IMAGEM DO CONCEITO DE DERIVADA EM CURSO DE EXTENSÃO SOBRE ENSINO DE CÁLCULO COM BASE NA ANÁLISE DE UM MODELO FÍSICO

Guilherme Vier[1]

Débora da Silva Soares[2]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: O objetivo deste artigo é identificar de que modo os estudantes compreendem o conceito de derivada e como utilizam-no para interpretar e compreender o fenômeno de queda livre na análise de seu modelo matemático. O contexto da pesquisa é um curso de extensão oferecido a estudantes de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do Rio Grande do Sul, o qual propôs o estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I com base na análise do referido modelo matemático. A pesquisa é de cunho qualitativo e baseia-se nos estudos de Tall e Vinner (1981) acerca dos processos de construção e modificação de um conceito matemático pelos alunos. A análise dos dados apontou para o uso de imagens do conceito de derivada relacionadas ao fenômeno físico e à interpretação geométrica do conceito mobilizadas para analisar e compreender o fenômeno físico estudado.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo, Derivada, Imagem do Conceito, Tecnologias Digitais, Modelagem Matemática.

INTRODUÇÃO

Em Soares e Vier (2017) apresentamos os primeiros resultados de uma pesquisa[3] cujo contexto é um curso de extensão que propõe o estudo de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI) com base na análise do modelo matemático para o fenômeno de queda livre, com o uso do software Modellus[4]. Na ocasião, nosso objetivo foi analisar que tipo de diálogo os estudantes produziam no desenvolvimento das tarefas propostas. Neste artigo, damos continuidade à referida pesquisa, desta vez focalizando os relatórios escritos produzidos pelos estudantes. Em particular, buscamos identificar de que modo os estudantes compreendem o conceito de derivada e como utilizam-no para interpretar e compreender o fenômeno estudado.

---

[1] Discente do curso de Licenciatura em Matemática e bolsista BIC de Iniciação Científica. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. gv.vier@gmail.com

[2] Doutora em Educação Matemática. Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Departamento de Matemática Pura e Aplicada, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil. Membro Associado do GPIMEM. debora.soares@ufrgs.br

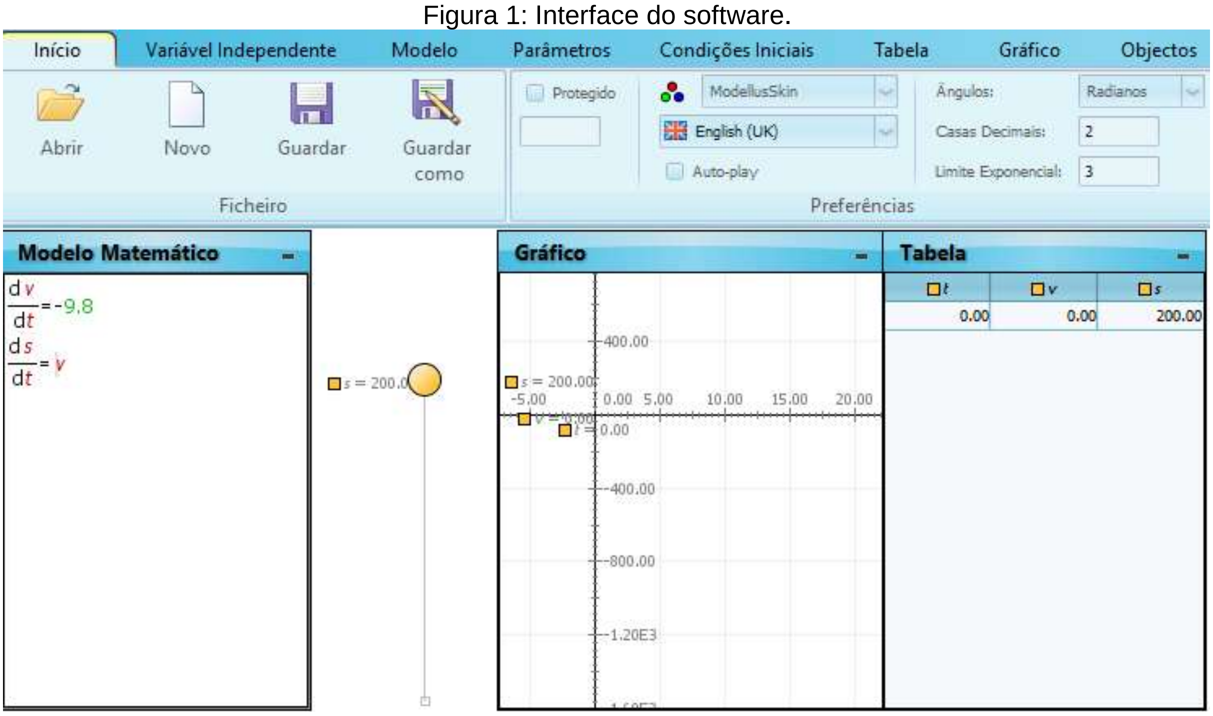
[3] Projeto de Pesquisa "Desenvolvendo conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I com base na Análise de Modelos e no uso de Tecnologias Digitais: tensões emergentes." coordenado pela segunda autora deste artigo.

[4] Website: <http://modellus.co> Acesso em: 12 de junho de 2017.

