TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS EM $\mathbb{R}^2$ EM DIFERENTES QUADROS SOB DIVERSOS PONTOS DE VISTA

Eloiza Gomes[1]

Barbara Lutaif Bianchini[2]

Gabriel Loureiro de Lima[3]

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: Por meio deste minicurso, propõe-se explorar, recorrendo-se à uma adaptação da estratégia do *Team-Based Learning* e à utilização do *software* GeoGebra, as transformações geométricas em $\mathbb{R}^2$ a partir de diferentes quadros, conforme a concepção de Douady, sob distintos pontos de vista, segundo Rogalski, contemplando a mobilização de variados registros de representação semiótica, na acepção de Duval. Serão trabalhadas atividades retomando conceitos relativos à retas no plano, dependência e independência linear, combinação linear, geradores de um subespaço, base, transformação linear e matriz canônica de uma transformação linear e, posteriormente, situações que, além de envolverem noções da Álgebra Linear, estão relacionadas a tópicos constituintes do currículo da Educação Básica.

Palavras-Chave: Transformações geométricas. Álgebra Linear. *Team-Based Learning*. GeoGebra.

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) salientam a importância das transformações geométricas estarem presentes no estudo da Geometria, nos Ensinos Fundamental e Médio. Especialmente as isometrias e as homotetias permitem uma abordagem mais geral às noções de congruência e semelhança e fornecem novos métodos para resolver uma classe de problemas geométricos. A recentemente aprovada Base Nacional Curricular Comum (BNCC) (BRASIL, 2016b) também traz as transformações geométricas como conteúdos a serem trabalhados especialmente no 7º e no 8º anos do Ensino Fundamental.

Em razão da recentemente aprovada Reforma do Ensino Médio, a BNCC para esse nível educacional ainda não foi finalizada, mas em versões preliminares anteriormente disponibilizadas, tal documento também contemplava as

[1]Doutora em Educação Matemática. Instituto Mauá de Tecnologia. eloiza@maua.br
[2]Doutora em Psicologia da Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. barbara@pucsp.br
[3]Doutor em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. gllima@pucsp.br

transformações geométricas, com a observação de que poderiam ser atreladas ao trabalho com vetores (BRASIL, 2016a).

Estando a abordagem das transformações geométricas presentes nos documentos oficiais relativos à Educação Básica, espera-se que esse tópico seja alvo de reflexão também nos cursos de licenciatura em Matemática que formarão docentes para atuarem nos ensinos fundamental e médio. Uma das disciplinas presentes nas licenciaturas na qual as transformações são abordadas é a Álgebra Linear.

A respeito da organização desta disciplina em cursos de licenciatura em Matemática, Prado (2016, p. 226) salienta que “algumas das noções, que são ensinadas na Educação Básica e podem ser exploradas em Álgebra Linear, são: conjuntos numéricos, matriz, sistemas de equações lineares, função, vetores e transformações no plano e no espaço”. Em relação especificamente ao estudo da noção de transformação, o autor destaca que sua relevância “repousa sobre as possibilidades de se estabelecer relações [...] com noções da Educação Básica” (PRADO, 2016, p. 222).

> Transformações como reflexão axial, reflexão pontual, rotação, projeção ortogonal, isometrias e homotetias, estudadas junto com suas matrizes e propriedades geométricas, formam conhecimento essencial do professor no ensino da geometria em nível básico. O professor não irá ensinar Álgebra Linear na escola básica, mas para que as recomendações curriculares sobre este tema não se restrinjam a atividades lúdicas sem interpretações, ele deverá saber os elementos que devem ser destacados nessas transformações e as razões para tal estudo (SBEM, 2013 *apud* PRADO, 2016, p. 86).

Em consonância a essa ideia, buscamos neste minicurso, considerando professores da educação básica e licenciandos em Matemática como seus principais públicos-alvo, relacionar a abordagem de transformações do plano usualmente apresentada nas disciplinas de Álgebra Linear com àquela que o professor dos ensinos fundamental e médio deverá desenvolver, em diferentes momentos, junto a seus alunos.

