



## SIMETRIA COM OS SUPER-HERÓIS

Paula Monteiro Baptista<sup>1</sup>

### Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

**Resumo:** Este minicurso apresenta uma proposta didática cujo objetivo é trabalhar dois conceitos geométricos: o conceito de pontos simétricos e o da transformação geométrica denominada simetria axial plana para turmas dos anos iniciais do ensino fundamental chegando ao ensino médio. As atividades que serão propostas aos participantes constam no artigo Kaleff (2004) e foram desenvolvidas no projeto Simetria com os super-heróis.

**Palavras Chaves:** Pontos simétricos. Simetria axial plana. Modelo van Hiele.

### 1. INTRODUÇÃO

O projeto *Simetria com os super-heróis* foi ministrado nas turmas de ensino fundamental I e II da Oficina de Matemática do La Salle Abel – Niterói no mês de maio de 2016, culminando em uma exposição no mês seguinte nessa escola. A proposta dessas turmas de Oficina de Matemática é abordar conceitos matemáticos de forma dinâmica para a construção do aprendizado.

Os conceitos mencionados serão trabalhados por meio de quatro atividades que estão baseadas no Modelo van Hiele. “Segundo van Hiele, a visualização, a análise e a organização informal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização do conceito.”, Kaleff (2003).

Os resultados desse projeto evidenciam o que já foi mencionado em Kaleff (2004): “a importância de desenvolver a percepção visual através da exploração de efeitos visuais obtidos a partir de modelos concretos de representações de transformações geométricas”.

### 2. METODOLOGIA

Serão apresentadas aos participantes as quatro atividades do artigo Kaleff (2004). As três atividades iniciais podem ser aplicadas em crianças com idade a partir de 7 anos. Já a última atividade proposta nesse artigo, deve ser aplicada a alunos de oitavo e nono anos do ensino fundamental II, uma vez que tal atividade

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática. La Salle Abel. paulamonteirob@yahoo.com.br

exige o domínio nos conceitos básicos relativos às funções. As atividades apresentadas admitem dois tipos de abordagem para a aplicação dos conceitos em questão: uma dinâmica e outra estática.

A primeira atividade é o jogo Queimada com obstáculos que permite a abordagem dinâmica do conceito de simetria axial plana, o qual envolve um movimento no espaço por meio de uma dobradura de uma folha de papel.

### ***Atividade 1***

#### ***Preparação e apresentação do jogo***

Solicita-se à dupla de alunos que divida a folha de papel por meio de um segmento de reta.

Cada parte da folha será o *campo de jogo* de cada jogador.

Pede-se a cada jogador escolha e cole, no seu campo de jogo, três obstáculos (por exemplo: escudos, capacetes, símbolos, etc) e desenhe seis bonecos, sendo que um deles deve ser desenhado dentro de um círculo. Este boneco será o *chefe do campo*.

#### ***Regras do jogo***

1ª) A *bola do jogo* é jogada de um campo para outro da seguinte maneira:

- marca-se um ponto com caneta hidrocor no campo do atirador;
- dobra-se o papel sobre o segmento de reta divisório dos campos;
- transporta-se o ponto, por meio de decalque, para o campo adversário.

Quando o ponto transportado atinge um dos bonecos diz-se que este boneco foi *queimado*.

2ª) O objetivo do jogo é *queimar* todos os bonecos do adversário, devendo o chefe ser queimado em último lugar;

3ª) A pontuação de cada jogada é feita da seguinte maneira:

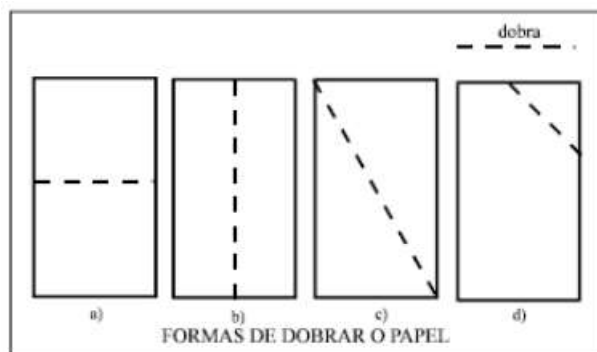
- um ponto ganho para cada boneco queimado;
- um ponto perdido para cada obstáculo do campo adversário atingido;
- três pontos perdidos quando o círculo do chefe for atingido sem que os demais bonecos do adversário estejam queimados.