O fenômeno proposto para estudo foi o de um objeto em queda livre, modelado pelo seguinte sistema de equações $\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -9{,}8 \\ \frac{ds}{dt} = v \end{cases}$,onde *t* é o tempo em segundos, s é a posição do objeto em metros por segundo ao quadrado e *v* é a velocidade do objeto em metros por segundo. Um conjunto de cinco tarefas foi proposto aos estudantes, fomentando o debate acerca de diferentes conceitos de CDI, tomando como base o estudo do modelo matemático. A ideia era a de que, com base na análise do modelo matemático, de seus parâmetros e de suas soluções, os estudantes fossem refletindo acerca dos conceitos matemáticos e que, por outro lado, a reflexão acerca desses conceitos os auxiliassem no entendimento do fenômeno físico e de seu modelo. A este modo de trabalhar com modelos em sala de aula, chamamos de Análise de Modelos (SOARES, 2012; SOARES; JAVARONI, 2013; SOARES, 2015).

As tarefas foram todas desenvolvidas com o software Modellus, o qual permite, dentre outras possibilidades, o estudo de equações diferenciais ordinárias e sistemas delas. A Fig.1 apresenta a interface do software, onde visualizamos uma janela para a inserção do modelo; abas para configuração de parâmetros, condições inicias, gráficos e tabelas; e a área de trabalho onde são apresentados gráficos e tabelas das soluções do modelo.

Figura 1: Interface do software.



Fonte: Acervo dos pesquisadores.

O design das tarefas propostas para o curso considerou como base a visão epistemológica sobre o uso de tecnologias proposta pelo construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). De acordo com este construto, a unidade de produção de conhecimento é um coletivo formado por seres-humanos e mídias (por exemplo, oralidade, lápis-e-papel, computador, internet). Esta unidade destaca um papel central das mídias nos processos de produção de conhecimento, o qual decorre de dois aspectos: a reorganização do pensamento (o pensamento é organizado conforme as possibilidades e restrições oferecidas pela mídia); e a moldagem recíproca (a mídia molda o pensamento, assim como o indivíduo molda a mídia) (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Conforme apontado em Soares e Vier (2017), com base em Soares (2012), o papel central do software Modellus foi o de permitir aos estudantes acesso às soluções do modelo em representações gráfica e tabular, assim como possibilitar a condução de "experimentos" a partir da variação de parâmetros e de condições iniciais do modelo. Além disso, o software reorganiza o próprio processo de análise de um modelo, de modo que ele pode ser entendido como um processo de Modelagem Matemática com um ciclo reduzido (Soares, 2015).

Estes aspectos teóricos embasaram a construção do curso de extensão supracitado (Soares; Vier, 2017). Este curso foi oferecido a estudantes de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do Rio Grande do Sul e foi conduzido em 2015, em encontros semanais de 3 horas cada, totalizando 24 horas. Quatro estudantes participaram do curso, sendo que todos já haviam cursado a disciplina de CDI previamente. Durante o desenvolvimento do curso, fizemos gravações em áudio e em vídeo, elaboramos caderno de campo, e recolhemos os relatórios escritos produzidos pelos estudantes, os quais se constituíram como os dados da pesquisa, a qual é de cunho qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Conforme mencionamos anteriormente, neste artigo focalizamos os relatórios escritos produzidos pelos alunos. No que segue, apresentamos o referencial teórico que embasa nossas análises.

IMAGEM E DEFINIÇÃO DO CONCEITO DE DERIVADA

Entendendo o cérebro humano como uma componente complexa e não puramente lógica como a lógica matemática, Tall e Vinner (1981) propõem fazermos uma distinção entre conceitos matemáticos formalmente definidos e processos cognitivos pelos quais eles estão sendo concebidos. Segundo eles, muitos conceitos são utilizados sem estar formalmente definidos, sendo apreendidos por experiências pessoais e usados em determinados contextos, podendo ou não posteriormente ter seu significado refinado do ponto de vista matemático.

Usualmente, um conceito é dado por um símbolo ou nome pelo qual o conceito é comunicado e mentalmente manipulado. Porém, a estrutura cognitiva que compreende o significado do conceito é muito maior do que a evocação de um ou mais símbolos. Nesse sentido, os autores denominam como *imagem do conceito*[5] "a estrutura cognitiva total à qual um conceito está vinculado, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados" (Tall; Vinner, 1981, p. 2).

Esta imagem do conceito é construída com o passar dos anos e se modifica à medida que o indivíduo entra em contato com o conceito e suas representações; todas as imagens mentais e processos ligados ao conceito são adicionadas à imagem do conceito. Dessa forma, Tall e Vinner nomeiam como *imagem evocada do conceito*[6] "a parte da Imagem do conceito ativada em determinado tempo" (Tall; Vinner, 1981, p. 2). Aparentemente, em um mesmo processo de significação, imagens conflitantes de um conceito podem ser evocadas simultaneamente; o que pode não ser percebido pelo indivíduo, pois ele usa o que considera apropriado.

Pensando na definição formal de um conceito, os autores denominam de *Definição do Conceito*[7] "uma forma de palavras utilizada especificar o conceito" (Tall; Vinner, 1981, p. 2), podendo ser uma reorganização pessoal de uma definição. Em outras palavras, definição do conceito é a forma com a qual o aluno explica sua imagem (evocada) do conceito. Também tende a ser modificada com o tempo podendo ou não divergir da definição formal do conceito, isto é, a definição aceita por uma determinada comunidade matemática.

