UMA PROPOSTA DE ENSINO DO TEOREMA DA INCOMPLETUDE DE GÖDEL EM CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Rosemeire de Fatima BATISTELA[1]

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: Nesta comunicação apresentamos uma pesquisa que explicita um modo de o ensino do teorema da incompletude de Gödel (TIG) tornar-se presente em cursos de licenciatura em Matemática. Trata-se de uma investigação realizada a nível de doutorado em Educação Matemática na linha de Filosofia da Educação Matemática, que assumiu a fenomenologia como postura durante a pesquisa e prezou pela hermenêutica no desvelar do TIG. Apontamos uma maneira de sentidos e significados do TIG serem atualizados em cursos de licenciatura em Matemática sem que seja necessária a criação de uma disciplina extra para este fim. Finalmente consideramos que o TIG pode ser trabalhado em distintas componentes curriculares durante um curso de forma que aspectos deste resultado sejam abordados e, no último semestre do curso, que a ilustração da demonstração original de Gödel seja objeto de trabalho de uma disciplina que explore e discuta os desdobramentos e consequências deste teorema para a Matemática e assim para a Educação Matemática.

Palavras Chaves: Teorema da incompletude de Gödel (TIG). Licenciatura em Matemática. Forma/ação de professores.

Apresentação

A pesquisa apresentada em Batistela (2017) desenvolveu-se no *movimento* de investigação em torno da seguinte questão norteadora: *Que sentidos e significados do teorema da incompletude de Gödel podem ser atualizados em cursos de Licenciatura em Matemática?* Movimento este que diz, conforme Joel Martins, "de andar em torno da pergunta da pesquisa em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez...” (BICUDO, 1993, p. 18).

O ensino de um teorema da dimensão do resultado trazido pelo TIG, em um curso de licenciatura em Matemática, justifica-se principalmente pelo teor da mensagem que ele transmite. O TIG é um dos resultados mais importantes da lógica matemática. Ele foi provado pelo matemático e lógico austríaco Kurt Frederich Gödel

[1] Doutora em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP Rio Claro/SP. Professora Adjunta do Departamento de Ciências Exatas, da área de Educação Matemática, da Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS, Feira de Santana, BA, Brasil. Av. Transnordestina, s/n – Novo Horizonte - CEP: 44036-900. E-mail: rosebatistela@gmail.com

(1906-1978) em 1931. Por um lado, estabelece que a teoria formalizada da aritmética dos números naturais (e todas as extensões que recorram dela) é incompleta. Por outro, que a teoria da aritmética elementar não pode representar em seu formalismo uma demonstração de sua consistência, (DA SILVA, 2010). Desdobrando-o ele evidencia que os sistemas formais com os quais as teorias matemáticas são construídas não provam verdades que não sejam as obtidas por relações formais (DA SILVA, 2010) e que a Matemática não é capaz de provar todas as verdades que ela própria estabelece, em outras palavras mostra que o conjunto de proposições indecidíveis é não vazio.

À época da divulgação da prova de Gödel a expectativa entre os matemáticos mais renomados era que a prova de que a Matemática era completa dependia de esforços dos matemáticos e era apenas uma questão de tempo. Hilbert em 1900 no Congresso Internacional de Matemática expôs os 23 problemas que ele considerava que estavam abertos e eram problemas chave da Matemática, Hilbert (2003). O problema 2, pedia pela prova da consistência dos axiomas da aritmética. A resolução positiva deste problema daria a segurança necessária, entre outras, para a completa realização do Programa de Hilbert.

A atualização de sentidos e significados do TIG é entendida como um movimento de criação de uma forma de esses sentidos e significados do teorema se tornarem presentes no horizonte da Educação Matemática. Essa atualização pode ser realizada em diferentes momentos durante um curso de licenciatura e, apresentamos um modo de se ir progredindo a discussão das ideias que o TIG estabelece em diferentes disciplinas e trazendo o tema em conexão com temáticas que constam nas ementas de componentes curriculares. Resumidamente, a proposta que apresentaremos aqui envolve a discussão das ideias entranhadas nas conclusões do TIG, bem como, um trabalho com uma demonstração ilustrativa da prova de Gödel e, também com uma demonstração formal alternativa desse resultado no contexto de uma disciplina apropriada.

