



MODELAGEM MATEMÁTICA E FUNÇÃO EXPONENCIAL: UMA EXPERIÊNCIA COM A PROLIFERAÇÃO DE FUNGOS COM LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Thamires Belo de Jesus¹
Bruna Zution Dalle Prane²

Modelagem Matemática

Resumo: Este relato tem por objetivo apresentar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem envolvendo a temática de proliferação de fungos e o conteúdo de função exponencial. Este estudo foi realizado com alunos da Licenciatura em Matemática, tendo como foco o ensino de matemática para o ensino médio. Inicialmente os alunos estimularam a proliferação de fungos no pão de forma por meio de burrifação de água e conservação do produto. Uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação problema inicial (problemática), de um objetivo e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para a sair da situação problema e chegar a solução a esta situação. Os alunos construíram uma tabela com as informações de tempo (contado em dias) e área ocupada pelos fungos. Primeiro representaram os dados como par ordenado (tempo, área) em um plano cartesiano e buscaram uma função que melhor descrevia os dados. Por meio de tentativas e aproximações os alunos identificaram a função exponencial como melhor aproximação aos dados reais. Após esta conjectura inicial, utilizamos o software Geogebra para plotar os pontos, modelar a situação problema e encontrar um modelo matemático, que neste caso resultou em uma lei de formação do tipo função exponencial. Constatamos que por meio desta atividade, os alunos realizaram conexões e trouxe um maior significado ao conteúdo de função exponencial e maior aprofundamento no conceito de função.

Palavras Chaves: Modelagem matemática. Função exponencial. Proliferação de fungos

INTRODUÇÃO

O desafio de trabalhar a matemática na sala de aula em diálogo com outras áreas de conhecimento é um desafio na vida de professores na educação básica. Muito se fala no uso da matemática em várias situações do dia a dia, mas quando os professores estão trabalhando conteúdos matemáticos específicos ainda tem-se dialogado pouco sobre situações não matemáticas.

O conteúdo matemático muitas vezes é desenvolvido para resolver problemas propostos e com relação ao tema de estudo. O professor explica o conteúdo, por exemplo juros simples, e em seguida apresenta um problema que demanda dos conhecimentos de juros simples para ser solucionado. Entretanto, em muitos casos os problemas trazidos/apresentados pelos alunos se tornam mais atraentes e significativos para eles do que os propostos pelos professores e pelos livros didáticos, mesmo que nem sempre estejam diretamente relacionados com o conteúdo explicado.

¹ Licenciada em Matemática, Mestra em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal do Espírito Santo. E-mail: thamiresbelo23@gmail.com

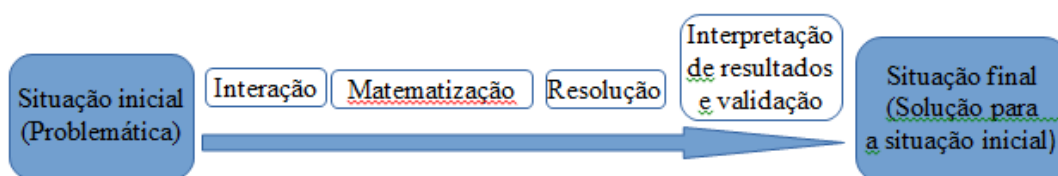
² Licenciada em Matemática, Mestra em Educação. Universidade Federal de São Carlos. E-mail: dzbruna@gmail.com

A modelagem matemática se apresenta como ferramenta para estreitar os laços entre a matemática e as outras áreas do conhecimento. Isso por que segundo Almeida (2012, p. 9) “a modelagem matemática constitui uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da matemática, um problema não essencialmente matemático”.

Na Modelagem Matemática, o processo de investigação pode ser compartilhado entre os participantes. Esse ponto vai depender do professor e do aluno, e como houve a emergência da necessidade de desenvolver a atividade, visto que, a motivação para a pesquisa parte do interesse dos mesmos pelo assunto.

Segundo Almeida (2012), uma atividade de Modelagem Matemática envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizam como: interação, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

Figura 1: Fases da Modelagem Matemática



Fonte: Almeida (2012)

Neste sentido, este estudo tem por objetivo relatar uma experiência realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática sobre a investigação da proliferação de fungos no pão de forma. Buscaremos ao longo do texto evidenciar os aspectos matemáticos, por meio das estratégias utilizadas pelos alunos para essa investigação.

