



## A DIVISÃO EUCLIDIANA NO ENSINO FUNDAMENTAL – E O RESTO?

Janete Jacinta Carrer Soppelsa<sup>1</sup>

Luisa Rodríguez Doering<sup>2</sup>

Cydara Cavedon Ripoll<sup>3</sup>

### Formação de Professores que Ensinam Matemática

**Resumo:** Este artigo objetiva ressaltar a importância do resto na divisão Euclidiana desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Apresenta problemas, para o mini curso de mesmo nome, que contemplam os vários níveis e significados da Divisão Euclidiana e nos quais o resto tem papel fundamental.

**Palavras Chaves:** Divisão. Divisão Euclidiana. Resto.

### INTRODUÇÃO

As ideias de divisão entre números naturais aparecem nos primeiros anos do Ensino Fundamental.

Comparada às demais operações elementares, a divisão com números naturais é diferente no seguinte sentido. Enquanto na adição, na subtração e na multiplicação temos dois valores de entrada e obtemos apenas um terceiro valor de saída, que é o resultado da operação, a divisão com naturais envolve dois valores como resultado: o quociente e o resto. (RIPOLL et al, 2015, p. 104)

Já no segundo segmento do Ensino Fundamental, ao ampliar-se o universo numérico para o conjunto dos números racionais, a divisão muda a sua estrutura, associando a dois números racionais como valores de entrada, sendo o segundo diferente de zero, apenas um número racional como resultado, chamado quociente. Só nesse momento a divisão, não mais euclidiana, torna-se a operação inversa da multiplicação.

Todas essas considerações evidenciam que a divisão é uma operação complexa e apontam para a especial atenção que o professor deve dedicar tanto à introdução e aprofundamento da Divisão Euclidiana até o 6º ano como à divisão por ocasião do estudo dos números racionais.

Este artigo convida o professor a refletir sobre a divisão Euclidiana e o importante papel do resto, levando em conta aspectos essenciais dessa operação e

---

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Matemática. EMEF Madre Felicidade. [jsopelsa@gmail.com](mailto:jsopelsa@gmail.com)

<sup>2</sup> Doutora em Matemática. UFRGS. [ldoering@mat.ufrgs.br](mailto:ldoering@mat.ufrgs.br)

<sup>3</sup> Doutora em Matemática. UFRGS. [cydara@mat.ufrgs.br](mailto:cydara@mat.ufrgs.br)

que são muitas vezes ignorados. A partir dessa reflexão, apresentamos propostas que, acreditamos, auxiliam a promover a compreensão sobre tal operação.

Assim, no que segue,

- apresentamos reflexões sobre como a divisão é tratada nos documentos oficiais;

- descrevemos como a divisão euclidiana é introduzida em alguns livros didáticos, tanto nos anos iniciais como no segundo segmento do Ensino Fundamental, tecendo alguns comentários;

- explicitamos algumas sugestões para a abordagem da Divisão Euclidiana nos diferentes anos do Ensino Fundamental, que serão trabalhadas no mini curso proposto.

### **O QUE DIZEM OS DOCUMENTOS OFICIAIS SOBRE A DIVISÃO (EUCLIDIANA) ATÉ O 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Nos PCN (1998), ressalta-se a importância das situações-problema na compreensão dos conceitos envolvendo números e as operações entre eles, e observa-se que a preocupação com o conceito e formalização da divisão ocorre no 1º ciclo (até o 3º ano), 2º ciclo (4º e 5º ano) e 3º ciclo (6º e 7º ano), com culminância no final do 2º e início do 3º ciclo.

Nesse documento é sugerido que, no 1º ciclo, os cálculos envolvendo divisão sejam feitos apenas “por meio de estratégias pessoais” e, no 2º ciclo, que a “resolução de operações com números naturais seja feita por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos.” (BRASIL 1997, p. 51 e 59). Não é explicitado se no 1º e 2º ciclo referem-se ou não à Divisão Euclidiana.