Para cada indivíduo a definição de um conceito gera imagens pessoais desse conceito, estas podendo ser vagas ou incoerentes em relação à definição formal. Podem, por exemplo, se resumir a fórmulas e definições prontas sendo insuficientes

---

[5] Tradução de "Concept image".
[6] Tradução de "Evoked concept image".
[7] Tradução de "Concept definition".

em contextos que exijam uma imagem generalizada da definição. Ou, por outro lado, a imagem da definição pode estar presente na imagem do conceito, mas não ser evocada pelo indivíduo, pois isso depende de quais partes do cérebro são excitadas durante as atividades. Nesse sentido, os autores entendem que a definição pessoal do conceito pode conflitar com outras imagens do conceito, ou ainda com a definição formal, o que resultaria em raciocínios inconsistentes e respostas incoerentes com a definição formal.

No presente artigo pretendemos analisar quais imagens do conceito de derivada são evocadas pelos alunos e de que forma são mobilizadas para analisar e melhor compreender o fenômeno físico ao longo do processo de resolução das tarefas.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Conforme comentamos na Introdução deste artigo, nosso objetivo é identificar de que modo os estudantes compreendem o conceito de derivada e como utilizam-no para interpretar e compreender o fenômeno de queda livre. Nesta seção apresentamos recortes dos relatórios escritos dos estudantes buscando identificar que imagens do conceito de derivada são evocadas na resolução de duas das tarefas propostas no curso de extensão.

A primeira tarefa tinha como objetivo uma primeira análise do fenômeno físico e do modelo matemático que o descreve, assim como um contato inicial com o software Modellus. A ideia central das questões desta tarefa era propor que os estudantes analisassem o comportamento de uma bola em queda livre, tomando como base a animação, os gráficos e a tabela fornecidos pelo software. Estavam presentes quatro estudantes, aqui denominados como E1, E2, E3 e E4. A seguir apresentamos as questões 3 e 4 da primeira tarefa e as respostas dos alunos.

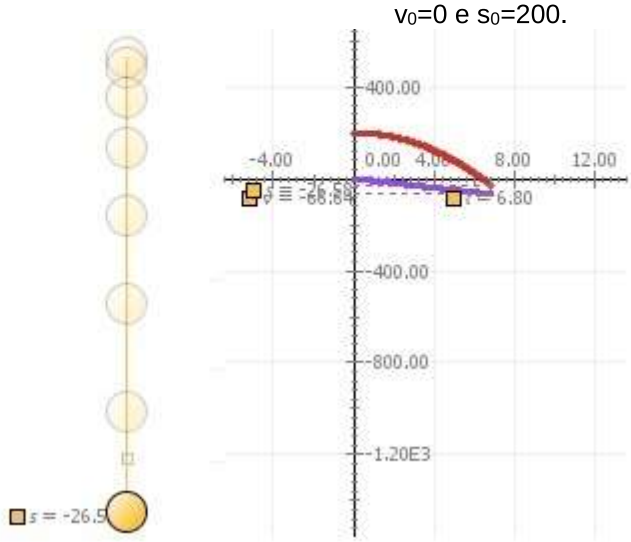
Figura 2: Questões 3 e 4 da tarefa 1.

3) Analise os gráficos de *v* e de *s* em função do tempo. Qual é o seu comportamento? Este comportamento está em concordância com o movimento da bola analisado por meio da animação? Por quê?

4) Analise as equações do modelo. Descreva, com suas palavras, o significado das equações. Você consegue relacionar as informações dadas pelas equações com a animação e com os gráficos? De que forma? Justifique.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Figura 3: Animação, gráficos da *sxt* (vermelho) e *vxt* (roxo) e tabela dos valores de *v* e *t* com v_0=0 e s_0=200.



t	v	s
5.50	-53.90	51.78
5.60	-54.88	46.34
5.70	-55.86	40.80
5.80	-56.84	35.16
5.90	-57.82	29.43
6.00	-58.80	23.60
6.10	-59.78	17.67
6.20	-60.76	11.64
6.30	-61.74	5.52
6.40	-62.72	-0.70
6.50	-63.70	-7.02
6.60	-64.68	-13.44
6.70	-65.66	-19.96
6.80	-66.64	-26.58

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Os alunos E2 e E4 escreveram a seguinte resposta (Fig. 4) para a questão 3:

Figura 4: Questão 3, Tarefa 1, E2 e E4.

Analisando os gráficos, percebemos que a animação está em concordância com as representações das variáveis no plano cartesiano, pois à medida que o tempo passa, a posição aumenta "ao quadrado", por isso que os espaçamentos entre cada rastro aumentam com a partícula em movimento. Visto que a velocidade é a derivada primeira da posição e que a aceleração é a derivada segunda da posição em relação ao tempo.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Neste excerto, observamos que os alunos iniciam a resposta afirmando que o comportamento do gráfico *s*(*t)* (Fig. 3) está em concordância com a animação, a qual simula uma bola em queda livre com imagens estroboscópicas (Fig. 3). Os alunos referem-se a essa imagem estroboscópica como “rastro” e observam que os espaços entre esses rastros aumentam ao longo do tempo, comportamento que, segundo eles, está de acordo com o gráfico de *s*(t). O trecho “(...) a posição aumenta ‘ao quadrado’” nos dá indícios de que os alunos estão visualizando que a função *s*(*t*) é quadrática. Estes indícios são reforçados pela afirmação de que “a velocidade é a derivada primeira da posição”. Como o gráfico da velocidade (Fig.3) é uma reta, nos parece que os alunos estão utilizando como base a ideia de que a derivada de uma função quadrática é uma função afim. Nesse sentido, consideramos que eles utilizam o conceito de derivada para justificar a afirmação de que o movimento da animação está em concordância com o comportamento do gráfico de *s*(*t)*, relacionando o conceito de derivada às variáveis do fenômeno físico. Deste modo, nos parece que a questão evocou nos alunos duas imagens do conceito de derivada: uma relacionada ao fenômeno físico (velocidade é a derivada primeira da posição); e a outra relacionada à diferença de um grau entre uma função polinomial e sua derivada.