Propomos uma abordagem das transformações geométricas em $\mathbb{R}^2$ a partir de diferentes quadros (Geometria, Geometria Analítica e Álgebra Linear), conforme a concepção de Douady (1986), sob o que Rogalski (2001) denomina de diversos pontos de vista, como o do desenho geométrico, o funcional e o de coordenadas de pontos. Atrelados a tais quadros e pontos de vista, estarão também a mobilização de diferentes registros de representação semiótica, na acepção de Duval (1993), como o geométrico, o gráfico, o algébrico e o matricial.

Considerando as recomendações presentes em SBEM (2013, p. 29) de que as transformações devem ser exploradas por meio “do uso de elementos da tecnologia digital”, optamos por utilizar, para a resolução de algumas das atividades propostas, o *software* GeoGebra que, como pontuam Cuéllar e Salazar (2017, p. 70) é simples e fácil de utilizar, permitindo o desenvolvimento de uma série de atividades por meio de suas ferramentas e recursos e a observação de propriedades e resultados por meio de observações diretas. Além disso, o referido *software* nos permite explorar aspectos relativos às representações de objetos matemáticos em diferentes registros. A partir de suas janelas de Álgebra e de Visualização, o usuário pode trabalhar em um determinado registro, realizando modificações na representação do objeto e analisando as consequências das mesmas para a sua representação em outro registro.

A realização do minicurso, do ponto de vista metodológico, seguirá, de maneira adaptada, os preceitos de uma das modalidades de aprendizagem colaborativa, a Aprendizagem Baseada em Equipes ou *Team-Based Learnig* (TBL) como a mesma é mais conhecida no meio educacional.

A seguir, apresentamos considerações a respeito do referencial teórico que fundamenta essa proposta e sobre o TBL.

Quadros, Pontos de Vista e Registros

Segundo Almouloud (2014, p. 64), Douady (1993, p. 389) define um *quadro* “como sendo constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações”. O autor destaca que a noção de Quadros e a dialética ferramenta-objeto foram propostas por Douady que teve sua inspiração quando reparou como os matemáticos resolvem os problemas desta área. Estes, quando estão diante de um problema e não encontram uma solução utilizando ferramentas de um determinado domínio (quadro) que, de acordo com Maranhão (1999) é um ramo de conhecimento matemático, por exemplo, Geometria, Geometria Analítica, Álgebra Linear, etc. podem tentar solucioná-lo recorrendo a outro.

Consequentemente, realizar uma mudança de quadro, segundo Douady (1986 *apud* Almouloud, 2014, p. 65) é uma maneira de obtermos “formulações diferentes para um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem ter uma nova visão para as dificuldades encontradas, disponibilizando ferramentas e técnicas que não transparecem em uma primeira formulação".

Rogalski (2001, p. 15 – tradução nossa) a partir das ideias de Duval (1993) afirma que *registros* "são os modos de representação de objetos matemáticos, acompanhados de regras de tratamento, que permitem estudar problemas". A ideia fundamental, para os autores, é que o "trabalho entre diversos registros de representação é essencial para à compreensão de um objeto matemático".

Em relação aos *pontos de vista*, Almouloud (2014, p. 81) ressalta que os mesmos estão relacionados a maneiras de definir ou caracterizar um determinado objeto matemático e/ou suas propriedades. "Pontos de vista diferentes, para um objeto matemático, são maneiras diferentes de olhá-lo, de fazê-lo funcionar e, eventualmente, de defini-lo". Segundo Rogalski (2001, p. 17 – tradução nossa), uma troca de ponto de vista a respeito de um objeto matemático se dá quando trocamos de quadro ou trocamos de registro para estuda-lo, mas pode ser útil também trocar de ponto de vista dentro de um mesmo quadro ou de um mesmo registro. Neste minicurso, alguns problemas serão explorados segundo os pontos de vista do Desenho Geométrico, funcional e das coordenadas de pontos.