MODELANDO A EXPERIÊNCIA

Esta experiência foi desenvolvida durante a disciplina de Modelagem Matemática com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. A disciplina tem por objetivo trabalhar a Modelagem Matemática com olhar para discussões da Educação Básica, principalmente para turmas do Ensino Médio. Ao todo trinta licenciandos em Matemática participaram da atividade.

A modelagem matemática foi utilizada como aporte teórico, a medida que fomentou a discussão com os estudantes e análise da experiência; e como aporte metodológico no desenvolvimento da experiência.

Conforme ementa da disciplina de Modelagem Matemática o conteúdo de funções

devia ser abordado. Entretanto, desde as primeiras aulas os alunos falavam da angustia em ouvir a frase “a matemática está em todo lugar” e se viam na obrigação, enquanto futuros professores de matemática, de encontrar relação dessa com todas as áreas do conhecimento. Então, foi realizado um debate sobre as reais aplicações da matemática e questionamentos foram levantados pelos alunos sobre essa questão, visto que na sala de aula os professores utilizam sempre os mesmos exemplos de aplicação. Foi solicitado então que os alunos listassem as áreas de conhecimentos que gostariam de buscar relações com a matemática. Dentre diversas áreas listadas selecionamos as áreas da saúde e biologia. Essas foram escolhidas em consenso com a turma, pois aparentemente são áreas de atuação bem diferentes e distantes da matemática.

Uma vez definido as áreas de biologia e saúde, identificamos temas que pudessem conversar com a matemática e listamos: uso de medicamentos, forma geométrica das plantas, dosagem de anestesia, epidemia, entre outros. Com base nos temas levantados, a professora sugeriu que a turma estudasse sobre epidemias, pois a docente tinha como hipótese que epidemia teria alguma relação com a matemática. Neste momento destacamos o receio da professora em trabalhar com situações problemas totalmente desconhecidas devido aos diferentes rumos que a atividade poderia tomar e das dificuldades em relacionar o tema com a matemática durante o desenvolvimento da atividade.

Após buscar um tema mais objetivo que dialogasse com epidemias a professora encontrou reportagens falando sobre a proliferação de fungos e, aproveitando a campanha realizada na escola sobre boas práticas de higiene decidiu então propor aos alunos que estudassem sobre proliferação de fungos e os mesmos aceitaram o desafio. Assim fomos motivados pela pergunta: como ocorre a proliferação de fungos?

A experiência foi dividida em diferentes momentos, inicialmente os alunos realizaram uma pesquisa bibliográfica sobre os tipos de fungos e as formas de proliferação e por meio de uma roda de conversa compartilhamos as informações. De forma direcionar a atividade, a professora sugeriu que a turma investigasse a proliferação de fungos no pão de forma. Então a turma pesquisou sobre formas de proliferação e descobriram que o pão tende a ser tomado por fungos quando está úmido.

No segundo momento todos os grupos acompanharam a proliferação dos fungos no pão de forma por meio de registro fotográfico e os dados foram compartilhados ao longo da experiência por meio de um grupo do WhatsApp.