Entendemos que o ensino do TIG em cursos de licenciatura em Matemática deve ser básico, pois, sendo cursos de formação de professores, devem estar preocupados com o devir dos estudantes em processo de formação, conforme Bicudo (2010) e, sendo ele um resultado cultural, ao ser trabalhado na graduação, pode possibilitar uma clareza dos professorandos e que ao trabalharem essa ideia da incompletude da Matemática possam ter conhecimento que lhes permitam ter atitudes que não alimentem a ideia plasmada no imperialismo matemático, e, assim muito mais conectada e respeitosa com sua cultura.

Forma/ação de professores

Compreendemos que processos de forma/ação são específicos à formação da pessoa e, portanto, abrangem a Educação. Bicudo (2010) observa o seguinte: “Formação concebida com ‘pro-jeto’ de possibilidades que se atualizam, definindo estilos e modos de ser da pessoa. A educação escolar realiza um afunilamento em termos dessa maneira de compreender a formação, na medida em que trabalha com um projeto pedagógico. Este aponta direções, consideradas positivas, para a atualização das possibilidades das pessoas e daquelas referentes às áreas do conhecimento, e, nessas áreas, às disciplinas. Indica posturas, modos de relacionamento, procedimentos para conduzirem o ensino e a aprendizagem.” (BICUDO, 2010, p. 216). “Forma/ação diz de um jogo que envolve o cuidado com a *forma e com a ação*, possibilita a realização do homem que se torna sendo, ou seja, fazendo.” (BICUDO, 1999, p. 3).

Na atividade de educar de um modo geral, e nesse caso podemos situar, educar matematicamente, é nuclear o *cuidado com*, que “envolve **pré-ocupação** com os rumos que o processo educacional toma, definindo possibilidades.” (BICUDO, 1999, p. 7). “Pre-ocupação com o modo de vir-a-ser do outro ou de si-mesmo; é um cuidado com a sociedade, com a preservação do existente, com o desabrochar da potencialidade do indivíduo, com a formação da pessoa...” (BICUDO, 1999, p. 3).

O significado de formação se mostra como “uma ideia de perseguir a forma ideal, construída mediante a consciência do modo de vida de um povo, de seus anseios, usos e costumes, códigos de honra, valores prezados, da força que move as pessoas na direção da percepção do dever e que as faz se sentirem orgulhosas pelos seus feitos. Mas nunca assumido o *ideal* como uma forma perfeita que submeta a *formação* a um modelo que a aprisione dentro de limites rígidos. Ideal tido como imprimindo direção ao movimento. Porém, movimento que se efetua com o que se move e isso que se move também tem sua força, o que significa que a *forma* não pode conformar a *ação,* mas a própria *ação* ao agir com a *matéria* imprime nela a forma. Há, portanto, um jogo entre *ideal*, entendido como forma que imprime direção*, ação*, movida pela força imperante que vigorosamente impele a pessoa para um ato, e que brota do sentimento de dever e de orgulho, por ter conseguido tornar-se o que se tornou, e *matéria*, constituída pela realidade de vida do povo, que abrange sua historicidade, seus mitos, seus modos de advertir, de impor preceitos, comunicar conhecimentos e aptidões profissionais." (BICUDO, 2003, p. 31).

Assim, forma/ação está sendo compreendida como um processo contínuo e ininterrupto de devir em que *forma* e *ação* estão sempre em mudança, em transformação e estão implicados mutuamente, em marcha, em movimento de acontecer junto à matéria, de ir sendo, de mover-se continuamente...

