



## DESCOMPLICANDO FÓRMULAS MATEMÁTICAS POR MEIO DO GEOPLANO TRADICIONAL E DO GEOPLANO DIGITAL

Marília do Amaral Dias<sup>1</sup>

Maria Elaine dos Santos Soares<sup>2</sup>

### Educação Matemática no Ensino Médio

#### Resumo

O presente minicurso tem como objetivo demonstrar fórmulas matemáticas relacionadas com a Geometria Plana, a Geometria Analítica e a Trigonometria utilizando como recurso principal o Geoplano, tanto com o uso de material manipulativo como, também, com recurso computacional. Por ser dinâmico, o Geoplano é um modelo matemático que permite traduzir ou sugerir ideias matemáticas. Num sentido mais exato, serve de suporte concreto para a representação mental, sendo um recurso que leva a realizar ideias abstratas. O Geoplano cumpre o papel de facilitador do processo ensino-aprendizagem e auxilia no desenvolvimento de habilidades necessárias à construção de raciocínio lógico-matemático, de forma prazerosa. Assim sendo, o trabalho matemático não se constitui somente em memorização de fórmulas, mas sim, naquele conhecimento que o aluno compreende e constrói. Neste minicurso, pretende-se explorar o Geoplano, em experiências de aprendizagem que leve à dedução de fórmulas sobre a soma dos ângulos internos de polígonos convexos, número de diagonais, Teorema de Pitágoras, apótema e lado de polígonos regulares inscritos em uma circunferência, áreas das principais figuras planas, relação fundamental da trigonometria, distância ente dois pontos, entre outras.

**Palavras-Chaves:** Fórmulas. Geometria. Trigonometria. Geoplano. Polígonos.

## 1 INTRODUÇÃO

Para a compreensão e dedução de algumas fórmulas da Geometria Plana, da Geometria Analítica e da Trigonometria optou-se por utilizar, como recurso didático o Geoplano, de forma manipulativa, com uso de Geoplanos construídos em madeira, e com o uso do Geoboard<sup>3</sup> (Geoplano Digital), em experiências de aprendizagem que levem o aluno a construir, guiado pelo pensamento lógico, seus próprios conceitos matemáticos. Não se deve esquecer que esse recurso é apenas um dos meios auxiliares do ensino e, sempre que se fizer necessário, é importante complementá-lo com outros meios instrumentais para possibilitar a inter-relação entre o concreto e o

<sup>1</sup>Mestre em Ciência da Computação. Universidade Católica de Pelotas. mariliaadias@gmail.com

<sup>2</sup>Doutora em Ensino de Ciências e Matemática. Instituto Federal Sul-rio-grandense – Campus Pelotas Visconde da Graça. mесоares@gmail.com

<sup>3</sup> Disponível em: <http://www.mathplayground.com/geoboard.html>. Acesso em: 13 jun.2017.

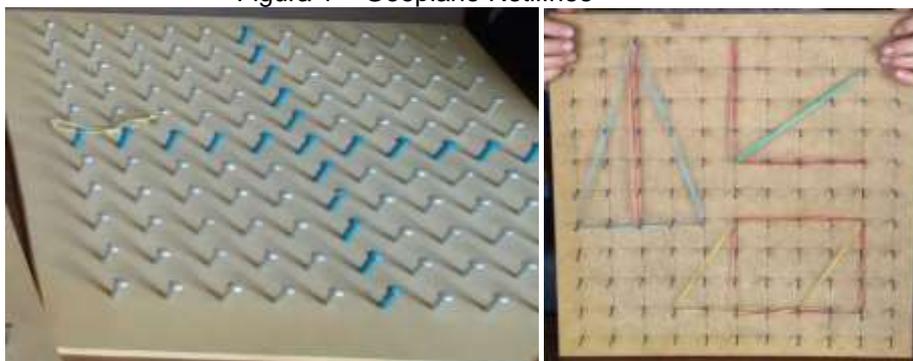
abstrato. Por isso, neste minicurso, utilizam-se também dobraduras e recortes com a finalidade de explorar outros recursos juntamente com o Geoplano.