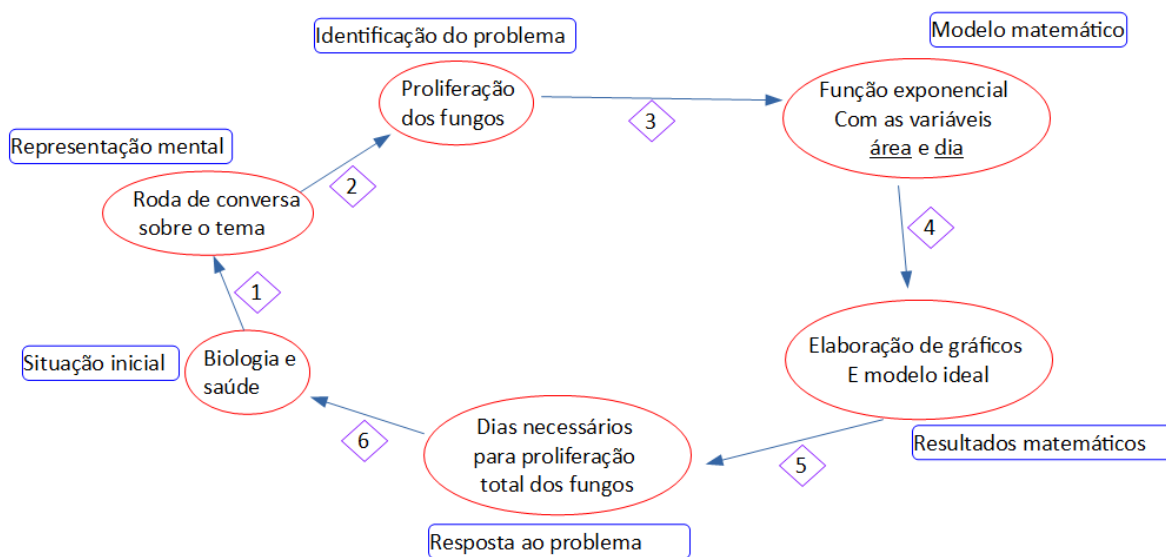
Durante a experiência os alunos quantificaram a área tomada pelos fungos, com o objetivo de discutir os dados e comparar a proliferação de cada grupo com base no ambiente

de armazenamento, temperatura do local e borrifação de água.

Findada a etapa de acompanhamento e registro da proliferação de fungos, os grupos realizaram a síntese dos dados, para posterior resolução do problema. Cada grupo procurou a melhor forma para interpretar os dados.

No momento seguinte cada grupo compartilhou por meio de seminário as estratégias usadas para modelar o problema e as conclusões obtidas, alcançando a última etapa da modelagem, comunicação e argumentação. O esquema a seguir ilustra todas as fases desenvolvidas na experiência e diálogos com as fases da modelagem e as ações cognitivas dos alunos.

Figura 2: Fases da Modelagem Matemática e ações cognitivas dos alunos



Fonte: Adaptado de Almeida (2012)

Na figura 2, cada etapa da modelagem matemática está associada as ações cognitivas que os alunos desenvolvem a cada etapa. Na ação 1, compreensão da situação, os alunos pesquisaram sobre biologia e saúde e, por meio de uma roda de conversa, compreenderam a situação para a seguir definir o problema de investigação, proliferação de fungos. Na ação 2, estruturação da situação, os alunos realizaram o acompanhamento da proliferação dos fungos e registraram os dados da área a cada dia. Na ação 3, matematização, eles modelaram o problema com a interpretação das áreas como uma função exponencial, tomando como variável independente os dias e variável dependente a área. Na ação 4, síntese, os alunos elaboraram gráficos para ilustrar um possível o modelo matemático e os resultados alcançados. Na ação 5, interpretação e validação, eles realizaram a comparação entre os modelos e validaram os mesmos. Por fim, na ação 6, comunicação e argumentação, cada grupo apresentou seu modelo para a turma e defendeu por que poderia ser considerado o

modelo ideal.

MATEMATIZANDO A EXPERIÊNCIA

A modelagem matemática pode ser concebida como uma abordagem pedagógica para o processo de ensino e aprendizagem de matemática, assim:

tem como aporte maior a realização de investigações em sala de aula que tem um problema como ponto de partida, a intencionalidade na busca, as hipóteses como fatores que se colocam no caminho para indicar direções e em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 22)

Tendo como nosso ponto de partida a pergunta: como ocorre a proliferação dos fungos? fomos buscar em Donato (2008) informações sobre o tema. Segundo referido autor “os micro-organismos são grupos variados de organismos unicelulares microscópicos, que vivem na natureza como células isoladas ou em agregados celulares”. Esta definição congrega os grupos bactérias, arqueas, fungos, protozoários e vírus. Essas bactérias trabalham sem parar para decompor a matéria orgânica do meio em que ela se encontra. “Esta é uma função absolutamente vital porque, caso não ocorresse, os nutrientes não tardariam a estar todos encerrados em corpos mortos” (ODUM, 2004, p. 42-43). Partindo desse ponto de vista, chegamos à conclusão que seria inviável a vida na Terra sem o trabalho dos micro-organismos.