Para o 3º ciclo é citado como objetivo resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais (BRASIL, 1998, p. 64), não chamando-se atenção para a diferença existente na abordagem da divisão em  $\mathbb{Q}$ .

É destacada também a importância de “um trabalho conjunto de problemas envolvendo a multiplicação e a divisão, uma vez que há estreitas conexões entre as situações que as envolvem” e é sugerido que, a partir de situações de multiplicação é possível formular situações que envolvem a divisão, “reforçando a estreita relação entre ambas”. (BRASIL, 1997, p.72). Cabe ressaltar que a falta de maiores

explicações pode sugerir que a divisão seja encarada como operação inversa da multiplicação.

Na Base Nacional Comum Curricular faz-se alusão explícita à Divisão Euclidiana nas Habilidades do 3º ano:

(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), **com resto zero e com resto diferente de zero**, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.

(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão **com resto zero** de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes. (BNCC, p.243, grifos das autoras).

No entanto, a Divisão Euclidiana não é explicitada no 4º ano, nem nos objetos de conhecimento nem nas correspondentes habilidades (p.246 e 247). Uma menção explícita a tal operação deveria ser feita também nesse ano escolar, como um alerta ao professor, levando ainda em conta que a habilidade EF04MA13 “Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e divisão, para aplicá-las na resolução de problemas” (p.247) pode sugerir a alguns leitores que a relação de inversibilidade cabe para qualquer divisão nesse ano escolar, quando na verdade a relação entre a multiplicação e a divisão euclidiana envolve também a adição:

$$\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}$$

No 5º ano a BNCC menciona divisão de número racional por número natural em seus objetos de conhecimento (p.250 e 251), sem qualquer alerta ao fato de que agora o resultado é um só.

No 6º ano é recomendada uma retomada das operações elementares com números naturais, “com e sem o uso de calculadora” (p.257), sem qualquer alusão ao resto da divisão. Alertamos para o fato de que a Divisão Euclidiana deveria receber maior atenção no 6º ano, etapa em que o aluno ainda precisa “revisitar” esse conteúdo, objetivando seu aprofundamento e sua plena compreensão.

## **COMO OS LIVROS DIDÁTICOS LIDAM COM A DIVISÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Em (DOERING; RIPOLL; SOPPELSA, 2017), foram analisadas 5 coleções para os anos iniciais, sendo 4 aprovadas no PNLD 2015 e uma no PNLD 2007. Em sua totalidade, a divisão é introduzida no 2º ano, logo após a multiplicação.

Com exceção da coleção aprovada no PNLD 2007, a divisão aparece sempre com um dividendo que é múltiplo do divisor, e não há qualquer menção a resto nos primeiros exemplos. Desse modo, o aluno é levado a pensar que a divisão tem também um só valor como resultado, o quociente.

Em (SOPPELSA, 2016), foram analisados 8 livros didáticos de 6º ano que abordam a Divisão Euclidiana, todos aprovados em algum PNLD.. Na maioria deles

- a divisão Euclidiana é tratada, predominantemente, com ênfase no(s) algoritmo(s), sendo o resto tratado apenas como sobra.

- os exercícios propostos requerem apenas cálculos ou abordam quase que exclusivamente as ideias associadas ao quociente;

- não é mencionado que, na divisão euclidiana, o resto deve ser menor que o divisor ou que o quociente é o maior possível, ficando incompleta a caracterização da Divisão Euclidiana.

Além disso, em todos eles,

- a chamada relação fundamental ( $a = bq + r$ ) é abandonada logo após as ideias iniciais e a apresentação de exemplos. No entanto, cabe salientar que tal relação ampara o processo inverso, não como operação inversa da multiplicação, mas sim como processo de recuperação do divisor ou do dividendo. “Como a divisão [Euclidiana] devolve dois valores, (...) no processo inverso, para resgatar um dos valores (dividendo ou divisor), precisamos de três informações – quociente, resto e dividendo (ou divisor)” (RIPOLL et al, 2015, p. 106);