Após a aplicação dessa atividade no projeto *Simetria com os super-heróis*, os alunos foram questionados sobre o modo como fizeram a divisão dos campos. Foi observada a influência de nosso meio cultural quando as crianças dobraram a folha retangular ao meio, segundo a sua maior dimensão, lembrando os campos de uma quadra de jogo. De dez duplas, nove fizeram dessa maneira.



Foto da Atividade 1 desenvolvida no projeto *Simetria com os super-heróis*.

De acordo com Kaleff (2004), tem sido observado que a forma a) é a mais comum, cerca de 95% dos casos de dobras, enquanto que a forma b) raramente aparece, sendo que as formas c) e d) somente surgem em cursos cujos participantes têm um nível



mais elevado de escolaridade: especialização ou mestrado. Além disso, o artigo relata ser fundamental que o professor perceba que estas dobraduras são modelos de situações que podem auxiliar o aluno a perceber, em séries mais avançadas, que a função simetria axial plana é uma função bijetora e, portanto, inversível. Pois, enquanto, as situações a) e b) representariam modelos para o domínio de uma tal função, este não é o caso da situação c) pois, apesar dos campos terem o mesmo tamanho, e aparentemente a cada ponto de um campo se poder fazer corresponder um ponto do outro, isto não ocorre, devido à posição dos mesmos relativamente ao

segmento de reta divisória. Por outro lado, na situação d), o campo maior não poderia corresponder ao domínio de uma função, pois não haveria para cada um dos seus pontos, um correspondente no campo menor, o que não é o caso deste campo, cujos pontos apesar de terem correspondentes no outro, poderiam deixar de atingir pontos deste, não correspondendo ao modelo de função sobrejetora, a qual admita o campo menor como domínio e o maior como contra-domínio.

A segunda atividade permite a abordagem estática dos conceitos geométricos citados e tem como objetivo levar a criança à análise e à caracterização das propriedades envolvidas com esses conceitos. No desenvolvimento do projeto *Simetria com os super-heróis* foi observada a necessidade de mais uma etapa anterior a essa segunda atividade: o trabalho com a malha quadriculada. A partir daí, foi criada a etapa que usa pixels art com desenhos de super-heróis, introduzindo o conhecimento do que é ângulo, reta, perpendicular e ângulo reto para a atividade 2 usa régua e esquadro. A seguir, foto dessa etapa que usa pixels art.



Foto da etapa pixels art desenvolvida no projeto *Simetria com os super-heróis*.

No quadro que se segue, está escrita a atividade 2 que tem por objetivo levar o aluno a efetuar uma análise das propriedades que estão envolvidas no conceito de pontos simétricos.

### ***Atividade 2***

Nesta atividade, são chamados *pontos simétricos em relação a uma reta* (de separação dos campos) ao par de pontos, do campo do atirador e do campo do adversário, de cada jogada do Queimada com obstáculos.

#### ***Procedimento***

- a) Escolha um par de pontos simétricos e meça a distância entre eles.
- b) Meça a distância de cada ponto considerado no item anterior à reta divisória dos campos.
- c) Por meio de um segmento de reta una este mesmo par de pontos. Meça o ângulo formado pelo segmento traçado e a reta divisória dos campos.
- d) Repita os itens anteriores para alguns dos outros pontos simétricos. O que você observa?
- e) Você seria capaz de jogar Queimada com obstáculos utilizando apenas régua e esquadro, sem dobrar o papel?
- f) Discuta com seus colegas como jogar Queimada com obstáculos usando somente régua e esquadro de modo a não errar nenhuma jogada.

De acordo com Kaleff (2004), o aluno observa a equidistância dos pontos ao segmento de reta de separação dos campos do jogo, os ângulos formados entre os segmentos desenhados, a perpendicularidade entre as retas que suportam esses segmentos, a inversão relativamente aos pontos simétricos, etc. Ainda nesta atividade, o aluno é levado a considerar as vantagens e desvantagens do uso da régua e do transferidor ao se jogar Queimada com obstáculos, sem recorrer ao movimento de dobrar o papel e, portanto a movimentá-lo no espaço. Estas considerações permitem ao aluno restringir as suas observações ao plano do próprio papel. Portanto, esta análise informal e, aparentemente sem muita importância para o aluno, é fundamental para que se possa levá-lo a perceber a função simetria axial como uma função do próprio plano, o que será apresentado mais adiante, na última

atividade apresentada, a qual trata da organização formal destas observações sobre o conceito.