Aprendizagem Baseada em Equipes (*Team-Basead Learning*)

O *Team-Based Learning* (TBL), ou Aprendizagem Baseada em Equipes, tradução que tem sido usualmente adotada no Brasil, é, segundo Bollela *et al.* (2014) e Oliveira *et al*. (2016), uma estratégia instrucional desenvolvida no final dos anos 1970 na Universidade de Oklahoma, Estados Unidos, pelo professor Larry Michaelsen. Sob o ponto de vista teórico, de acordo com Bollela *et al*. (2014, p. 294), baseia-se no "construtivismo, em que o professor se torna um facilitador para a aprendizagem [...] baseada no diálogo e na interação entre os alunos, o que contempla as habilidades de comunicação e trabalho colaborativo em equipes" constituída por poucos estudantes (em geral de 5 a 7) que trabalharão no mesmo espaço físico (a sala de aula). A formação dos grupos é uma tarefa dos professores que "devem mesclar os alunos de forma aleatória e equilibrada, buscando a maior diversidade possível" (BOLELLA *et al*., 2014, p. 294).

Usualmente, a abordagem de determinado tema por meio da estratégia do TBL estrutura-se em três etapas denominadas, respectivamente, de *preparação*, *garantia* *de preparo* e *aplicação dos conceitos*. Neste minicurso, como já salientamos, recorreremos a uma adaptação do TBL. Ao invés de a *preparação* ocorrer, como prevê originalmente essa estratégia instrucional, individualmente antes do encontro em sala de aula, no minicurso proposto, como o mesmo destina-se preferencialmente àqueles que já cursaram Álgebra Linear, esta etapa será suprimida.

Com o intuito de revisar junto aos participantes noções matemáticas que serão fundamentais às discussões a serem oportunizadas por meio das atividades propostas na parte principal deste minicurso, iniciaremos nosso trabalho pela etapa da *garantia de preparo* solicitando que os participantes resolvam, primeiro individualmente (*Teste de Preparação individual* - TPi) e depois em equipes (*Teste de Preparação em equipe* – Tpe), dez questões de múltipla escolha envolvendo noções básicas sobre retas no plano, dependência e independência linear, combinação linear, geradores de um subespaço, base, transformação linear e matriz canônica de uma transformação linear.

A resolução individual dessas questões se dará conforme descrevem Bollela *et al*. (2014, p. 295): os participantes individualmente, assinalarão suas respostas em uma folha específica que os permitirão "apostar" na resposta certa ou, se estiverem em dúvida, em mais de uma resposta. Por exemplo: no caso de uma questão com 4 alternativas e valendo 4 pontos, se "o indivíduo estiver em dúvida entre a alternativa "a" e a alternativa "c", ele pode apostar 2 pontos em cada uma. Pode utilizar diversas combinações, pontuando mais se escolher apenas a alternativa correta".

Em seguida, as mesmas questões são resolvidas pelas equipes. Esse momento é descrito da seguinte maneira por Oliveira *et al*. (2016, p. 970):

> Os estudantes recebem um *feedback* imediato da resposta de cada uma das questões, só passando para a questão seguinte depois de terem entrado em consenso com a equipe sobre a questão em pauta. A ideia é que como já pensaram sobre as questões no TPi, as discussões são mais produtivas no TPe e, assim, os próprios colegas colaboram entre si para sanar as dúvidas remanescentes do TPi. O processo de *feedback* é feito por meio de Cartões de Correção Instantânea (CCI), comumente chamados de "raspadinhas". Nos cartões, a alternativa correta é indicada pelo símbolo "estrela". Se os alunos rasparem e não encontrarem a estrela, voltam a discutir a questão. A avaliação pode ser feita pelo acerto das respostas. No caso de cinco alternativas, por exemplo, se os alunos acertarem na primeira tentativa, a equipe recebe quatro pontos na questão (pontuação correspondente ao número de retângulos não raspados), se acertarem na segunda tentativa, recebem três pontos e assim sucessivamente. Se todas as alternativas de resposta para uma determinada questão forem raspadas, a equipe não pontua.