Durante o desenvolvimento da experiência definimos, em conjunto, alguns critérios para orientar a investigação: a forma como os grupos estimulariam a proliferação de fungos, o dia e hora em que todos iniciariam o experimento de estimulação e acompanhamento da proliferação dos fungos. Os alunos julgaram ser melhor estabelecer os critérios para evitar manipulação nos dados.

Todos os grupos compraram pão de forma dentro do prazo de validade. A proliferação foi estimulada por meio da borrifação de água no pão e conservação do mesmo num local coberto e arejado. Esperávamos que os fungos se proliferassem sem o estímulo da umidificação, porém constatamos que o pão de forma enrijeceu antes que os fungos se proliferassem. Motivados pelas buscas bibliográficas, descobrimos que esse fato pode ser justificado pela pesquisa ter sido realizada numa cidade com temperaturas elevadas e que a solução seria umedecer o pão de forma com água para estimular a proliferação de fungos.

O acompanhamento da proliferação dos fungos foi feito por meio de registro fotográfico e os dados foram compartilhados ao longo da experiência por meio de um grupo do WhatsApp. Cada grupo compartilhou fotos, descrição detalhada da coleta dos dados

especificando área infestada pelos fungos e tempo da experiência. Selecionamos as informações do grupo A para elucidar a discussão teórica conforme relato a seguir.

O grupo A iniciou a experiência numa sexta-feira e o processo de monitoramento da proliferação dos fungos durou sete dias. Nos três primeiros dias (sexta, sábado e domingo) não houve proliferação de fungos, conforme ilustrado na figura 3.

Figura 3: Pão de forma sem proliferação de fungos.



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

A partir do quarto dia da experiência o grupo começou a identificar proliferação de fungos e iniciou as medições e registros.

Figura 4: Dia 4 com proliferação de $0,16\text{cm}^2$



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

No quarto dia de experiência o grupo mediu $0,16\text{cm}^2$ de área infestada de fungos e no quinto dia $0,54\text{cm}^2$. Nos dois primeiros dias de proliferação de fungos os alunos tiveram dificuldades em calcular a área atingida, visto que se tratava de áreas irregulares, foi então utilizado aproximações para obter os resultados.

Figura 5: Dia 5 com proliferação de $0,54\text{cm}^2$



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

No sexto dia de experiência o grupo constatou rápido aumento na proliferação dos fungos com área medindo $2,76\text{ cm}^2$. Para obter a medida desta área o grupo aproximou inicialmente a forma descrita pelos fungos por um círculo, mas um dos integrantes alertou que a forma se aproximava de uma elipse, visto que era achatada nos polos. Assim o grupo teve que recorrer ao livro didático de Geometria Analítica para recordar como se determina o cálculo da área de uma elipse.

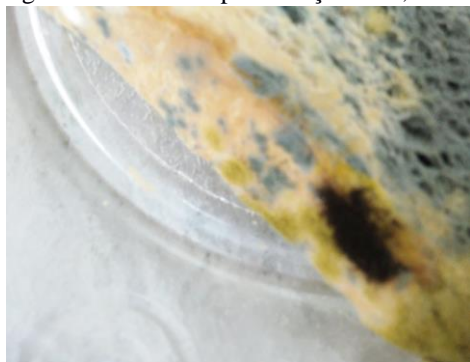
Figura 6: Dia 6 com proliferação de $2,76\text{ cm}^2$



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

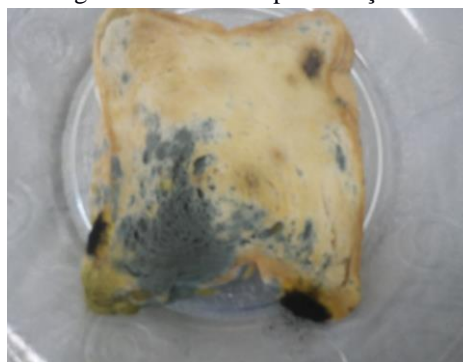
Para obter a área de proliferação no sétimo e oitavo dia o grupo utilizou pequenas tiras de papel, a fim de cobrir toda a área tomada pelos fungos com o objetivo foi formar figuras próximas de polígonos conhecidos para que então a área pudesse ser calculada.