O idealizador do Geoplano foi o inglês Caleb Gattegno. Em 1950, o grupo formado por Caleb Gattegno (Pedagogo e Matemático Inglês), Jean Piaget (Psicólogo) e G. Choquet (Matemático) fundaram a Comissão Internacional para o Estudo e Aprimoramento do Ensino da Matemática, destinada a pesquisas nesta área. Anualmente, esse grupo organizava convenções em diversos países, com o objetivo de coordenar estudos e experiências realizadas.

Geoplanos, do Inglês Geobords e do Francês Geoplans, pode ser utilizado na exploração de vários conteúdos ligados a Aritmética, Álgebra, Geometria (Plana, Espacial e Analítica) e Trigonometria. Esse instrumento é um recurso didático que se pode classificar como múltiplo e dinâmico porque permite a representação de numerosas situações e possibilita o movimento da imagem das figuras no plano e no espaço e, se manipulado adequadamente, auxilia na compreensão de inúmeros conceitos matemáticos. Existem vários tipos de Geoplanos<sup>4</sup>, conforme o conteúdo a ser explorado e, para as representações geométricas, são utilizados atilhos coloridos (elásticos coloridos).

O Geoplano Retilíneo (Figura 1) é um tabuleiro de madeira, de forma quadrada ou retangular, de cor natural ou suave, onde se encontram linhas traçadas, formando uma rede quadricular e nos vértices destes quadrados, são fixados pregos ou pinos.

Figura 1 – Geoplano Retilíneo



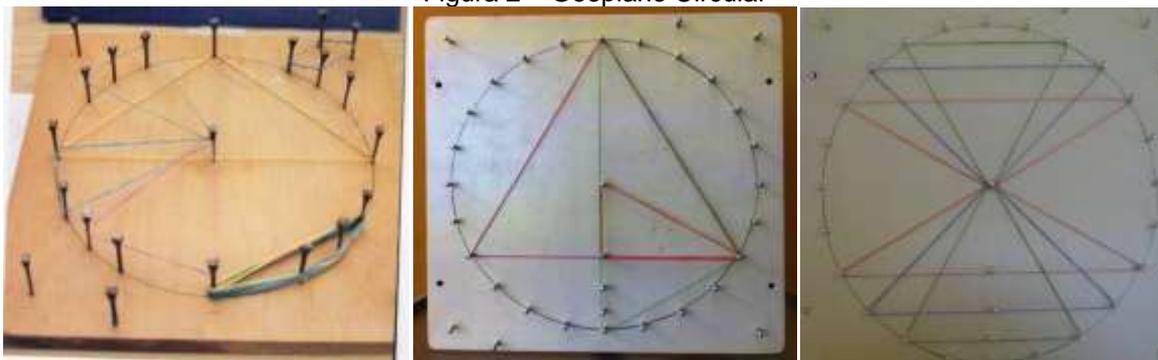
---

<sup>4</sup> Acervo do Laboratório de Matemática da Universidade Católica de Pelotas/UCPel.

No lado esquerdo da Figura 1, os eixos cartesianos estão destacados em azul, delimitando os quadrantes no plano cartesiano. Já no lado direito, estão construídos alguns entes geométricos.

Para a construção de conceitos relacionados à circunferência e o círculo utiliza-se o Geoplano Circular (Figura 2).

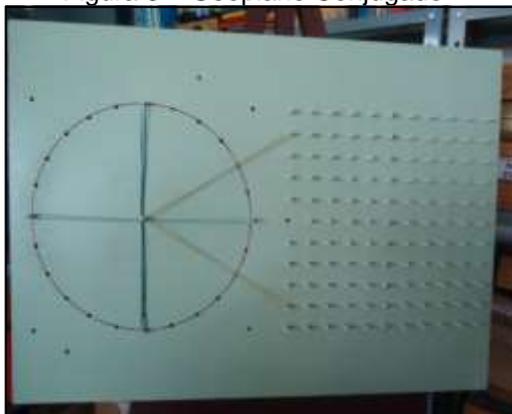
Figura 2 – Geoplano Circular



O primeiro Geoplano da Figura 2 mostra um triângulo retângulo inscrito numa semicircunferência, o segundo apresenta um triângulo equilátero inscrito no círculo e o terceiro representa os arcos notáveis no ciclo trigonométrico.