Finalizado o preenchimento dos Cartões e tendo todas as equipes encontrado a estrela, aqueles alunos que porventura não concordarem com uma ou mais respostas consideradas corretas poderão expor suas dúvidas que serão discutidas coletivamente pelo professor e pelos membros de todas as equipes, em um momento denominado de *Apelação* ou *Recurso*. “Por fim, o professor faz uma *Breve Exposição Oral* com as principais ideias trabalhadas, esclarecendo aspectos relacionados às maiores dificuldades dos alunos identificadas durante as tarefas” (OLIVEIRA *et al*., 2016, p. 972).

A etapa seguinte do TBL, a de *Aplicação dos Conceitos*, constituirá o cerne deste minicurso e será composta por uma sequência de atividades a serem resolvidas pelas equipes com o auxílio do *software* GeoGebra. Todas as equipes trabalharão simultaneamente com uma mesma questão e uma nova situação só será proposta após discutidas e analisadas as diferentes soluções propostas por cada equipe para esse problema.

Estrutura do Minicurso

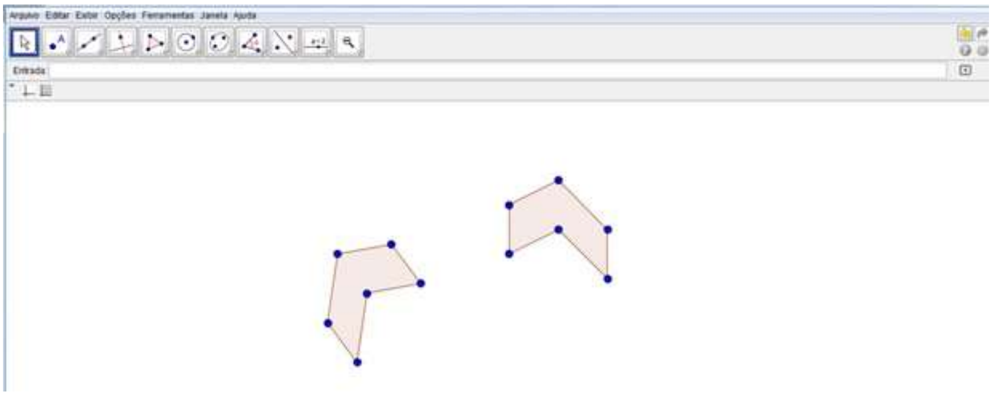
O **primeiro momento** do minicurso será destinado a uma revisão de conceitos essenciais para o desenvolvimento das atividades a serem propostas posteriormente, o que constituirá a etapa de *garantia de preparo* na adaptação do TBL que estamos propondo, conforme discutido anteriormente.

Já o **segundo momento** consistirá de uma breve familiarização com o *software* GeoGebra, ao qual recorremos em seguida nas atividades a serem resolvidas pelas equipes. Apresentaremos, dentre outras, ferramentas que permitem medir ângulo, construir retas, segmentos de reta, polígonos, mediatriz, inserir uma matriz e trabalhar com transformações geométricas.

O **terceiro momento** será efetivamente o da *aplicação dos conceitos* no qual serão propostas, sucessivamente, as seguintes atividades:

Atividade 1:

a) No arquivo Atividade1.ggb, na Janela de Visualização estão representadas um polígono e sua imagem por meio de uma reflexão em relação a uma reta. Utilizando apenas construções geométricas, trace a reta segundo a qual a reflexão está sendo realizada;



b) Habilite a exibição dos eixos cartesianos, da malha e da Janela de Álgebra e visualize a equação da reta determinada no item anterior;
c) Determine uma expressão algébrica (uma lei) que permita obter a imagem $A'(x´, y´)$ de qualquer ponto $A(x, y)$ por meio da reflexão em relação à reta anteriormente determinada;
d) A reflexão em relação a essa reta considerada é uma transformação linear? Justifique.