Uma proposta de ensino do TIG em um curso de licenciatura

A trajetória da investigação buscou por uma resposta sobre *como* sentidos e significados do TIG podem ir se abrindo em compreensões para os sujeitos que estejam envolvidos no processo de ensinar e de aprender esse teorema, ou seja, interrogou possíveis modos de se dar a *atualização* de *sentidos* e *significados* do TIG no horizonte da Educação Matemática. Faz-se importante notar que a questão norteadora já anunciava a *possibilidade de atualização* e *sentidos e significados* do TIG.

Desse modo, tomou-se um exemplar para a exposição da proposta. Realizou-se uma investigação sobre as ementas do curso de licenciatura em Matemática da UNESP, campus de Rio Claro[2]. Durante o estudo mostrou-se para nós um modo possível de se atualizar sentidos e significados do TIG no curso de licenciatura nestes cursos: por meio do trabalho com aspectos do TIG em diversas disciplinas que apresentam, entre os conteúdos elencados, temas em conexão com assuntos que perpassam, especialmente, as discussões do momento histórico em que o TIG foi divulgado e as ideias veiculadas pelas conclusões deste teorema.

A hermenêutica realizada com o teorema, buscando desvelar as camadas que o compõem, os sentidos e significados dele, ofereceu a nós uma percepção dos assuntos que permitem a abordagem e o trabalho com este resultado. Nossa compreensão sobre as possibilidades de conexão entre o TIG e assuntos outros segue abaixo exposta.

---

[2] A escolha se deve à autora ter realizado este curso entre os anos 1998 a 2001. O plano de curso analisado esteve vigente entre os anos de 2006 a 2015.

Notamos que se tratando de um resultado que é provado no âmbito da *aritmética de Peano*, poderia ser referenciado nos momentos em que este assunto estiver sendo focado. Da mesma forma, a ideia de resultado que anuncia impossibilidades (e possibilidades também) conecta-se até certo ponto com *os problemas clássicos da Antiguidade* (a quadratura do círculo, trissecção de um ângulo qualquer, duplicação do cubo), com o teorema de Abel sobre a impossibilidade de resolver equações de quinto grau com radicais, entre outros. O TIG, que anuncia a impossibilidade da solução positiva do segundo problema de Hilbert o qual solicitava a demonstração, na própria aritmética, da compatibilidade dos axiomas aritméticos. Este fato, que repercute na impossibilidade da realização do seu programa original, pode ser apresentado junto aos demais teoremas de impossibilidade e, ao mesmo tempo, diferenciando-o, por ser um resultado de impossibilidade obtido no âmbito da metamatemática.

O TIG aparece num momento histórico em que a Matemática vinha passando por tentativas de fundamentação em diferentes bases. As escolas intuicionistas e logicistas, cada uma pelo seu motivo, tinham fracassado na realização completa do objetivo idealizado. Os formalistas seguiam em pé, mas o resultado de Gödel de 1931 dá a última palavra que decreta a impossibilidade do intento originalmente concebido por essa escola. Esse assunto, *as correntes filosóficas que buscaram fundamentar a Matemática*, costuma ser tratado em cursos de Licenciatura e vislumbramos que este seria também uma ocasião de apresentação do TIG, pois ele aponta a impossibilidade de se fundamentar a Matemática completamente sob a base da aritmética, que era o objetivo dos formalistas. Este resultado reverbera também sob as ambições e expectativas de a Matemática ser uma ciência absoluta que produz e prova, simultaneamente, todas as suas verdades.

Outra ocasião oportuna julgamos que seja em situações de ensino em que se mostre a Matemática como uma realização histórico-cultural humana, sujeita às características de seu modo de produção, o método axiomático, e como uma ciência viva em acontecimento, ainda sujeita a dúvidas. Nesse momento, seria plausível apresentar a incompletude da Matemática como uma impossibilidade, mas também como abertura para essa ciência, já que permite um revigoramento e surgimento de outras teorias. Também seria apropriado evidenciar mudanças no modo pelo qual na Matemática são encarados os problemas após o TIG, pois esse teorema afirma que há um conjunto de problemas indemonstráveis que independe do ideal cognitivo dos matemáticos e do empenho destinado às suas provas. Estes, embora indemonstráveis, trazem ao conhecimento a natureza revigorante da Matemática que não permite se circunscrever, ou seja, ter os limites de suas teorias bem determinados e circunscritos a elas.