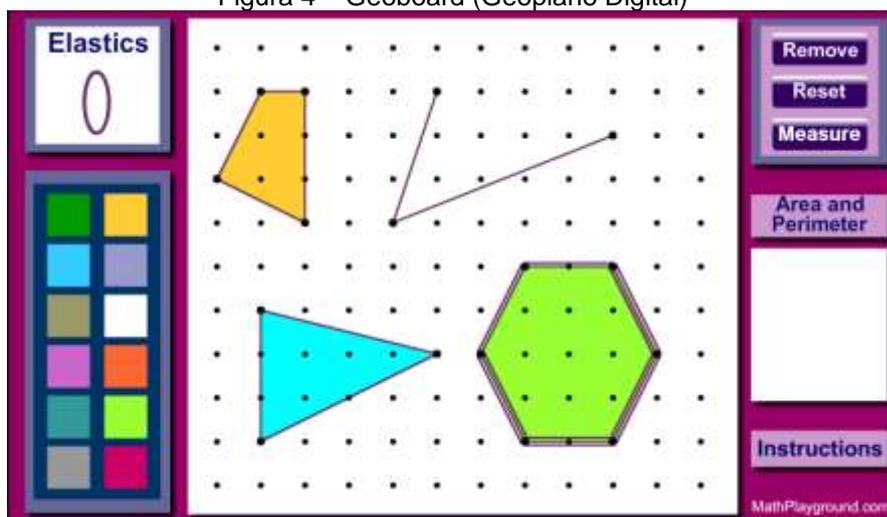
Na Figura 3, tem-se o Geoplano Conjugado, que consiste num mesmo tabuleiro a construção do Geoplano Retilíneo e do Circular, de modo a ser possível explorar conceitos matemáticos relacionados a figuras geométricas retilíneas e circulares.

Figura 3 – Geoplano Conjugado



Na Figura 4, apresenta-se *Geoboard* (Geoplano Digital), que é utilizado para cálculos de área e perímetros. O *Geoboard* obedece o mesmo princípio do Geoplano físico.

Figura 4 – Geoboard (Geoplano Digital)



As instruções para o uso do Geoplano Digital são as seguintes:

- Clique e segure o botão esquerdo do mouse sobre a imagem do elástico. Um elástico aparecerá sob seu *mouse*.
- Arraste-o para um dos “pinos” e solte o botão do *mouse*.
- A parte superior do elástico irá fixar-se no pino.
- Mova o elástico para um novo “pino”, clicando e arrastando sua parte superior.
- Leve a outra extremidade do elástico para um “pino”, clicando e arrastando sua parte inferior.
- Para conectar-se a outro “pino”, clique e mantenha pressionado o mouse sobre o meio do elástico e outro ponto aparecerá.
- Arraste esse novo ponto para outro ponto na posição que desejar e solte o botão do mouse. Dessa forma, o elástico será anexado a outro pino.
- Para colorir, selecione a região da figura formada, clicando nela. Em seguida, selecione uma das cores à esquerda do *Geoboard*.

## 2 SUGESTÃO DE ATIVIDADES

Para a realização das atividades nos Geoplanos, em madeira, deve-se considerar como unidade de medida, as distâncias entre os pregos colineares e consecutivos. Neste minicurso, pretende-se trabalhar os seguintes assuntos:

- Dedução da fórmula do número de diagonais de um polígono;
- Dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo;

- Cálculo de perímetros de figuras planas;
- Dedução das fórmulas de áreas das principais figuras planas;
- Demonstração do Teorema de Pitágoras;
- Dedução das fórmulas para o cálculo do lado e do apótema de Polígonos Regulares Inscritos na Circunferência
- Funções e Relações Trigonométricas
- Plano Cartesiano e Fórmulas Básicas da Geometria Analítica
- Construção do Tangram

## 2.1 Dedução da fórmula do número de diagonais de um polígono

Representar alguns dos polígonos: quadrado, pentágono, hexágono, entre outros, e escolher um dos vértices do polígono e construir todas as suas diagonais que partem deste único vértice. Após, preencher a planilha a seguir. O objetivo é deduzir a fórmula do número de diagonais de um polígono. Para tanto, deve-se chegar a constante três, que é a diferença entre o número de lados e o número de diagonais de cada vértice (Figura 5).

