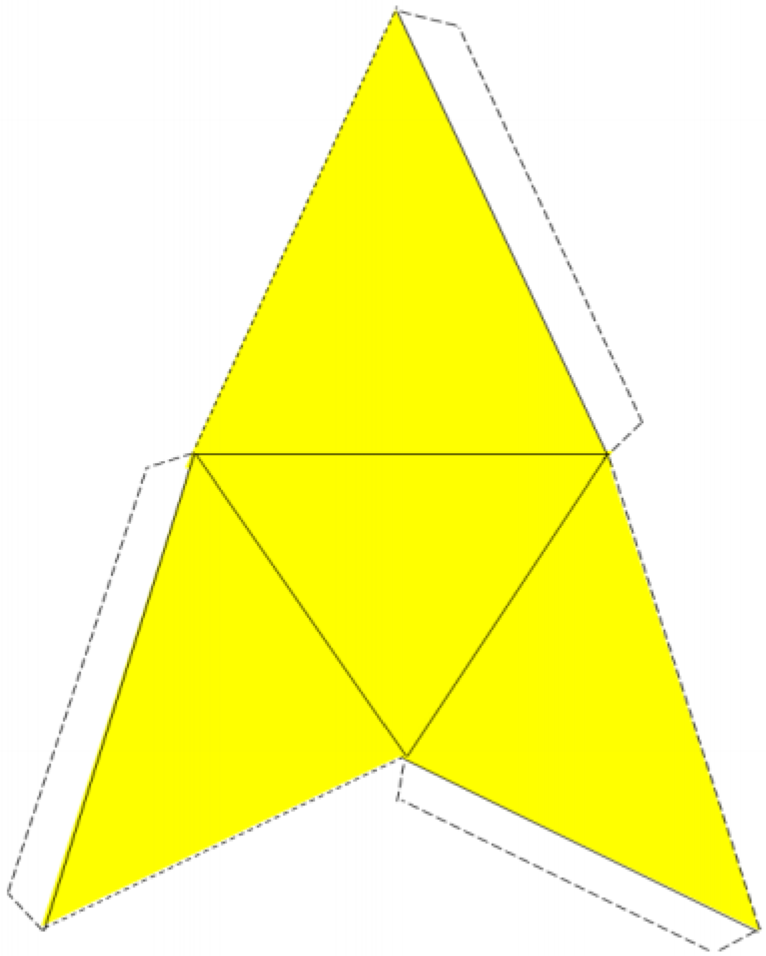


Planificação da Pirâmide de Base Triangular.



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

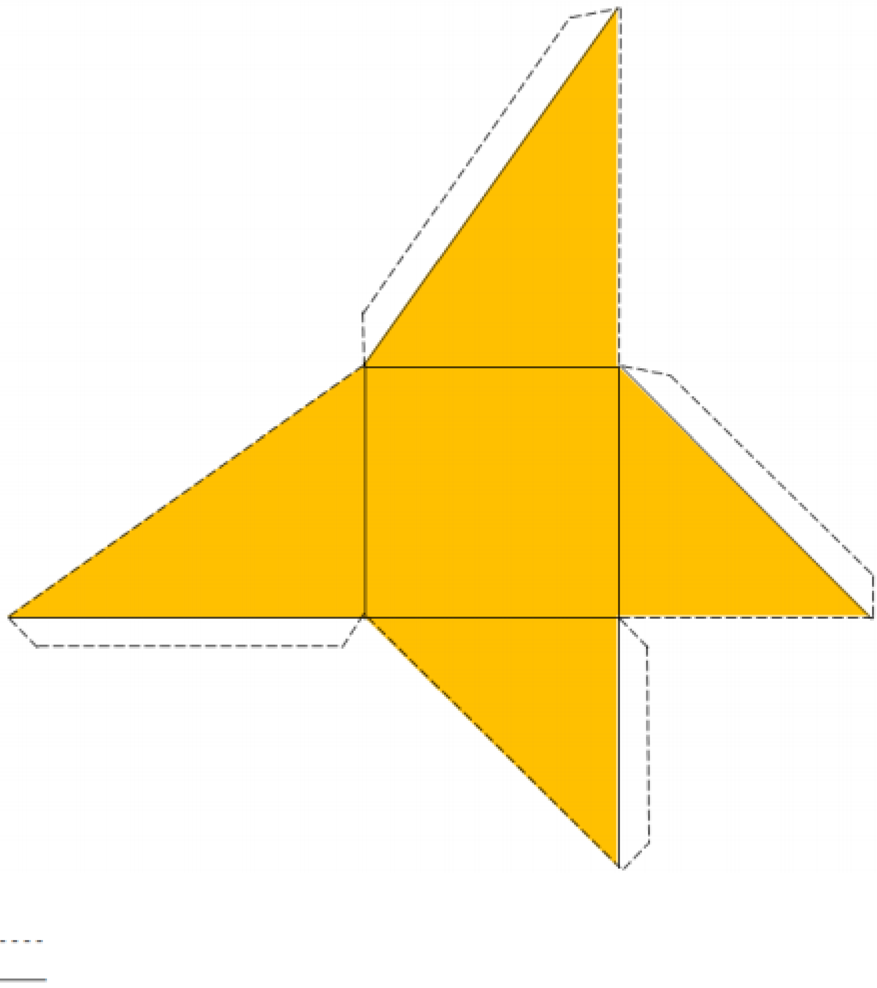
Planificação da Pirâmide de Base Triangular.