O tema da criação das *geometrias não-euclidianas*, por ser um resultado que diz sobre a relatividade de verdades matemáticas em relação aos axiomas do sistema, também mostra que tais verdades são restritas aos axiomas da teoria. Isso desmente a concepção de que a Matemática é uma estrutura única e totalizante, assemelhando-se à mensagem do TIG, quando afirma que haverá verdades matemáticas que não são deduzidas dos axiomas da base da teoria e que não podem ser provadas naquela teoria. Por esse viés, entendemos que cabe fazer dessa uma oportunidade de abordagem e discussão das ideias do TIG para professores em forma/ação.

Uma vez cônscios dessas aproximações temáticas possíveis realizamos um estudo pormenorizado das disciplinas elencadas na grade curricular do projeto deste curso de Licenciatura em Matemática, buscando conhecer os seus objetivos e os conteúdos estabelecidos em suas ementas. Isso permitiu-nos afirmar que a menção ao TIG, a inserção da discussão das ideias veiculadas por suas conclusões, a abordagem das ideias desse resultado, tal como a demonstração formal do TIG são plausíveis em disciplinas diferentes e de forma independente, avançando em complexidade. Compreendemos ser possível e coerente trabalhar essas ideias em disciplinas das áreas de Fundamentos da Matemática, de Educação Matemática, Geometria e Álgebra. Assim, as seguintes disciplinas são apropriadas:

A componente *Aritmética e Álgebra Elementares*[3] é uma disciplina que objetiva familiarizar os alunos com a Matemática. Por isso, tópicos dos anos anteriores do Ensino Básico são retomados e busca-se trabalhar com exemplos, integrando as demais componentes ensinadas no primeiro ano do curso. O objetivo é apresentar ao aluno um modo de trabalho que o convide à realização do curso, qual seja, demonstrar e provar formalmente. É possível e, conforme nosso entendimento, desejável, que nesta disciplina se mencione a existência do fenômeno gödeliano, mesmo que não esteja presente na sua ementa, expondo um

---

[3] Programa de ensino dessa disciplina disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0033.pdf.>.

aspecto do TIG: o de que há na aritmética fórmulas verdadeiras e que não é possível prová-las formalmente.

Observamos um ponto de tangência entre a disciplina *Teoria dos Números* com a prova da incompletude realizada por Gödel, qual seja, o teorema fundamental da aritmética que é utilizado no processo de numeração de Gödel. Assim, sugerimos que ao se trabalhar com este teorema se apresente o processo de atribuição unívoca dos números de Gödel que é garantida por este resultado.

Em *Estruturas Algébricas,*[4] quando do trabalho com o tópico previsto *problemas clássicos da Antiguidade*, pode-se apresentar o enunciado do TIG e discutir com os licenciandos a dimensão de impossibilidade que esse resultado estabelece. Ainda, salientamos que esse tópico, trata de teoremas clássicos provados posteriormente e que anunciam impossibilidades para umas coisas e possibilidades para outras, nas condições dos enunciados dos problemas. No caso do TIG, ele anuncia a impossibilidade de se demonstrar a consistência na aritmética na própria aritmética, mas não impossibilita que essa demonstração seja feita fora dela.

O programa de ensino de *Filosofia da Educação: questões da Educação Matemática*[5]*,* declara entre seus conteúdos estipulados a serem realizados, o Formalismo, o Intuicionismo e o Logicismo e, como objetivos, propõe levar os alunos a terem consciência sobre a questão ética da educação e sobre as questões específicas do ensino da Matemática e, entre outros, levá-los a refletir sobre filosofias subjacentes às linhas de pensamento e correntes de ensino de Matemática. Entendemos ser esse um ambiente apropriado para, junto com os licenciandos, pensarem sobre a postura filosófica implícita ao formalismo e refletirem sobre a mensagem que o TIG direciona a esta corrente de produção da Matemática e consequentemente de ensino de Matemática.