Figura 7: Dia 7 com proliferação de 8,78 cm²



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Figura 8: Dia 8 com proliferação de 27,61 cm²



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Durante todo o processo os alunos utilizaram uma lupa para auxiliar na identificação das áreas tomadas pelos fungos. De forma geral, os cinco grupos utilizaram os seguintes instrumentos para medição da área tomada pelos fungos: régua, pequenas tiras de papel, lupa e linha. Ressaltamos que estas estratégias foram criadas pelos próprios grupos demonstrando a aquisição de autonomia na hora de utilizar as ferramentas matemáticas. Dos cinco grupos, três encontraram valores de área próximos e seguiram a mesma linha de descoberta descrita pelo grupo A, um grupo não conseguiu finalizar a coleta de dados, pois não conseguiram aproximar a área de infestação. Um dos grupos não conseguiu acompanhar a proliferação dos fungos, pois deixaram o pão de forma cair no chão e o mesmo foi contaminado e com isso os fungos tomaram toda a área do pão antes que o grupo realizasse o registro.

Findada a etapa da coleta dos dados e análise da proliferação dos fungos, os grupos construíram uma tabela com as informações de tempo (contado em dias) e área ocupada pelos fungos.

Tabela 1: Tabulação dos dados do grupo A

DIA	ÁREA (cm ²)
1	0
2	0
3	0
4	0,16
5	0,54
6	2,74
7	8,78
8	27,61

Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Após tabulação dos dados o grupo A sugeriu que a turma realizasse a análise das variáveis tempo e área infestada pelos fungos para saber quão rápida foi a proliferação. Com base nessa sugestão a professora orientou que os alunos construíssem um gráfico para facilitar

a análise das variáveis.

Porém, inicialmente o grupo A notou, pela tabela 1, que ao dividir um número pelo seu antecessor o resultado dava aproximadamente três ($27,61 \div 8,78 = 3,14$; $8,78 \div 2,74 = 3,20$; $2,74 \div 0,54 = 5,07$ e $0,54 \div 0,16 = 3,37$), ou seja, o aumento da área poderia ser descrita por uma potência de base três. E após marcar os pontos no plano cartesiano notaram que aparentemente os pontos formavam um crescimento exponencial pela familiaridade com a função exponencial.

A fim de aprimorar o esboço do gráfico e verificar se o crescimento da área infestada era realmente exponencial, a professora sugeriu que os alunos utilizassem os softwares Geogebra para plotar os pares ordenados (tempo, área). Mas ainda assim os alunos apresentaram dificuldades para encontrar a lei de formação da função que descrevesse os pontos do gráfico, mesmo que já tinham como hipótese ser uma função exponencial.

Neste momento a professora iniciou a mediação a fim de estimular os alunos a encontrar a lei de formação. A mediação aconteceu por meio da pergunta: Como fazemos para descobrir a equação de uma reta com base em dois pares ordenados conhecidos? Ao responder a pergunta os alunos verificaram que bastava substituir os pontos na equação da reta. Então, alguns sugeriram que fizéssemos o mesmo para a lei e formação geral da função exponencial.

Com base na lei de formação da função exponencial $f(x) = A \cdot e^x$ com A constante, x o dia que foi coletado o dado e $f(x)$ a área resultante daquele dia, os grupos substituíram os pontos tabulados e chegaram a modelos aproximados para a proliferação de fungos. Cabe ressaltar que não foi discutido com a turma o porquê da utilização da base e ; em uma próxima experiência vale essa observação.