Após a conclusão desta etapa, a maioria dos alunos que desenvolveram a atividade no projeto *Simetria com os super-heróis* relatou que ficou mais imediato compreender porque algumas maneiras de se dividir o campo do jogo Queimada com obstáculos não fazem sentido.



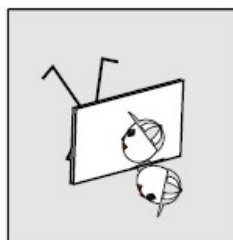
Foto da Atividade 2 desenvolvida no projeto *Simetria com os super-heróis*.

A terceira atividade reforça e completa as observações informais sobre as características dos pontos simétricos e da simetria axial plana, com uma abordagem estática. Essa atividade usa um espelho e uma cartela onde estejam desenhadas várias figuras obtidas a partir de partes do desenho de uma figura dada.

### **Atividade 3**

Observe a cartela que você tem em mãos, na qual estão desenhadas várias figuras, dentre as quais uma está designada como *Figura Geradora*.

- a) Colocando o espelho posicionado perpendicularmente à Figura Geradora tente formar figuras compostas por uma parte da Figura Geradora e pela imagem refletida desta parte (observe o esquema).

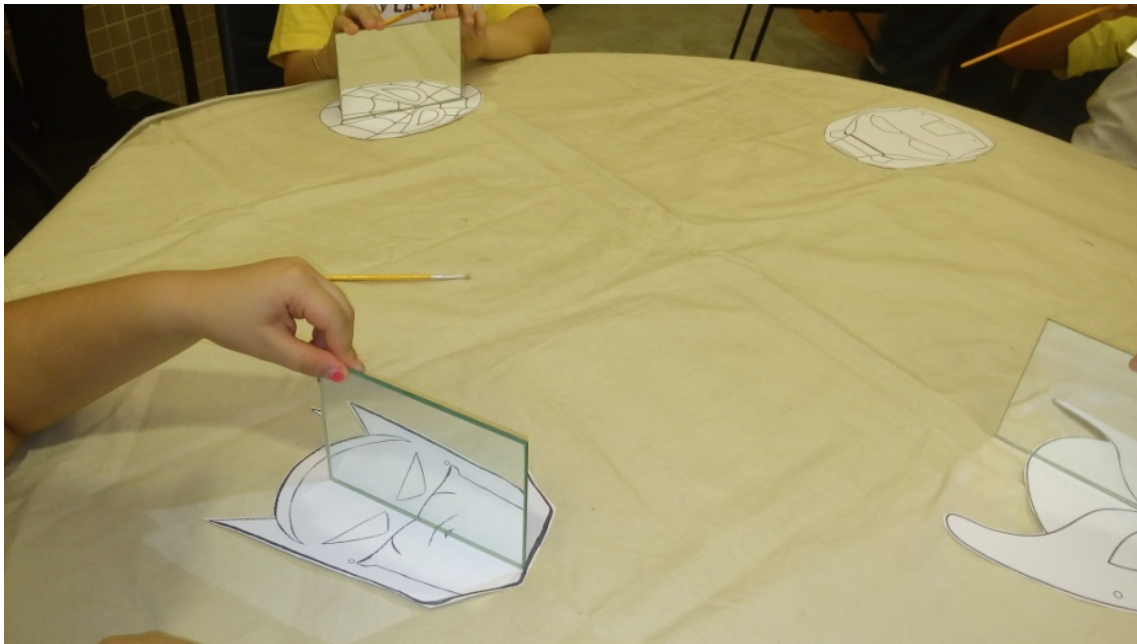


- b) Posicionando o espelho em várias posições, você seria capaz de formar todas as figuras desenhadas na cartela?
- c) Escolha uma das figuras desenhadas na cartela, na qual você possa desenhar um segmento de reta indicando a posição em que o espelho deveria estar posicionado para que uma parte desta figura e a sua imagem formassem esta mesma figura.
- d) Há outras figuras sobre as quais você possa desenhar um segmento de reta indicando a posição do espelho como você fez no item anterior?
- e) Escolha uma das figuras desenhadas na cartela sobre a qual você desenhou o segmento de reta. Relembrando o jogo anterior, marque um ponto sobre a figura e meça a distância deste ponto ao segmento traçado. Lembrando que parte desta figura foi obtida pelo reflexo no espelho, tente encontrar, no desenho da parte refletida, o ponto marcado e determine a sua distância ao segmento. O que você observou?