Por sua vez, no que tange à *História da Matemática*[6]*,* o programa de curso está direcionado a tratar da Matemática em diferentes contextos e tempos. Assim,

---

[4] O programa de ensino dessa componente pode ser acessado em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/mma5777.pdf>.

[5]Disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0038.pdf.>.

[6] O programa de ensino está disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0042.pdf>.

apresentar a dimensão cultural do TIG na Matemática nesta disciplina é oportuno. Esse assunto pode ser tratado nos momentos de discussão de episódios[7] históricos na Matemática que exibem quebra de expectativa cristalizada. A incompletude de teorias que englobem em sua formalização os axiomas de números naturais, anunciada pelo TIG, embora possa ter o tom de limitação, pois ele quebra a expectativa sedimentada de que a Matemática poderia expressar e provar todas as suas verdades. Por fim, ele abre horizonte para uma Matemática que se deu conta dessa característica da incompletude de grande parte de suas teorias, evidenciando que de forma alguma invalidou a Matemática já construída ou impossibilitou que ela continuasse sendo feita. Além disso, mostra a Matemática como uma produção humana de homens de tempos diferentes, com necessidades e anseios de compreensão conectados às questões de sua época e de seu lugar; reconhecendo um fazer matemático característico e direcionado ao alcance de soluções abstratas que sejam universais e neutras.

Focando a componente *Matemática Elementar do Ponto de Vista Axiomático*[8]*,* sugerimos que a abordagem e o trabalho mais sólido com o TIG é oportuno a essa disciplina, especialmente pela coerência com os assuntos propostos nos seus conteúdos programáticos que se referem ao estudo de sistemas axiomáticos e suas propriedades. Nessa disciplina, pode-se trabalhar com a demonstração baseada em Nagel e Newman (1973)[9], a qual apresenta uma ilustração da demonstração do TIG tal qual realizado por Gödel em 1931. Por meio desse trabalho acreditamos que seja possível proporcionar aos alunos a inteligibilidade das ideias engenhosas e dos

---

[7] Por exemplo: 1) a crise dos incomensuráveis, historiada modernamente ressalte-se, que se enreda por apresentar a superação, na própria Matemática, de uma frustração de expectativa. A 'crise' teria aberto caminhos para a construção dos números irracionais; 2) a dúvida e as tentativas de provar o quinto postulado de Euclides, o que desencadeou no surgimento das geometrias não-euclidianas, e que não invalida a geometria euclidiana; 3) a questão da decifração do infinito pelos matemáticos, cuja culminância se dá na teoria de números transfinitos de Cantor, que trata da parte matematizável do infinito. Porém, ele se vê diante de um paradoxo que envolvia a ideia de *conjunto de todos os conjuntos*. Não se pode negar que essa questão está longe de ser uma crise para a Matemática, sendo matriz propulsionadora do desenvolvimento da Matemática desde tempos remotos.

[8] Acesse o Programa de ensino em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0041.pdf>.

[9] Conscientes do objetivo deste texto, conforme anunciado por seus autores, propor uma aproximação do TIG, com liberdade de abordar o TIG no sentido amplo, sendo uma prova técnica com explicação dos detalhes, sem a preocupação de ser uma demonstração formal do teorema de Gödel. Nossa sugestão sugere o item *Demonstração do TIG baseada em Nagel e Newman (1973)* do capítulo II entre as páginas 39-54. No link: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3>.

processos utilizados por Gödel em sua demonstração original, bem como, das ideias imbricadas nela e das conclusões que ela estabelece.

Julgamos ser apropriado, na disciplina *Lógica Matemática,*[10] optativa da Licenciatura e obrigatória do Bacharelado, apresentar o estudo do TIG, em seu desenho formalizado por meio de uma demonstração formal baseada em Shoenfield (1967)[11], a qual é uma demonstração alternativa do TIG, que, notavelmente, é distinta da demonstração original de Gödel e apresenta o resultado numa versão formal e direta, desviando-se de discussões e adendos.