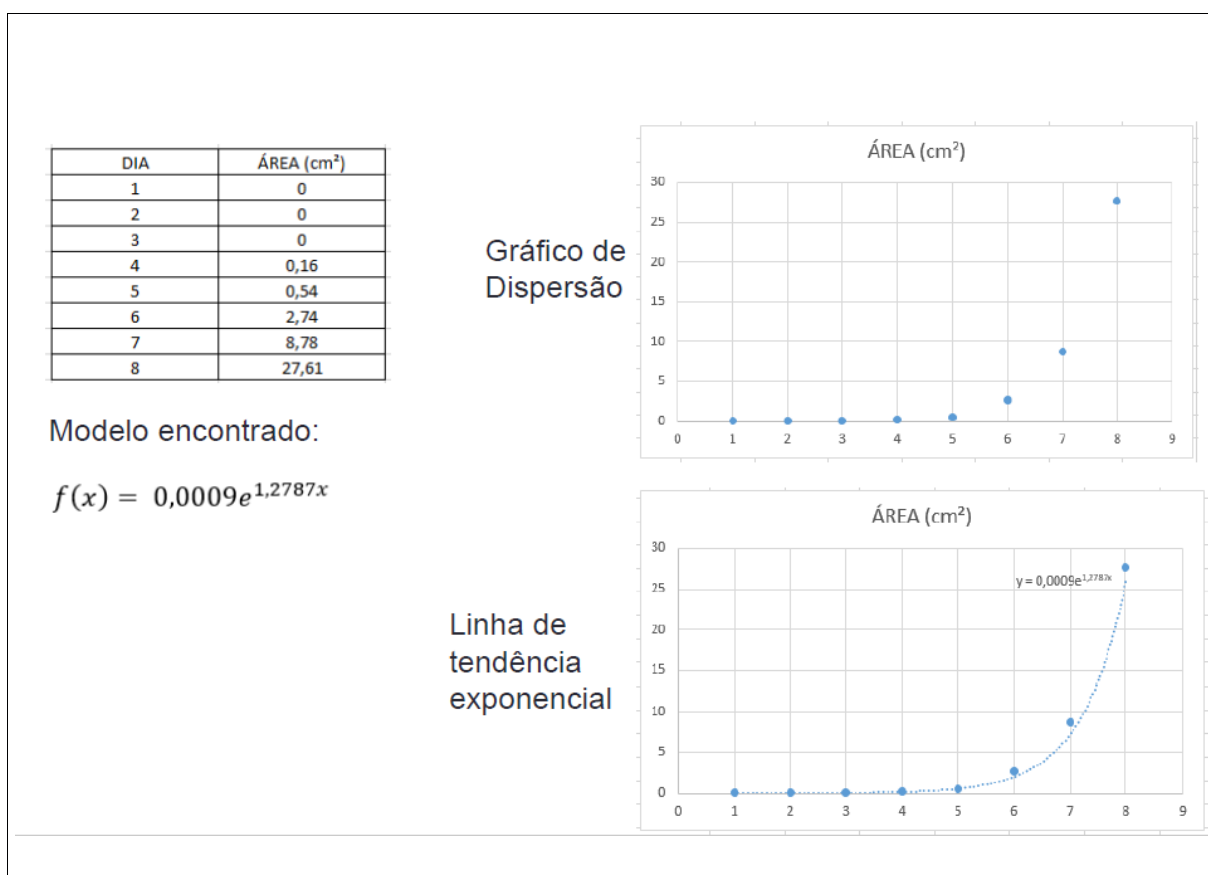
Os integrantes do grupo A substituíram os valores do quarto, quinto e sexto dia na função $f(x) = A \cdot e^x$ e chegaram aos valores $A = 0,00293$, $A = 0,00363$ e $A = 0,00679$ respectivamente. Como precisamos de apenas um valor para A , o grupo decidiu calcular a média entre os três valores para encontrar o valor que melhor representava os três resultados encontrados e chegaram ao valor final para a constante A igual a $0,00445$ e modelo $f(x) = 0,00445 \cdot e^x$. Não aprofundamos a discussão com o grupo do porquê calcularam a média dos valores.

Além da função exponencial, foi sugerido pelos demais grupos que o avanço da região proliferada poderia ser descrito matematicamente por progressões geométricas, função cúbica, função exponencial e função afim. Após a identificação de funções possíveis para descrição dos dados, os alunos constataram que a função exponencial poderia ser a função que melhor descreveria os dados.

Além disso, indagamos os alunos quanto a possibilidade de usar as informações dos três primeiros dias para encontrar os valores das constantes A e B. A princípio os alunos não viram problema em utilizar os pares ordenados (1, 0), (2,0) e (3,0), onde a coordenada x representa o número de dias transcorridos do início da experiência e y representa a área encontrada. Entretanto, ao serem questionados a pontuar as características do domínio e imagem da função exponencial, constatamos que os pontos (1, 0), (2,0) e (3,0) descrevem a situação-problema real, mas não satisfazem a imagem da função ($f(x) > 0$).

Após analisarmos os modelos encontrados e as propriedades da função exponencial, usamos os softwares Geogebra e Excel com o objetivo de encontrar modelos mais refinados.