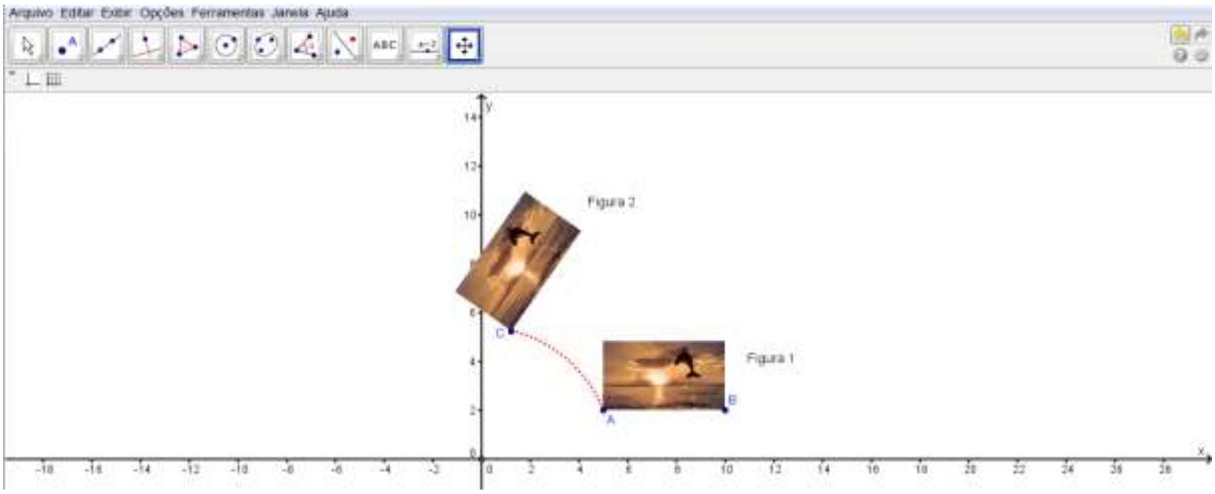
O objetivo desta primeira atividade é explorar a transformação geométrica reflexão em relação a uma reta nos quadros da Geometria (segundo os pontos de vista do Desenho Geométrico e funcional), da Geometria Analítica (sob o ponto de vista de coordenadas de pontos) e da Álgebra Linear. Serão explorados os registros figural, gráfico e algébrico. A princípio, fornecemos à equipe um arquivo produzido no GeoGebra contendo somente uma figura e sua imagem gerada por uma reflexão em relação a uma reta não especificada. Utilizando apenas o ponto de vista do Desenho Geométrico, ela determinará qual é essa reta. Em seguida, ainda no quadro da Geometria, damos início a uma abordagem da situação segundo um ponto de vista funcional, que nos levará a explorar a questão em um novo quadro, o da Geometria Analítica. Solicitamos então que os participantes, agora utilizando coordenadas cartesianas de pontos, obtenham uma lei que permita obter a imagem $A'(x´, y´)$ de qualquer ponto $A(x, y)$ por uma reflexão em relação à reta anteriormente determinada. Novamente mudando de quadro, a saber para o da Álgebra Linear, pedimos que a equipe analise se a transformação em questão é ou não linear, justificando sua resposta. A discussão deste último item permitirá analisar propriedades que caracterizam uma transformação linear.

Atividade 2:

a) Abra uma nova janela no GeoGebra e construa, recorrendo aos comandos do *software*, um polígono e sua imagem por meio de uma reflexão em relação a uma reta de tal forma que essa transformação seja linear;
b) Determine a expressão algébrica de tal transformação linear.

Nesta atividade, a ideia é trabalhar no quadro da Álgebra Linear recorrendo ao registro matricial, explorando o fato de que uma transformação linear $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser totalmente determinada pelas imagens, por meio de T, dos vetores da base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Atividade 3: No arquivo Atividade3.ggb, na Janela de Visualização estão representadas duas imagens, Figura 1 e Figura 2.