Figura 5 - Número de diagonais do pentágono e do hexágono

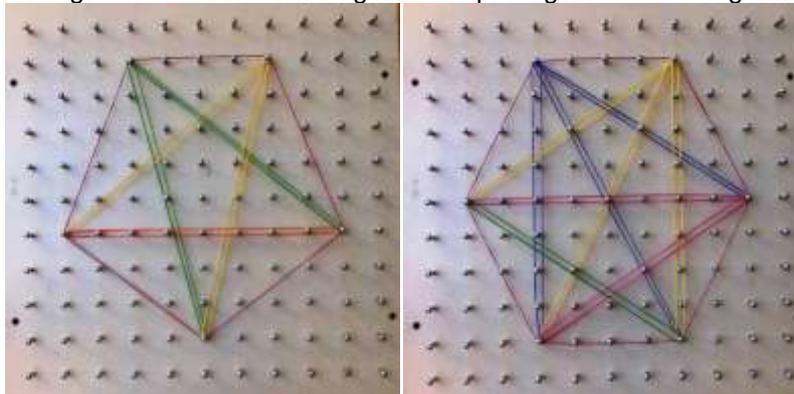


Figura 6 - Número de diagonais do pentágono no Geoplano Digital



Observa-se que cada vértice dá origem a  $(n - 3)$  diagonais; os  $n$  vértices dão origem a  $n(n - 3)$  diagonais, que é dividida por dois, pois cada diagonal foi contada duas vezes. Portanto, a fórmula é dada por:  $d = \frac{n(n-3)}{2}$ .

Polígono	Número de lados	Número de diagonais de cada vértice	Total de diagonais
Quadrado	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octógono	8		
Eneágono	9		
Decágono	10		
Undecágono	11		
Dodecágono	12		
.....	.....		
Qualquer	$n$	$n - 3$	$\frac{n(n - 3)}{2}$

## 2.2 Dedução da fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo

Representar diversos polígonos convexos no Geoplano retilíneo e no *Geoboard* e construir as diagonais que partem de um mesmo vértice do polígono (Figura 6 e Figura 7). Após, preencher a planilha a seguir. O objetivo é deduzir a fórmula que dá a soma de seus ângulos internos. Ao construir as diagonais que partem de um mesmo vértice, o polígono fica dividido em triângulos, cujo total é sempre o número de lados menos dois.

Figura 6- Decágono e hexágono divididos em triângulos no Geoplano retilíneo em madeira

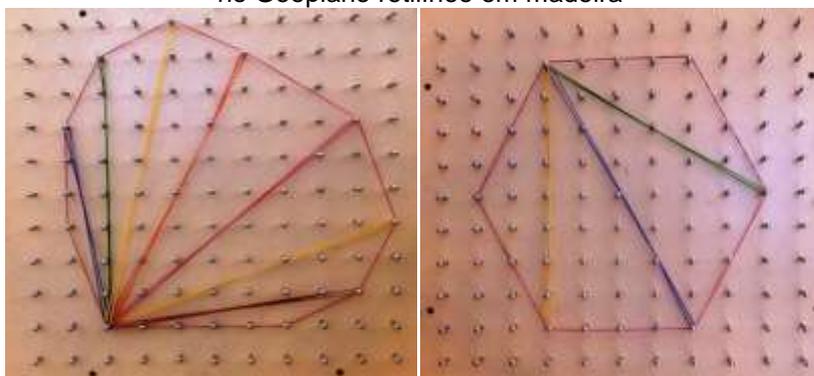
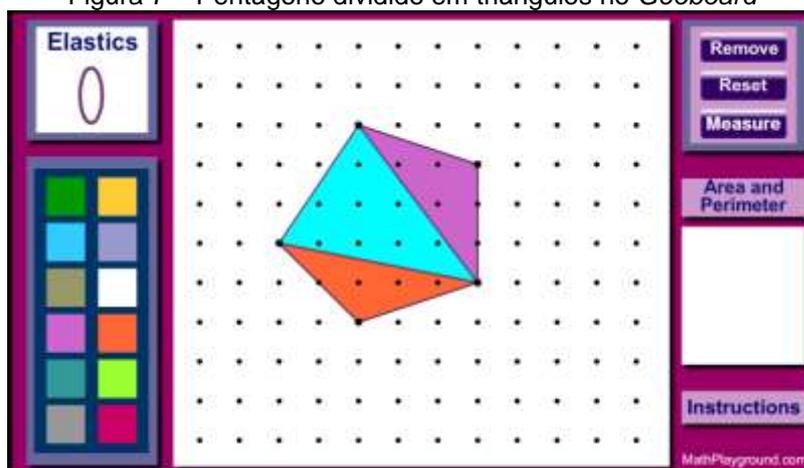