Estas duas imagens do conceito de derivada são novamente evocadas na resposta à questão 4 da tarefa 1, conforme podemos observar no excerto da Fig. 5 abaixo:

Figura 5: Questão 4, Tarefa 1, E2 e E4.

Considerando as equações iniciais e as funções:

$$\frac{dv}{dt} = -9.8 \qquad \frac{ds}{dt} = v$$

S = So + V.t – at²/2, sabendo que a = 9,8m/s², o sinal negativo representa o referencial do movimento, pois ele é positivo na direção ↑ e a força gravitacional representada por a é positiva na direção ↓ .

Derivando a função S, apresentada acima, obtemos V, função velocidade, dada por: V = Vo - at.

Assim, a função posição no plano está quadrática, já a função velocidade está como uma função afim, por isso visualizamos os rastros da animação mudando de forma quadrática.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Neste excerto as duas imagens do conceito de derivada mencionadas acima aparecem mais explicitamente. Os alunos apresentam a lei da função *s*(*t*) e a derivam para encontrar a lei da função *v*(*t*). Além disso, concluem: “Assim, a função posição no plano está quadrática, já a função velocidade está como uma função afim, por isso visualizamos os rastros da animação mudando de forma quadrática”.

Seguindo a análise da primeira tarefa, apresentamos a resposta (Fig. 6) dos alunos E1 e E3 para a questão 3:

Figura 6: Questão 3, Tarefa 1, E1 e E3.

> O gráfico da posição S descreve o comportamento de uma parábola. Denotando a velocidade V como a inclinação da reta tangente em qualquer ponto da curva descrita por S, vê-se que ao longo do tempo a reta tangente fica cada vez mais inclinada, indicando assim um aumento na velocidade V.
>
> O gráfico da velocidade V descreve o comportamento de reta decrescente, pois a aceleração é negativa. A velocidade com que a bola caiu aumentou conforme o tempo de animação registrou, o que está de acordo com os valores obtidos na tabela se analisarmos o módulo da velocidade.

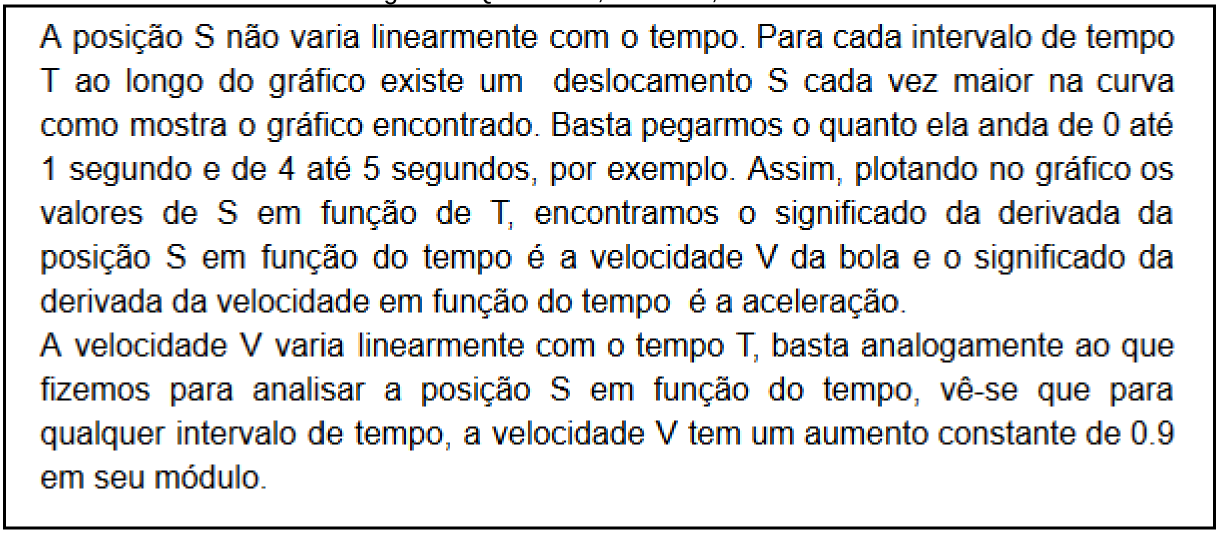
Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Neste excerto, observamos que os alunos iniciam a resposta afirmando que o gráfico de *s(t)* (Fig. 3) é uma parábola, não apresentando uma justificativa para tal. Em seguida, argumentam que o aumento da inclinação da reta tangente ao gráfico de *s*(t) indica um aumento na velocidade ao longo do tempo. Observamos que os estudantes utilizaram duas imagens do conceito de derivada em sua argumentação: a primeira relacionada ao fenômeno físico, identificando a função velocidade como a derivada da função posição; e a segunda, geométrica, identificando a derivada de *s*(*t*) como a inclinação da reta tangente ao gráfico da posição no ponto de coordenada *t*.