## **ALGUMAS PROPOSTAS PARA OS DIFERENTES ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

A análise de livros didáticos apresentada mostra que é comum que a divisão seja tratada, predominantemente, em situações que refletem os casos em que o dividendo é múltiplo do divisor. Tal restrição não condiz com o cotidiano de um estudante. Nos PCN do primeiro ciclo do ensino fundamental reconhece-se que os alunos trazem para a escola conhecimentos e ideias construídas a partir de suas experiências do dia a dia, e chegam à sala de aula com certo conhecimento sobre a divisão e sugere-se que o professor aproveite tais vivências para introduzir e aprofundar o estudo da divisão. A seguir apresentamos algumas propostas de problemas que serão trabalhados no minicurso.

No problema a seguir, adaptado de uma atividade da coleção aprovada no PNL D 2007, objetiva-se promover, nos anos iniciais, uma sensibilização para a Divisão Euclidiana, podendo ela ser iniciada com material concreto.

**Problema 1:** Pedro ganhou 38 balas e quer oferecer uma quantidade igual de balas a cada um de seus 7 amigos. Complete a tabela abaixo para ajudá-lo na distribuição.

Distribuição das balas	Quantidade de balas distribuídas	Quantidade de balas que sobram
1 bala para cada um dos 7 amigos		
2 balas para cada um dos 7 amigos		
3 balas para cada um dos 7 amigos		
4 balas para cada um dos 7 amigos		
5 balas para cada um dos 7 amigos		
6 balas para cada um dos 7 amigos		
7 balas para cada um dos 7 amigos		
8 balas para cada um dos 7 amigos		

Essa atividade oportuniza uma comparação entre as várias distribuições em 7 partes iguais. O professor pode estimular os alunos a registrarem na segunda e na terceira colunas, além do valor, as operações realizadas para obtê-lo.

Algumas questões que podem direcionar para as ideias da divisão euclidiana, com base nessa atividade:

- Qual é o maior número de balas que cada amigo de Pedro pode receber? Sobram balas nessa distribuição? Quantas?
- A qual distribuição corresponde a menor sobra?, oportunizando a observação de que essa distribuição é a única em que a sobra é menor que o número de amigos.
- É possível distribuir 6 balas para cada um dos 7 amigos? Por quê?

A discussão deve levar os alunos a concluir que a distribuição com 5 balas para cada amigo com sobra de 3 balas é a única que tem a menor sobra possível e o maior número de balas por amigos possível, oportunizando não só a definição (essa distribuição com maior quociente e menor resto, é chamada de divisão Euclidiana de 38 por 7, sendo 5 denominado o quociente, 3 o resto, 7 o divisor e 38 o dividendo) como a ênfase, desde o início, na caracterização o resto na divisão euclidiana deve ser sempre menor que o divisor.

O mesmo contexto pode oportunizar a recuperação do número total de balas. Por exemplo, a partir da quarta linha da tabela acima, obtemos

Distribuição das balas	Quantidade de balas distribuídas	Quantidade de balas que sobram	Recuperando o total de balas
4 balas para cada um dos 7 amigos	$28 = 4 \times 7$	$10 = 38 - 28 = 38 - 4 \times 7$	$38 = 4 \times 7 + 10$

No entanto, apenas a igualdade  $38 = 7 \times 5 + 3$ , proveniente da quinta linha da tabela original, é originada pela divisão euclidiana.

Para o 6º ano, propomos um aprofundamento da Divisão Euclidiana valorizando o papel desempenhado pelo resto, contemplando situações cíclicas bem como situações em que a solução é o quociente, em que a solução é o resto e em que a solução não é nem o quociente nem o resto. Os exemplos a seguir contemplam todas elas.

**Problema 2:** Para realizar a coleta de lixo da cidade, uma empresa dividiu-a em 150 áreas, seguindo desde o primeiro dia um cronograma na ordem crescente da numeração das mesmas:

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
X	1	2	3	4	5	X
X	6	7	8	9	10	X
	...					