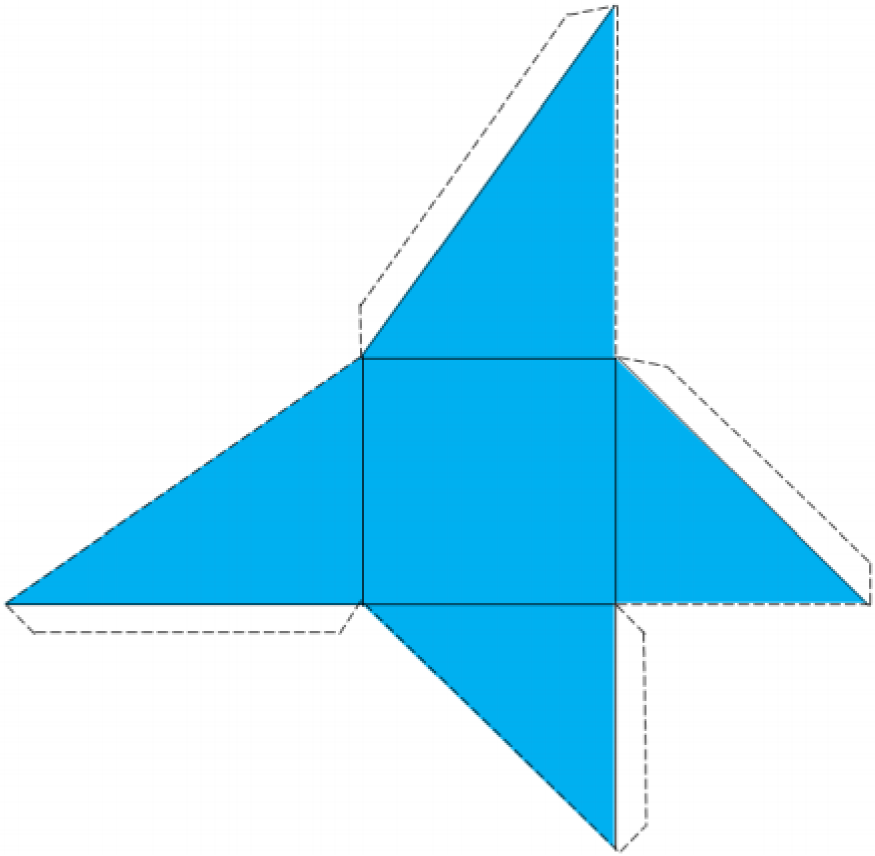
CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

A.2 – Planificação das três pirâmides base quadrangular para formar um cubo.

Planificação da Pirâmide de Base Quadrangular.

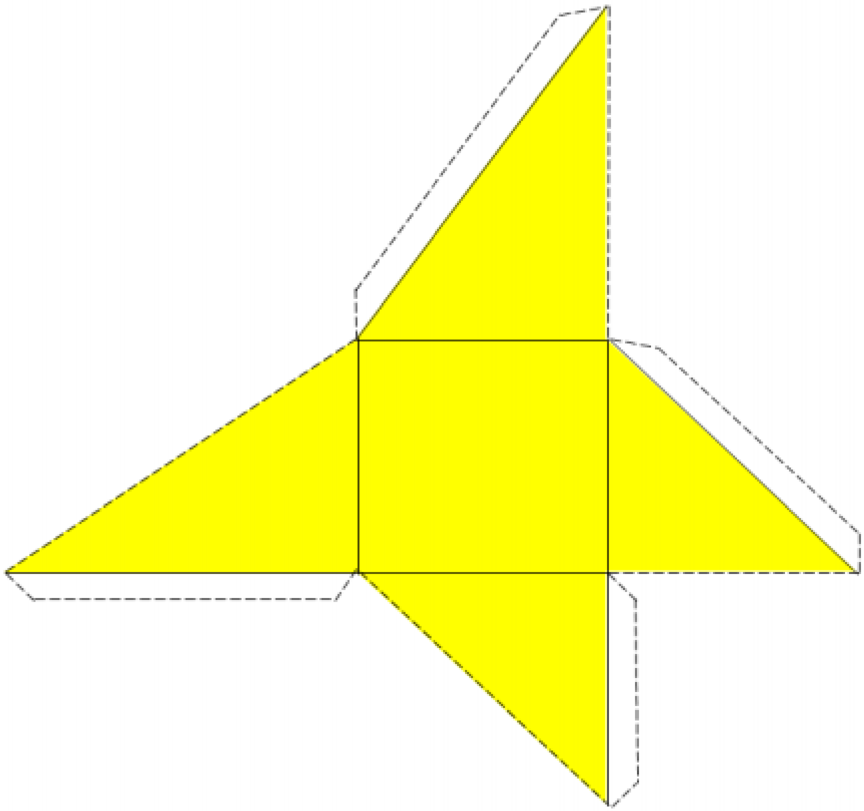


Planificação da Pirâmide de Base Quadrangular.



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________

Planificação da Pirâmide de Base Quadrangular.



CORTE - - - - - - - - - -
DOBRE ___________