No trecho “O gráfico da velocidade V descreve o comportamento de reta decrescente, pois a aceleração é negativa” outra imagem do conceito de derivada relacionada ao fenômeno físico é utilizada implicitamente: a função aceleração como derivada da função velocidade. Nos parece também utilizarem uma imagem geométrica do conceito de derivada relacionada ao fenômeno físico: o valor negativo da aceleração, nesse caso -9,8, é o coeficiente angular da função velocidade, o que implica em uma reta decrescente.

As imagens do conceito de derivada relacionadas ao fenômeno físico aparecem mais explicitamente na resposta à questão 4 da tarefa 1 como é possível ver abaixo (Fig. 7).

Figura 7: Questão 4, Tarefa 1, E1 e E3.



A posição S não varia linearmente com o tempo. Para cada intervalo de tempo T ao longo do gráfico existe um deslocamento S cada vez maior na curva como mostra o gráfico encontrado. Basta pegarmos o quanto ela anda de 0 até 1 segundo e de 4 até 5 segundos, por exemplo. Assim, plotando no gráfico os valores de S em função de T, encontramos o significado da derivada da posição S em função do tempo é a velocidade V da bola e o significado da derivada da velocidade em função do tempo é a aceleração.
A velocidade V varia linearmente com o tempo T, basta analogamente ao que fizemos para analisar a posição S em função do tempo, vê-se que para qualquer intervalo de tempo, a velocidade V tem um aumento constante de 0.9 em seu módulo.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Observando o comportamento da posição em diferentes intervalos de tempo de mesmo tamanho, a partir do gráfico de *s*(*t)* e da tabela (Fig. 3) apresentados pelo software, os estudantes afirmam que a função posição (Fig. 3) não varia linearmente. Com uma análise semelhante da função velocidade (Fig. 3), afirmam que ela varia linearmente, com variação igual a 0,9 em intervalos de tempo unitários. Entre uma análise e outra, entretanto, os estudantes concluem que a velocidade é a derivada primeira da posição em relação ao tempo e que a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo, o que evidencia a imagem do conceito de derivada mencionada acima.

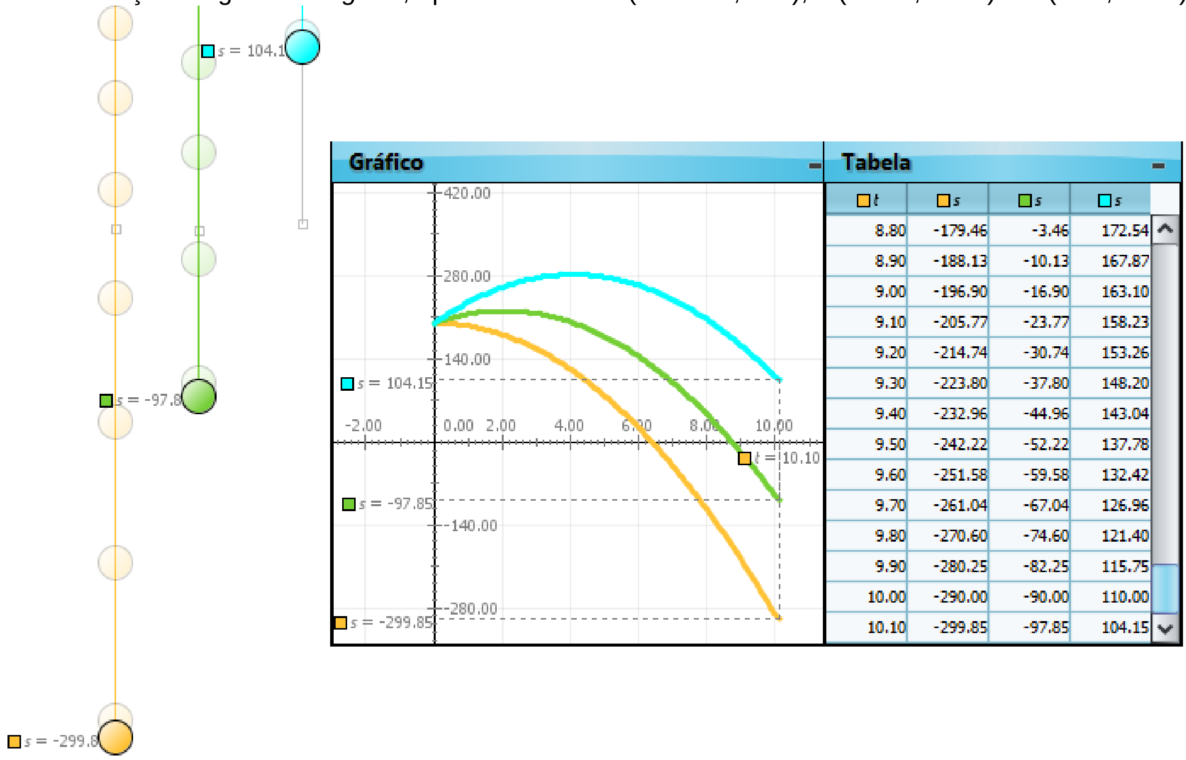
A segunda tarefa tinha como objetivo a continuidade da análise do fenômeno físico e do modelo matemático que o descreve. A ideia central das questões desta tarefa era propor que os estudantes analisassem o comportamento da bola em queda livre e dos gráficos de *s*(*t)* e *v*(*t)* em diferentes casos, a partir da mudança dos valores de parâmetros e das condições iniciais, como aceleração e velocidade, tomando como base a animação, os gráficos e a tabela fornecidos pelo software. Vamos analisar as questões 4 e 6 dessa tarefa. Para a questão 4 fixou-se a posição inicial e a aceleração da gravidade, e variou-se as velocidades iniciais (0, 20 e 40). Para a questão 6 fixou-se a posição e a velocidade iniciais, e variou-se as acelerações da gravidade (na Terra 9,8; em Marte 3,71; e em Júpiter 24,79). Estavam presentes três estudantes, E1, E2 e E4.