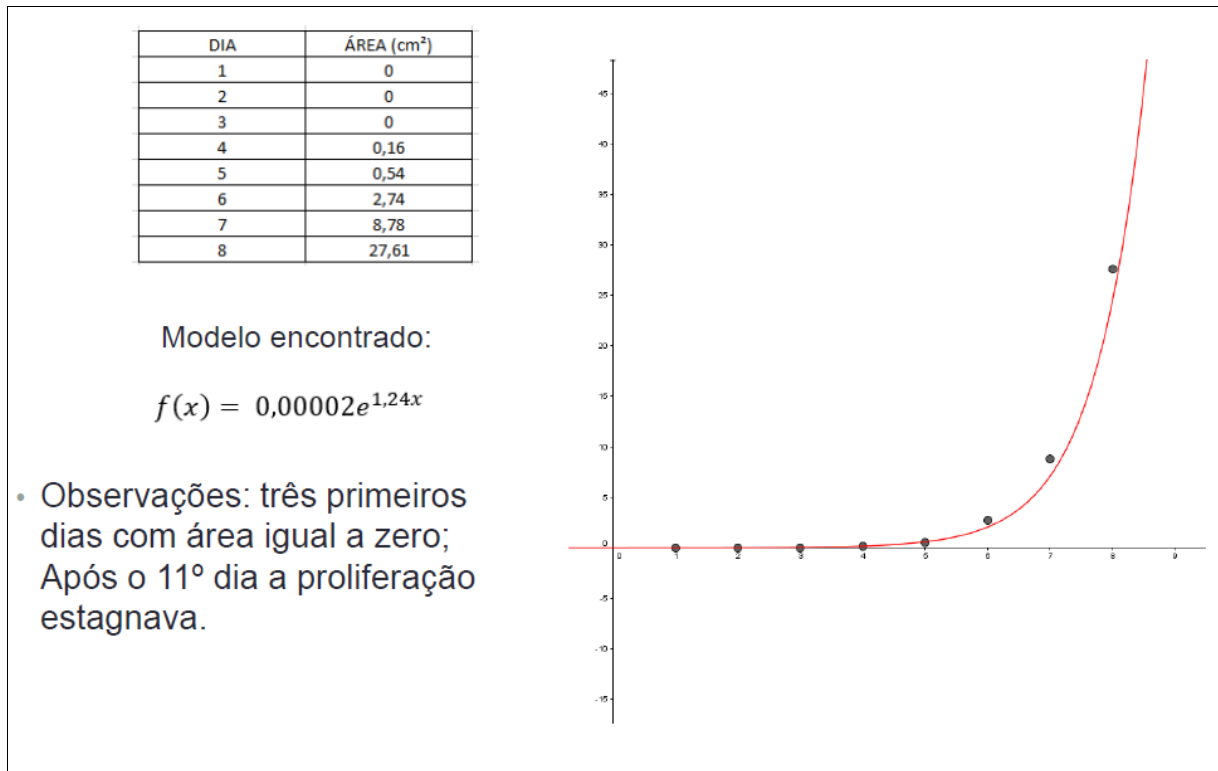
Figura 9: Modelando no Excel – dados do Grupo A



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

No Excel utilizamos a função gráfico de pontos e Linhas de tendência. No Geogebra iniciamos com a construção da planilha do Excel e, em seguida, exportamos os dados para a interface do Geogebra conforme figura a seguir.

Figura 10: Modelando no Geogebra – dados do Grupo A



Fonte: Arquivo dos pesquisadores

Tomando o grupo A como exemplo e comparando os modelos encontrados, a saber: $f(x) = 0,00445 \cdot e^x$ (sem uso da tecnologia), $f(x) = 0,0009 \cdot e^{1,2787x}$ (com uso do Excel) e $f(x) = 0,00002 \cdot e^{1,24x}$ (com uso do Geogebra), o que melhor descreve a situação problema real foi o modelo encontrado por meio do software Geogebra, tendo em vista que ele satisfaz com maior precisão os dados coletados durante a experiência.

ALGUMAS REFLEXÕES FINAIS

O presente relato buscou apresentar uma experiência de modelagem desenvolvida no curso de licenciatura, mas como o objetivo de ser trabalhada no ensino médio, acreditamos que esse tipo de trabalho seja de importante, pois permite mostrar aos professores e/ou licenciados uma possibilidade desenvolver a Modelagem.