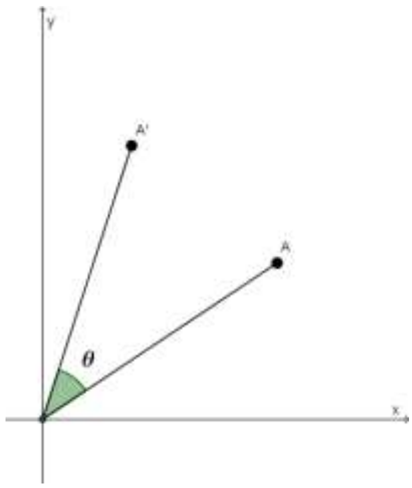
a) Qual é a matriz canônica da transformação linear que leva a Figura 1 na Figura 2?

b) Na mesma janela do arquivo Atividade3.ggb, habilite a exibição da planilha, crie a matriz determinada no item anterior e verifique se sua resposta está correta;

c) Determine agora a matriz canônica da transformação linear que leva a Figura 2 na Figura 1.

O objetivo nesta questão é explorar por meio do *software*, nos quadros da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, a transformação geométrica rotação, tanto em sentido horário, quanto anti-horário, de um ângulo θ em relação à origem.

Atividade 4: Considere a figura a seguir:



a) Qual é a matriz canônica da transformação linear que leva o ponto A no ponto A'? E da transformação linear que leva o ponto A' no ponto A?

b) Há alguma relação entre as transformações lineares presentes no item a) e aquelas com as quais trabalhamos na Atividade 3? Explique.

O objetivo desta atividade é, por meio de uma abordagem nos quadros da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, generalizar o que foi observado por meio da Atividade 3 e determinar leis que permitam obter as imagens $P'(x', y')$ e $P''(x'', y'')$ de um ponto $P(x, y)$ por meio de, respectivamente, uma rotação de um ângulo θ em torno da origem em sentido anti-horário e uma rotação de um ângulo θ em torno da origem em sentido horário.

Considerações Finais

O minicurso proposto contempla, a nosso ver, vários aspectos agregadores à formação dos participantes: a própria estratégia instrucional segundo a qual o mesmo foi organizado (o TBL); a utilização de um *software* gratuito, cada vez mais presente nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática e com potencialidades amplamente discutidas no meio acadêmico; a retomada de conceitos fundamentais da Álgebra Linear; a discussão de atividades que, além de envolverem noções da

Álgebra Linear, estão relacionadas a tópicos constituintes do currículo da Educação Básica.

Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2014.

BOLLELA, V. R.; SENGER, M. H.; TOURINHO, F. S. V; AMARAL, E. Aprendizagem baseada em equipes: da teoria à prática. In: Medicina (Ribeirão Preto), v. 47, n.3, pp. 293-300, 2014. Disponível em: http://revista.fmrp.usp.br/ - Acesso em 05 jun. 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Matemática. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Segunda versão revista. Brasília: MEC, 2016a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf . Acesso em: 05 de jun. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta preliminar. Terceira versão revista. Brasília: MEC, 2016b. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf Acesso em 05 de jun. 2017.

CUÉLLAR, D. J. G.; SALAZAR, J. V. F. Un estudio de la instrumentación de la noción de simetria axial por medio del uso del Geogebra. In: **Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo**, v. 6, n.1, pp. 68-82, 2017.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l´enseignement des mathématiques. **Recherche en Didactique des Mathématiques**: La Pensée Sauvage Éditions, v. 7.2, p. 5-31, 1986.

DUVAL. R. Registre de Représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives 5**. Strasbourg: IREM, 1993.

OLIVEIRA, T. E.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Aprendizagem Baseada em Equipes (*Team-Based Learning*): um método ativo para o Ensino de Física. In: **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 33, n. 3, pp.962-986, dez. 2016. Disponível em: https://www.recearchgate.net/publication/311742018_Aprendizagem_Baseada_em_Equipes_Team_Based_Learning_um_metodo_ativo_para_o_Ensino_de_Fisica - Acesso em 05 jun. 2017.

PRADO, E. **Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática: contribuições para a formação do profissional da Educação Básica**. 2016. 254f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

ROGALSKI, M. Les changement de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady*.* In: **Actes de la jounée em hommage à Règine Douady**, Université Paris VII, Paris, 2001.

SBEM, **A formação do professor de Matemática no curso de Licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBM/SBEM**. *BOLETIM SBEM.* Brasília: n.21, 2013. 42 p. Disponível em < http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>. Acesso em: Jul. 2015.