Figura 7 – Pentágono dividido em triângulos no Geoboard



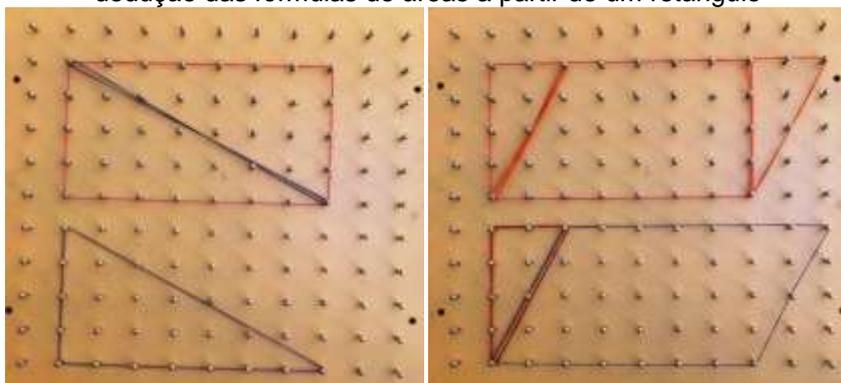
Um polígono de  $n$  lados será dividido em  $(n - 2)$  triângulos. Logo, para obter a soma de seus ângulos internos ( $S_i$ ) basta multiplicar o número de triângulos por  $180^\circ$ , ou seja,  $S_i = (n - 2) \times 180^\circ$ .

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma dos ângulos internos
Quadrado	4		
Pentágono	5		
Hexágono	6		
Heptágono	7		
Octógono	8		
Eneágono	9		
Decágono	10		
Undecágono	11		
Dodecágono	12		
.....	.....		
.....			
Qualquer	$n$	$n - 2$	$(n - 2) \times 180^\circ$

### 2.3 Dedução das fórmulas de áreas das principais figuras planas

Construir quadrados, retângulos, triângulos, paralelogramos, losangos, trapézios e realizar movimentos, transformações nesses polígonos com o objetivo de deduzir as fórmulas para calcular as áreas dessas figuras geométricas. Estas transformações são feitas a partir do retângulo (Figura 8).

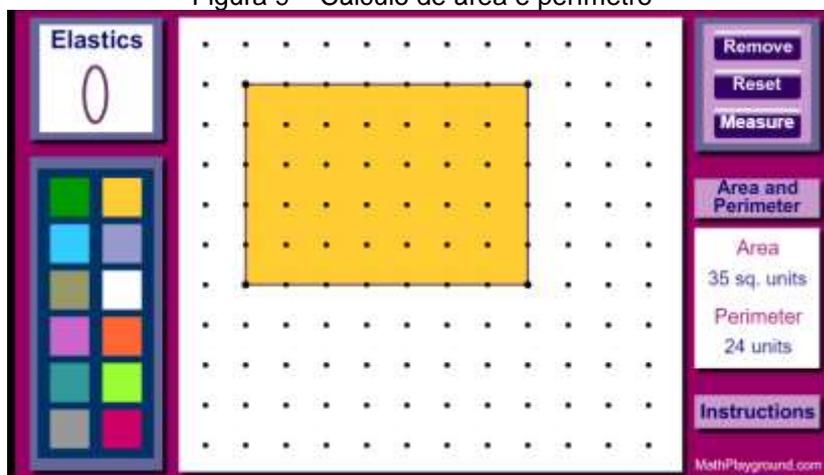
Figura 8 – Representação de figuras no geoplano retilíneo para dedução das fórmulas de áreas a partir de um retângulo



Tomando o retângulo como base, podem-se deduzir as fórmulas das outras figuras planas por transformações do retângulo. Adota-se, como unidade de área, o quadrado formado por quatro pregos. É conveniente que o aluno transporte para um papel quadriculado o que está sendo representado no Geoplano para conclusão das áreas das diversas figuras formadas.

Na Figura 9, mostra-se a área e o perímetro de um retângulo, obtidos por meio do *Geoboard*, clicando-se no ícone *Measure* (medida).