Outro ponto que é importante de ressaltar é que algum matemático pode questionar que a modelação apresentada não é a que melhor tradução a situação. Sobre isso gostaríamos de destacar dois pontos. Primeiro é o que Silva (2014, p.17) aponta sobre o modelo matemático, este “construído é, na verdade, *uma* representação da realidade sob a ótica daqueles que investigam a situação”, ou seja, o foco da atividade era para os conteúdos do

ensino médio, assim as ferramentas matemáticas utilizadas foram as que esse nível possui. O segundo que vai ao encontro do primeiro, é que o objetivo desta disciplina de Modelagem é desenvolvida no curso de Licenciatura em Matemática, com o foco na Educação Básica.

Burak (2014) chama a atenção de termos clareza de qual o objetivo da disciplina de modelagem ministradas nos cursos de matemática, pois para cada perspectiva terá um tipo de abordagem. Além disso, a forma de desenvolver a modelagem voltada para o nível da Educação Básica é diferenciada, visto que os alunos estão construindo os conhecimentos matemáticos posto no currículo, de certa forma, a intervenção do professor em certas situações será muito maior na condução das atividades.

Assim, os licenciados estando na posição de estudantes, precisavam pensar também enquanto futuros professores de matemática e quais seriam pontos positivos e negativos do uso da Modelagem no ensino de matemática na educação básica. Como pontos positivos os licenciandos destacaram a liberdade dada aos alunos e não fragmentação dos conteúdos, com a modelagem a matemática é mais real, mais próxima do dia a dia. Entretanto, alegaram que terão certo receio em aplicar este tipo de atividade, pois não é possível realizar um planejamento antes, pois cada aluno ou grupo pode usar uma estratégia diferente e o professor deve conhecer estas estratégias para ajudar os alunos.

A frase “a matemática está em todo lugar”, que foi um dos pontos que motivou o trabalho, conforme descrito, nos possibilitou ver que a biologia e a química, por exemplo, também está em todo lugar, a questão é saber qual a lente que você vai usar para compreender o problema. Elas nos ajudaram a compreender a situação quando percebeu-se que a proliferação de fungos só seria possível, por meio da borrifação de água visto a peculiaridade da temperatura da cidade onde a pesquisa foi desenvolvida. Além disso, esse tipo de situação ilustra para os estudantes que quanto mais lentes forem usadas, melhor se entende o problema. A modelagem é uma das metodologias que proporcionam essa dinâmica, de convidar outras áreas para dialogar.

Destacamos, que na situação apresentada, não focou-se apenas em resolver o problema por meio cálculos e sim questionar outras questões. No caso apresentado, após realização da experiência discutimos com os alunos, sobre os possíveis desdobramentos que este estudo pode alcançar. Após realizar o experimento seria possível, por exemplo, levar os alunos para o laboratório de microscopia, junto do professor de Biologia, para que eles possam visualizar e analisar melhor os fungos. O trabalho também pode ser realizado em parceria com o professor de química a medida que podem ser aplicados diferentes compostos químicos no pão de forma para verificar a interferência destes compostos na velocidade de proliferação de fungos,

poderíamos estudar quais são os danos que seria para a saúde ao comer um pão com fungos, pois como foi visto do primeiro ao terceiro dia não havia fungos aparente, mas isso não quer dizer que eles não existam, apenas não estão perceptíveis a olho nu.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre como fazer Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de modelagem na educação matemática**: Relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: EDUEL, 2011. p.19-43.

BURAK, D. Modelagem Matemática nos diferentes níveis de ensino: uma perspectiva Modelagem Matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática 12., 2014, Campo Mourão . **Anais...** Campo Mourão : UNESPAR, 2004 v. 1. p. 1-23..

SILVA, K. A. P. Modelagem matemática nos diferentes níveis de ensino. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática 12., 2014, Campo Mourão . **Anais...** Campo Mourão : UNESPAR, 2004 v. 1. p. 1-23..

DONATO, A. **Microbiologia do solo e o ensino de Biologia**. Monografia (requisito para obtenção do título de Licenciada em Ciências Biológicas), Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Campus de Cascavel, 2008.

ODUM, E. P. **Ecologia**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988. 434 p.