Saiba que, em Geometria, diz-se que o segmento de reta que separa uma figura como as anteriores é um *eixo de simetria da figura*. Essas figuras também são chamadas de *figuras simétricas em relação a esse eixo* e os pontos como os desenhados, são ditos *pontos simétricos ao eixo de simetria*.

Para os alunos com idades entre 7 e 8 anos foi observada a necessidade de usar primeiro o espelho e apenas uma figura, para isso uma máscara de super-herói foi entregue a cada aluno. E só depois foi entregue a cartela com várias figuras.

De acordo com Kaleff (2004), a atividade 3 reforça e completa as observações informais sobre as características dos pontos simétricos e da simetria axial plana. Já que algumas dificuldades foram apresentadas por alunos quando necessitam traçar uma parte simétrica de uma figura dada, pois se verificou que, o estabelecimento de eixos de simetria não é tarefa muito fácil, até mesmo para alguns professores.



Fotos da Atividade 3 desenvolvida no projeto *Simetria com os super-heróis*.

A quarta atividade tem como objetivo que o aluno defina o conceito de *simetria em relação a uma reta*, realize exercícios teóricos e, quando possível, esquematize uma prova envolvendo os conteúdos e suas relações.



#### Atividade 4

Você já deve ter realizado as atividades anteriores. Considere agora uma reta que indicaremos por  $m$ ;  $B$  e  $B'$  um par de pontos simétricos em relação à reta  $m$  e  $BB'$  o segmento que une  $B$  a  $B'$ .

I) Preencha as lacunas:

- o segmento  $BB'$  é \_\_\_\_\_ a  $m$ ;
- $m$  corta  $BB'$  no \_\_\_\_\_.

II) Considere todos os pontos do plano.

Seja  $F_m$  uma função que associa a cada ponto  $B$  do plano o seu simétrico  $B'$  em relação à reta  $m$ .

Saiba que, em Geometria, uma tal função é chamada de *simetria em relação à reta  $m$* , ou *reflexão em relação à reta  $m$* , ou ainda simplesmente, *simetria axial plana*.

- Você observou que  $F_m$  é uma função bijetora? Então, preencha as lacunas abaixo:
- $F_m(F_m(A)) =$  \_\_\_\_\_, para todo  $A$ ;
- a função inversa de  $F_m$  é a função \_\_\_\_\_, por esta razão, diz-se que  $F_m$  é uma *involução*;
- se  $F_m(A) = A$  então  $A$  está em \_\_\_\_\_, por esta razão diz-se que  $A$  é um ponto \_\_\_\_\_;
- se  $A$  está em \_\_\_\_\_, então  $F_m(A) = A$ ;
- se  $A, B$  são pontos do plano, qual é a relação entre os comprimentos do segmento  $AB$  e do segmento  $F_m(A)F_m(B)$ ?

Nesta atividade observa-se, novamente, a importância das considerações e discussões anteriores sobre a forma de se dobrar o papel para o estabelecimento dos *campos do jogo*, pois a visualização e a análise das propriedades características da simetria axial como uma função bijetora plana devem ser consequência das atividades realizadas.

De acordo com Kaleff (2004), a maioria dos professores concorda que, mesmo alunos dos primeiros semestres dos cursos de licenciatura em Matemática, apresentam dificuldades na leitura, na interpretação e nas provas de tais situações teóricas. Além disto, a maioria dos professores nunca ouviu falar de funções ou transformações que são involuções, isto é, aquelas transformações geométricas cuja inversa é ela mesma. Por outro lado, muitos docentes se dão conta, pela primeira vez, da existência de pontos fixos de funções. Todavia, os professores ao vivenciarem esta sequência de atividades, concordam que ao realizá-la, o aluno e, no caso, o próprio professor, vão construindo a concepção abstrata do conceito de simetria axial, partindo da observação visual, passando pelo reconhecimento informal das propriedades, para chegar a estabelecer, finalmente, a sua definição, desenvolvendo de uma maneira gradual e prazerosa a organização formal das características do conceito geométrico.

O projeto *Simetria com os super-heróis* foi finalizado em sala de aula com a montagem dos murais para a exposição. A aplicação de atividades em uma escalada crescente de dificuldade e abordadas no contexto dos super-heróis, tema que desperta o interesse dos alunos de ensino fundamental 1 e 2, possibilitou que esse trabalho fosse motivador e dinâmico.

### 3. REFERÊNCIAS

KALEFF, A. M. M. R. **Construindo o conceito de simetria axial**, Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n.35, p. 42-56, 2004.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos, 2ª Ed. Niterói: EdUFF, 2003.