Figura 9 – Cálculo de área e perímetro

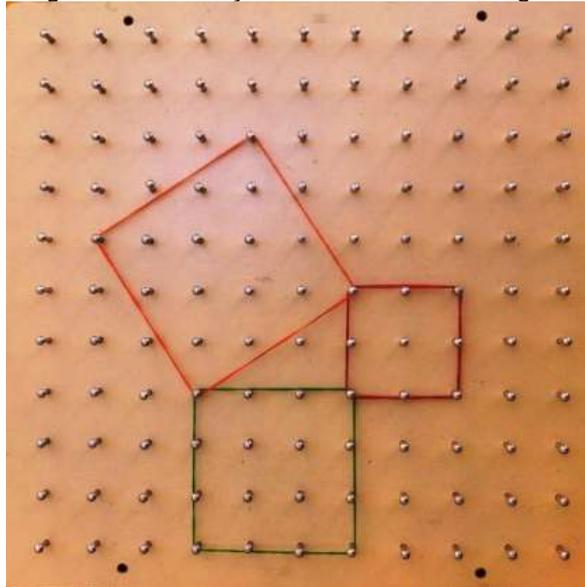


## 2.4 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Construir triângulos retângulos. Após construir quadrados sobre a hipotenusa e sobre os catetos; realizar movimentos com o objetivo de concluir que o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Teorema de Pitágoras:  $a^2 = b^2 + c^2$  (Figura 10)

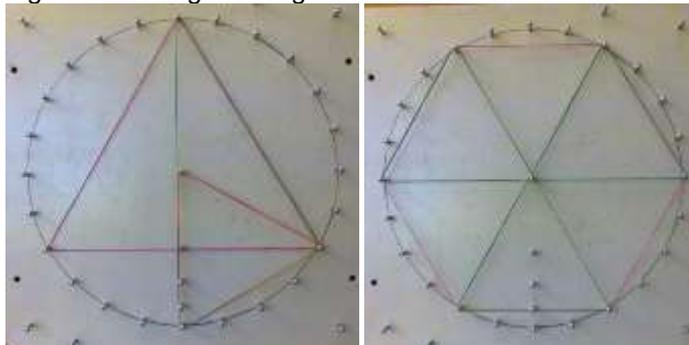
Figura 10 – Dedução do Teorema de Pitágoras



## 2.5 Fórmulas para o cálculo do lado e do apótema de Polígonos Regulares Inscritos na Circunferência

Construir um quadrado, um hexágono regular e um triângulo equilátero inscritos na circunferência e realizar transformações, movimentos com o objetivo de deduzir as fórmulas para o cálculo da medida dos lados e dos apótemas desses polígonos, conforme se apresentam na Figura 11.

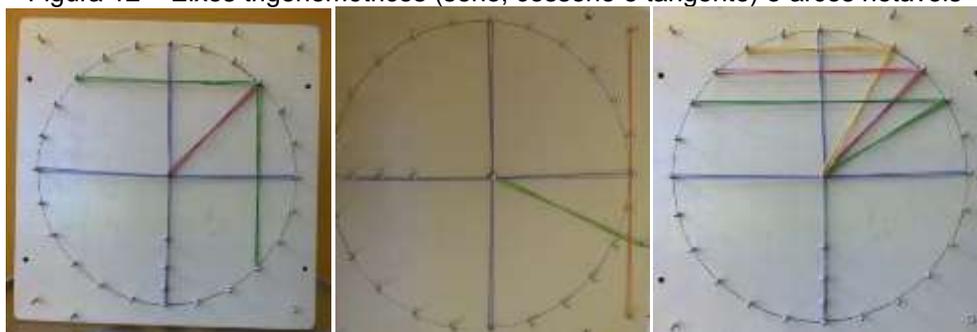
Figura11– Polígonos regulares inscritos na circunferência



## 2.6 Funções e Relações Trigonômicas

Explorar no Geoplano circular as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, considerando a circunferência orientada de raio unitário,  $r = 1$  (Figura 12) e deduzir as relações trigonométricas, entre elas a relação fundamental:  $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$ .

Figura 12 – Eixos trigonométricos (seno, cosseno e tangente) e arcos notáveis



## 2.7 Plano Cartesiano e Fórmulas Básicas da Geometria Analítica

Reconhecer o Plano Cartesiano, identificar os eixos  $x$  e  $y$  e pontos no plano cartesiano, construir retas e reconhecer função crescente e função decrescente, determinar distância entre dois pontos, coeficiente angular e linear de uma reta, entre outros conteúdos que podem ser explorados com o uso de ambos os Geoplanos, tradicional em madeira (Figura 13) e digital (Figura 14).