A proposta de inserção do TIG, entre os conteúdos a serem trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática, de forma alguma implica a subtração de algum outro conteúdo de alguma das disciplinas, aqui referidas ou de outra(s) que não tenha(m) sido aqui citada(s).

A pertinência do ensino do TIG para professores de Matemática

Em geral o TIG não é ensinado em cursos de formação professores para o ensino nas escolas de nível fundamental e médio, sendo assunto apenas dos últimos semestres de cursos de Bacharelado em Matemática. A pesquisa desenvolvida por Ribeiro Neto (2015) que investigou as ementas de disciplinas de curso de Licenciatura em Matemática que tratam de assuntos de lógica nas universidades públicas da região Nordeste do Brasil corrobora essa afirmação no âmbito regional. Ribeiro Neto (2015) analisou 28 ementas de 22 cursos e os resultados apresentados consideram que os assuntos *lógica clássica*, *teoria dos conjuntos*, *técnicas demonstrativas* e *história da lógica* predominam entre os tópicos programados em disciplinas programadas em sua grande maioria para o primeiro e segundo semestres. Ao nosso ver as considerações estabelecidas mostram em âmbito regional esse fato que é recorrente à maioria dos cursos de licenciatura em matemática no Brasil no que se refere aos assuntos de lógica: a lógica formal enquanto teoria dos sistemas formais não é elencada entre os assuntos a serem ensinados em cursos de licenciatura em Matemática.

---

[10] Plano de curso disponível em: <http://igce.rc.unesp.br/Home/Instituicao/DiretoriaTecnicaAcademica/graduacao/edm0043-logica-matematica--mat.pdf>.

[11] Referimo-nos ao item *Demonstração do TIG baseada em Shoenfield (1967)* do capítulo II entre as páginas 55-94. No link: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/148797/batistela_rf_dr_rcla.pdf?sequence=3>.

Compreender sobre o alcance do método e, para além do que será ensinado aos alunos na Educação Básica, é algo que oferece uma visão ampla dessa ciência. O teorema de Gödel traz um dado muito importante a respeito da estrutura do conhecimento matemático, a sua incompletude. Embora não impeça a continuidade da Matemática, ele frustra a grande expectativa sedimentada e bastante divulgada de que a Matemática poderia produzir e resolver toda e qualquer questão de seu próprio domínio. A Educação Matemática enquanto participante do processo de formação do profissional que trabalha ensinando Matemática deve se preocupar com o devir de seus alunos e o ensino do TIG é fundamental nessa formação.

Referências

BATISTELA, Rosemeire de Fatima. *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática*. 2017, 140 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática. *Pro-Posições,* v. 4, n. 1, p. 18-23, mar. 1993. Disponível em < http://www.ime.usp.br/~dpdias/2016/Pesquisa%20-%20Bicudo.pdf>. Acesso em: 30 mar. 2016.

______. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática*: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: Editora UNESP, 2010.

______. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011.

DA SILVA, Jairo José. O método axiomático. 2010. Curso de verão. Disponível em: <http://docslide.com.br/documents/historia-do-metodo-axiomatico.html>. Acesso em: 12 mar. 2016.

HILBERT, David. Problemas matemáticos. *Revista Brasileira de História da Matemática.* Tradução de S. Nobre. v. 3, n. 5, p. 5 -12, 2003.

NAGEL, Ernest; NEWMAN, James, R. *Prova de Gödel*. Tradução de G. K. Guinsburg. São Paulo: Editora Perspectiva e Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

RIBEIRO NETO, Nelson Alves. Uma análise sobre as ementas e as bibliografias utilizadas em componentes de lógica em cursos de licenciatura em Matemática da região Nordeste. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação em licenciatura em Matemática). Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2015.

SHOENFIELD, Joseph R. *Mathematical Logic*. London: Publishing Company, 1967.