Figura 8: Questões 4 e 6 da tarefa 2.

4) Analise os gráficos de v e de s em função do tempo para cada caso. Qual é o seu comportamento? Este comportamento está em concordância com o movimento da bola analisado por meio da animação? Por quê?
6) Analise os gráficos de v e de s em função do tempo para cada caso. Qual é o seu comportamento? Este comportamento está em concordância com o movimento da bola analisado por meio da animação? Por quê?

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

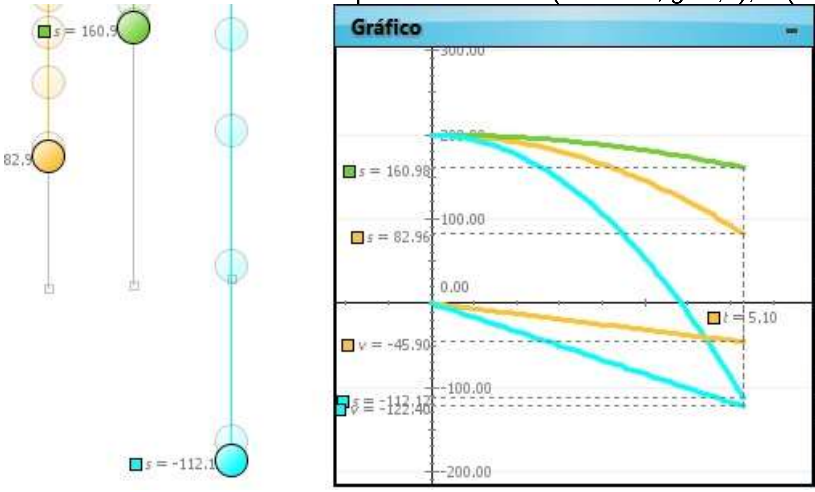
Figura 9: animação, gráficos de s(t) e tabela com valores de s e t produzidos com posição inicial 200 e aceleração da gravidade *g* = 9,8 para os casos 1 (amarelo, *v*=0), 2 (verde, *v*=20) e 3 (azul, *v*=40).



t	s	s	s
8.80	-179.46	-3.46	172.54
8.90	-188.13	-10.13	167.87
9.00	-196.90	-16.90	163.10
9.10	-205.77	-23.77	158.23
9.20	-214.74	-30.74	153.26
9.30	-223.80	-37.80	148.20
9.40	-232.96	-44.96	143.04
9.50	-242.22	-52.22	137.78
9.60	-251.58	-59.58	132.42
9.70	-261.04	-67.04	126.96
9.80	-270.60	-74.60	121.40
9.90	-280.25	-82.25	115.75
10.00	-290.00	-90.00	110.00
10.10	-299.85	-97.85	104.15

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Fig 10: animação, gráficos de s(t) e v(t) ,e tabela com valores de s e t, produzidos com posição inicial 200 e velocidade inicial nula para os casos 1 (amarelo, *g*=9,8), 2 (verde, *g*=3,71) e 3 (azul, *g*=24,79).



t	s	s	s
3.80	135.02	178.34	26.72
3.90	131.56	177.19	17.48
4.00	128.00	176.00	8.00
4.10	124.36	174.79	-1.72
4.20	120.62	173.54	-11.68
4.30	116.80	172.27	-21.88
4.40	112.88	170.96	-32.32
4.50	108.88	169.63	-43.00
4.60	104.78	168.26	-53.92
4.70	100.60	166.87	-65.08
4.80	96.32	165.44	-76.48
4.90	91.96	163.99	-88.12
5.00	87.50	162.50	-100.00
5.10	82.96	160.98	-112.12

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Os alunos E2 e E4 escreveram a seguinte resposta (Fig. 11) para a questão 4:

Figura 11: Questão 4, Tarefa 2, E2 e E4.