Figura 13 - Plano cartesiano no Geoplano em madeira

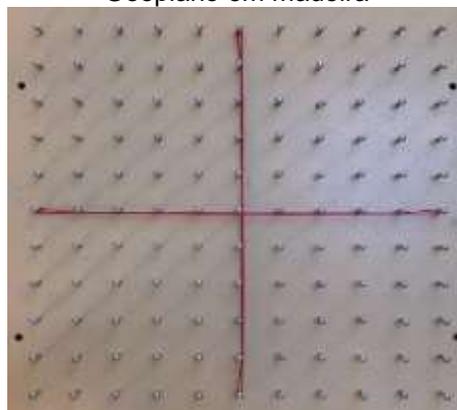
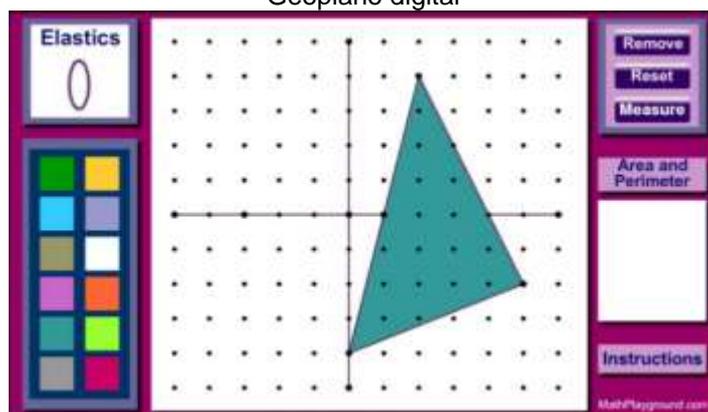


Figura 14 - Plano cartesiano no Geoplano digital



### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Abordam-se, neste minicurso, as deduções de fórmulas matemáticas utilizando como principal recurso o Geoplano. A partir das sugestões apresentadas é possível pensar em muitas outras estratégias de utilização do Geoplano em experiências de ensino-aprendizagem que privilegie a construção do conhecimento lógico-matemático, que possibilite aos alunos o sucesso na aquisição de conceitos, e para tanto devemos reconhecer a importância de observar as etapas de desenvolvimento das estruturas do pensamento, necessárias ao conhecimento matemático.

O Geoplano, tradicional construído em madeira ou digital, se explorado adequadamente, possibilita a compreensão e o estudo de novos conceitos matemáticos, em especial, conceitos relacionados à Geometria Plana, Geometria Analítica e Trigonometria.

Muitas vezes, o aluno se vê à frente de regras superficiais e de símbolos desconhecidos, o que faz com que copie passivamente sem utilizar a sua capacidade de raciocínio. O educador deve organizar ambiente favorável à experimentação e à troca de experiências, criando oportunidades de interações, em que o aluno possa levantar hipóteses e chegar a conclusões. Sendo agente de sua aprendizagem, o aluno irá construir seu conhecimento, e para que isso ocorra, é necessário promover atividades desafiadoras que despertem no aluno a curiosidade e o prazer de aprender.

### OBRAS CONSULTADAS

CARVALHO, D. *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1997.

D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. São Paulo: Ática, 1997.

DANTE, L.R. *Matemática: Contexto e Aplicações*. São Paulo: Ática, 2007.

FAINGUELERNT, E.K.; NUNES, K.R.A. *Matemática: Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio*. Porto Alegre: Penso, 2012.

IMENES, L;M. *Descobrimo o Teorema de Pitágoras*. São Paulo: Scipione, 1997.

KOBAYASHI, M.C.M. *A construção da geometria pela criança*. Bauru: ECDUSC, 2001.

KNIJNIK, Gelsa. *Aprendendo e Ensinando Matemática com o Geoplano*. Ijuí: Unijuí, 1996.

LINDQUIST, M.M.; SHULTE, A. P. *Aprendendo e Ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1996.

MENDES, I.R.; SÁ, P.F. *Matemática por Atividades: Sugestões para sala de Aula*. Natal: Flecha do tempo, 2006.

TIGGEMANN, Iara Suzana. et al. *Geoplanos e Redes de Pontos*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.