- Em que dia da semana as áreas 45 e 51 devem esperar o caminhão do lixo?
- Carlos mora na área 23 e diz que o caminhão fará lá a coleta em uma quarta-feira. Você concorda com Carlos?

c) Maria diz que como a área 9 terá coleta na segunda quinta-feira do cronograma, a coleta de sua área será sempre em quintas-feiras. Você concorda com Maria?

O Problema 2 objetiva que o aluno perceba o processo cíclico, não sendo necessário, portanto, completar a tabela para as demais áreas, bastando fazer uso do resto da divisão por 5. Pretende também levar o aluno a usar o cálculo como argumento e não como resposta. O último item oportuniza o questionamento sobre a possibilidade de generalização: a coleta de qualquer área será sempre em um mesmo dia da semana?

O Problema 3 contempla, em um mesmo contexto e com uma mesma divisão, situações em que a solução é ora o quociente, ora é o resto, ora é nem o quociente nem o resto. Atenção para a resposta não única para o item (b).

### **Problema 3:**

Haverá um passeio para os 123 alunos do 4º ano e seus 7 professores. Pretende-se alugar ônibus com capacidade para 55 passageiros.

- a) Se todos confirmarem presença, quantos ônibus deverão ser alugados?
- b) Para que todos os ônibus fiquem lotados, quantas pessoas não confirmadas é preciso ter? Neste caso, quantos ônibus será necessário alugar?

## **CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Neste trabalho refletimos sobre a divisão euclidiana discutindo esse tema a partir dos documentos oficiais e de alguns livros didáticos. Salientamos que ela aparece naturalmente no dia a dia dos estudantes e apresentamos propostas de atividades que contemplam e valorizam os diferentes papéis do resto.

## **REFERÊNCIAS**

ANDRINI, Á. **Praticando Matemática: 5ª série**. São Paulo: Editora do Brasil, 1989.

ANDRINI, Á. VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática: 6º ano**. 3ª ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARROSO, J. M. *et al.* **Projeto Araribá, 6º ano – Matemática**. São Paulo: Editora Moderna, 2010.

BIANCHINI, E. **Matemática 6º ano**. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: primeiro e segundo ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1992. 142 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>>. Acesso em 20 de maio de 2017.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em 20 de maio de 2017.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática: 6º ano.** 1.ed. São Paulo: Ática, 2012.  
\_\_\_\_\_. “Alfabetização Matemática”. São Paulo: Editora Ática, 2015.

DOERING, L.; RIPOLL, C.C.; SOPPELSA, J.J.C. **The Euclidean Division in the First School Years**, apresentado no II International Conference on Mathematics Textbook Research and Development, Rio de Janeiro, 2017.

GARCIA, J. “Coleção Aprender, Muito Prazer!”. Curitiba. Base Editorial, 2014.

GAY, M. R. G. “Projeto Buriti: Matemática”, 2ª ed. São Paulo: Ed. Moderna, 2011.

GIOVANNI Jr., J. R. “A Conquista da matemática”. São Paulo: FTD, 2014.

GIOVANI Jr., J. R. CASTRUCCI, B. **A Conquista da Matemática, 6º ano.** Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. Machado, Antonio. **Matemática e Realidade: 6º ano.** 6.ed. São Paulo: Atual, 2009.

ISOLANI, C. M. M. et al. “Coleção Construindo o Conhecimento – Matemática”, 1ª série. São Paulo: IBEP, 2005.

\_\_\_\_\_. “Coleção Construindo o Conhecimento – Matemática”, 2ª série. São Paulo: IBEP, 2005.

MAZZIERO, A. S.; MACHADO, P. A. F. **Descobrimos e aplicamos a matemática; 6º ano.** Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

MEC, **Base Nacional Comum Curricular**, disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> . Acesso em 13 de junho de 2017.

RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática na Educação Básica**, Vol. 1. Coleção Matemática para o Ensino, SBM, 2016.

SOPPELSA, J. J.C. **Divisão euclidiana: um olhar para o resto.** Dissertação de Mestrado. Porto Alegre – RS, 2016, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/148203>. Acesso em: 20 de mai. 2017.