Analisando as tangentes do gráfico posição, que é a velocidade, temos que a tangente do gráfico do caso 2 é menor que a tangente do gráfico do caso 3, isso é coerente com a animação, pois a velocidade do caso 2 é menor que a velocidade do caso 3. Em variações de tempo iguais, que podemos avaliar através da tabela, temos variações de posição proporcionais em relação a velocidade, então, é coerente com a animação.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Neste excerto, novamente a imagem do conceito de derivada relacionada ao fenômeno físico é evocada, o que pode ser observado no seguinte trecho: "Analisando as tangentes do gráfico posição, que é a velocidade (...)". A partir daí, eles comparam as "tangentes" do segundo e do terceiro caso (Fig. 9), observando que as do segundo caso são menores do que as do terceiro, e concluem que esta relação está de acordo com a animação (Fig. 9), "pois a velocidade do caso 2 é menor que a velocidade do caso 3". Observamos que a imagem do conceito de derivada evocada pelos estudantes parece estar relacionada à interpretação geométrica deste conceito, isto é, à derivada enquanto inclinação da reta tangente ao gráfico em certo ponto. Entretanto, o termo utilizado pelos estudantes - "tangentes" - nos deixa em dúvida:

estariam eles, de fato, se referindo à inclinação da reta tangente ou à própria reta tangente? Dependendo da resposta a essa pergunta, podemos ter uma indicativo de conflito entre a imagem do conceito e a definição formal de derivada.

Estas mesmas considerações podem ser tecidas com relação à resposta dos estudantes E2 e E4 à questão 6 da tarefa 2, a qual é apresentada abaixo (Fig. 12).

Figura 12: Questão 6, Tarefa 2, E2 e E4.

> Como apontado na resposta anterior, os gráficos velocidade agora não podem mais se sobrepor um ao outro, pois cada um tem uma tangente diferente (a aceleração), no gráfico posição, como já observado nas respostas anteriores, para os casos em que as velocidades tem valores iniciais diferentes ou para os casos em que variam com acelerações diferentes, temos percursos diferentes, por isso nesses casos não temos gráficos que poderiam se sobrepor.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Entretanto, nesta questão, um novo elemento aparece: a ideia de sobrepor os gráficos (Fig. 10). Quando os estudantes escrevem: “os gráficos velocidade agora não podem mais se sobrepor um ao outro, pois cada um tem uma tangente diferente (a aceleração)”, nos parece que para tal tomam como base a imagem do conceito de derivada relacionada à sua interpretação geométrica. Quer dizer, se dois gráficos possuem retas tangentes de mesma inclinação em pontos correspondentes, então esses gráficos podem ser sobrepostos; caso contrário, não podem ser sobrepostos. No caso da situação em questão, a velocidade é uma função linear, ou seja, seu gráfico é uma reta e, portanto, retas tangentes ao gráfico coincidem com o próprio gráfico. Além disso, a aceleração é a derivada da velocidade, de modo que acelerações da gravidade diferentes implicam em coeficientes angulares diferentes nos gráficos de velocidade.

Seguindo a análise da Tarefa 2, apresentamos a resposta à questão 4 (Fig. 13):

Figura 13: Trecho do relatório, Tarefa 2, E1.

O comportamento do gráfico da posição está em concordância com o movimento da bola, pois na animação ao serem lançadas as bolas 2 e 3, as mesmas atingem um ponto máximo, que é descrito no gráfico.
Ao caírem as bolas, suas velocidades aumentam, o que é representado no gráfico, que representa de forma mais inclinada esse movimento de descida. O gráfico também representa a chegada das bolas no eixo das abscissas (posição nula), em ordem como relatada na questão anterior.
O comportamento da velocidade em módulo é crescente para todas as partículas. O que diferencia de um caso para outro é a velocidade inicial.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Neste excerto, observamos que o aluno afirma que os gráficos da posição e da velocidade estão de acordo com a animação (Fig. 9) e utiliza como justificativa diferentes elementos: ponto de máximo, “inclinação” do gráfico, intersecção do gráfico com o eixo das abscissas. Já para o gráfico da velocidade, o estudante observa que ambos os gráfico são crescentes em módulo e que o que os diferencia é o seu valor inicial.

Para a questão 6, o aluno E1 formulou a seguinte resposta (Fig. 14):

Figura 14: Trecho do relatório, Tarefa 2, E1.

O comportamento dos gráficos em função da posição, estão em concordância com os comportamentos das bolas, a curvatura da representação no gráfico da bola em Júpiter é maior em relação aos outros planetas, o que indica que sua velocidade é maior, ao passo que sua gravidade também é maior em relação aos outros planetas.
O comportamento dos gráficos em função da velocidade, estão em concordância com os comportamentos das bolas, a inclinação da representação no gráfico da bola em Júpiter é maior em relação a inclinação dos outros gráficos, o que indica que sua velocidade é maior.

Fonte: Acervo dos pesquisadores.

Neste excerto, observamos que as justificativas para a coerência entre a animação e os gráficos da posição e da velocidade (Fig. 10) utilizam os seguintes elementos: “curvatura” e “inclinação do gráfico”, respectivamente. A resposta de E1 a essas questões nos chamou a atenção por sua característica diferenciada das respostas dadas pela dupla (E1 e E3) às questões da tarefa 1. Antes, como evidenciado anteriormente, os estudantes utilizaram imagens do conceito de derivada para explicitar e justificar a coerência entre animação e gráficos. Agora, na tarefa 2, o aluno E1 não utiliza essas imagens do conceito de derivada de forma tão explícita, mas se baseia em outros elementos qualitativos do comportamento dos gráficos e da animação para construir seu argumento. Observamos, entretanto, que as ideias de “inclinação” e “curvatura” dos gráficos poderiam estar relacionadas à imagem do conceito de derivada referente à inclinação das retas tangentes ao gráfico. Entretanto, apenas com o relatório escrito não temos como confirmar esta suposição.

DISCUSSÃO

Na seção anterior, apresentamos as respostas registradas por escrito pelos estudantes a duas questões das tarefas 1 e 2. Conforme comentamos anteriormente, o objetivo dessas tarefas era que os alunos fizessem uma primeira análise do fenômeno de queda livre e do seu comportamento. Como evidenciado nos excertos, os alunos mobilizaram imagens do conceito de derivada para inferir características acerca dos gráficos e, assim, tirar conclusões sobre o fenômeno de queda livre, em especial sobre relações entre posição, velocidade e aceleração. As imagens do conceito de derivada identificadas foram:

i) velocidade como derivada primeira da posição;

ii) aceleração como derivada primeira da velocidade;

iii) relação entre a diferença de um grau entre uma função polinomial e sua derivada, e seus gráficos;

iv) derivada no ponto como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto;

v) derivada no ponto como o ângulo entre o eixo x e a reta de tangência à função no ponto.

Duas destas imagens do conceito de derivada que identificamos nos relatórios dos alunos também são apontadas por Meyer (2003), a saber: “a derivada de *f* em $x = a$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abscissa $x=a$” e “a derivada da função *f* em $x=a$ é a tangente do ângulo θ determinado pela reta tangente ao gráfico da função *f*, no ponto (a,b) e o eixo *x*, tomado no sentido anti-horário” (MEYER, 2003, p. 93).

Uma terceira imagem do conceito de derivada identificada por Meyer (2003, p.93) é “a equação da reta tangente ao gráfico de *f*, no ponto (*a*,*b*), é concebida como sendo a função derivada de *f*, quando se deseja determinar *f’*(*a*)”. Esta é uma imagem conflitante com a interpretação geométrica da derivada, que poderia estar presente na resposta dos alunos E2 e E4 às questões da tarefa 1 quando se referem ao termo “tangente”. Uma vez que não temos como confirmar esse conflito apenas com base nos relatórios, não a acrescentamos em nossa lista.

Ainda confrontando com as imagens do conceito identificadas por (Meyer, 2003), percebemos três diferenças: a imagem do conceito relacionada à redução de um grau entre uma função polinomial e sua derivada; as imagens do conceito relacionadas ao fenômeno físico, isto é, velocidade como derivada primeira da posição e aceleração como derivada primeira da velocidade; e a ausência de imagens de derivada relacionadas à definição formal do conceito enquanto limite da taxa de variação média.

Com relação às duas últimas, observamos que sua ocorrência está relacionada ao design do curso de extensão, particularmente ao objetivo de estudo do fenômeno, e ao enunciado das questões das tarefas 1 e 2, que questionavam sobre o comportamento dos gráficos de *s*(*t*) e *v*(*t*), relacionando-os com o movimento de queda da partícula, mas sem focar em algum conceito matemático. Além disso, nos chamou a atenção os alunos não mencionarem a ideia de variação (velocidade como variação da posição pelo tempo e aceleração como variação da velocidade pelo tempo), a qual é parte da definição dessas grandezas físicas e que está diretamente relacionada à interpretação da derivada como taxa de variação instantânea.

De modo geral, observamos que as imagens do conceito de derivada foram mobilizadas pelos alunos para compreender o comportamento dos gráficos de posição e velocidade, validar seus comportamentos em relação às imagens estroboscópicas da animação e inferir sobre a influência da mudança de parâmetros e condições inicias nas demais variáveis do modelo. Esta mobilização das imagens do conceito de derivada foi algo inesperado, uma vez que havíamos planejado as duas primeiras tarefas objetivando uma análise inicial do fenômeno de queda livre e nossa expectativa era de que os estudantes a conduzissem com base na observação e descrição das imagens estroboscópicas e do comportamento dos gráficos de *s(t)* e *v(t)*.

Acreditamos que outros aspectos do curso incentivaram e influenciaram a evocação das imagens supracitadas, dessa forma pretendemos futuramente identificar e analisar estas influências. Ainda, na continuidade da análise das tarefas, pretendemos identificar que outras imagens do conceito de derivada são evocadas pelos alunos, se relacionam-se com as apresentadas neste artigo e de que forma são mobilizadas para compreender o fenômeno físico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking:** information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: Springer, 2005.

MEYER, Cristina. **Derivada/reta tangente***:* Imagem conceitual e Definição conceitual. 2003. 148f. Dissertação - Departamento de Educação, PUC-SP, São Paulo, 2003.

SOARES, D. S. **Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para alunos de Biologia:** qual o papel do software*?* 2012. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2012.

SOARES, D. S. **Model Analysis with Digital Technologies:** a “hybrid approach”. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences.* Cham: Springer, 2015. p.453-463.

SOARES, D. S.; JAVARONI, S. L. **Análise de Modelos:** possibilidades de trabalho com modelos matemáticos em sala de aula. In: BORBA, M. C.; CHIARI, A. (Eds.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. P.195-219.

SOARES, D. S.; VIER, G. **Os diálogos em um ambiente de análise de modelos e tecnologias digitais para o ensino de cálculo.** *Educere et Educare*, vol. 12, nº 24, p. 1-16, 2017.

TALL, David; VINNER, Shlomo. **Concept image and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.** *Educational Studies in Mathematics*, D. Reidel Publishing Co, Boston, EUA, 12ª ed, p. 151-169, 1981.