SERÁ QUE A VERIFICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS SÓ VALE PARA A SOMA DAS ÁREAS DOS QUADRADOS SOBRE OS CATETOS?

Josieli Duranti[1]

Adrieli Rejane Daronch[2]

Betine Diehl Setti[3]

Maria De Fatima Baptista Betencourt[4]

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: Este trabalho remete a uma aplicação de estudos realizados pelos integrantes do LabGEM (Laboratório de Geometria para o Ensino de Matemática) na forma de minicurso. Este laboratório constitui uma das ações extensionistas do Programa Integração da Universidade com a Educação Básica da Universidade de Passo Fundo. O objetivo do minicurso é a generalização do teorema de Pitágoras a partir do reconhecimento das possibilidades da associação, aos lados do triângulo retângulo, de figuras planas semelhantes cujas áreas comprovam a proposição do teorema, tendo como enfoque metodológico a proposta do modelo de van Hiele que conduz o processo de ensino-aprendizagem considerando cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico e cinco fases metodológicas de ensino.

Palavras Chaves: Teorema de Pitágoras. Geometria. Modelo de van Hiele.

Introdução

Como acadêmicos e professores do curso de licenciatura em Matemática acreditamos no valor do seu ensino e na importância de aprender os conceitos dessa área de estudo. No entanto, nossa crença vai além da busca por um sentido para o que é ensinado simplesmente pela possibilidade de aplicação da matemática na vida real. Concordamos com Libâneo (2009) de que o ensino deve ser centrado nos processos de aquisição do conhecimento para ampliar o desenvolvimento das capacidades e habilidades de pensamento dos alunos por meio dos conteúdos tendo em vista a reflexividade. Por isso, o ensino não pode se caracterizar pelo superficialismo ou priorizar somente o pensamento intuitivo e empírico. Nesse sentido, a proposta do modelo de van Hiele para o ensino da geometria que considera uma escala de níveis de pensamento geométrico com crescente grau de aprofundamento dos conceitos e de domínio da linguagem matemática, respeitando

[1] Licencianda em Matemática. Bolsista de extensão. Universidade de Passo Fundo. 159436@upf.br
[2] Licencianda em Matemática. Bolsista de extensão. Universidade de Passo Fundo. 139424@upf.br
[3] Mestre em Modelagem Matemática. Universidade de Passo Fundo. diehl@upf.br
[4] Mestre em Modelagem Matemática. Universidade de Passo Fundo. fatima@upf.br

o estágio em que encontra cada aprendiz e indicando fases metodológicas para sua aplicação, se mostra pertinente de ser utilizado na sala de aula.

Neste intuito, o Laboratório de Geometria para o Ensino de Matemática - LabGEM, que se constitui como uma das ações do Programa Integração da Universidade com a Educação Básica – PIUEB, institucionalizado como atividade de extensão da Universidade de Passo Fundo-UPF, busca planejar e divulgar propostas metodológicas de ensino da geometria para a educação básica que auxiliem o professor a estabelecer uma conexão, como mediador, entre o aluno e o objeto de conhecimento auxiliando-o a desenvolver seu próprio processo de aprendizagem. Os participantes do PIUEB são acadêmicos bolsistas extensionistas e professores do Curso de Matemática da UPF e de professores de matemática de escolas públicas do município de Passo Fundo que se propõem a participar desse projeto.

No LabGEM destaca-se a prática de oficinas e minicursos, como meio de divulgação de propostas que contribuam com mudanças na forma de tratar o conhecimento no ensino da Matemática. Além disso, este tipo de atividade oportuniza a vivência da docência, que complementa a qualificação da formação inicial dos acadêmicos participantes do programa; e, por meio dos estudos realizados, propicia preencher lacunas na compreensão de conceitos que possam existir.

Neste trabalho é relatado um minicurso proposto pelos componentes do LabGEM sobre demonstrações e generalização do Teorema de Pitágoras, ampliando a validade do mesmo para a área de quaisquer figuras semelhantes associadas aos lados do triângulo retângulo. Para isso, recorre-se à problematização e ao uso de recursos didáticos diferenciados, tidos como estruturas mediadoras da construção do conceito com direcionalidade orientada do concreto ao abstrato.

Referencial teórico

O desenvolvimento metodológico do minicurso se fundamenta no modelo de van Hiele. Esse modelo propõe cinco níveis de desenvolvimento cognitivo geométrico que leva em conta as diferenças individuais no pensamento dos aprendizes e cinco fases metodológicas de ensino que possibilita o desenvolvimento cognitivo do aluno em cada um dos níveis (KALEFF, 1995, p. 44). Quanto à estrutura cognitiva, o modelo apresenta cinco níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. A metodologia de ensino que este modelo propõe para ser aplicada em cada nível abrange: questionamento, orientação direta, explicitação, orientação livre e fechamento.

Assim, o propósito do minicurso é apresentar um sequenciamento didático que possibilite a generalização do teorema de Pitágoras partindo das figuras semelhantes construídas a partir dos lados do triângulo retângulo, utilizando recursos didáticos, metodologia diferenciada e que estabeleça relação com os níveis de desenvolvimento cognitivo do modelo de van Hiele.

Ao elaborar a proposta de generalização do teorema de Pitágoras, o minicurso estruturou-se nos cinco níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico do Modelo de Van Hiele. Tal modelo, segundo Kaleff (2008, p.43),

> [...] consiste em duas partes: a primeira, da descrição da estrutura cognitiva, composta por níveis mentais a serem necessariamente desenvolvido pelo aluno para a compreensão de um conceito geométrico. Já a segunda parte apresenta uma metodologia de ensino para o desenvolvimento do conceito geométrico em cada nível da estrutura mental.

Este modelo foi criado por dois professores holandeses de Matemática, Dina van Hiele-Geldof e Pierre M. van Hiele, com o objetivo de propor uma metodologia diferenciada para o ensino da geometria com o intuito de tornar o seu ensino mais dinâmico e efetivo. O casal van Hiele descreveu um modelo que expressa a aprendizagem como um processo gradual, global e construtivo:

> [...] gradual, porque considera que a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são obtidos gradualmente. Global, porque figuras e propriedades não são abstrações isoladas, inter-relacionam-se pressupõem diversos níveis que levam a outros significados. Construtivo, porque pressupõem que não existe transmissão de conhecimentos, mas que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos (SERRAZINA, 1996 apud HAMAZAKI).

Os pesquisadores van Hiele observaram que muitas das tarefas e questões propostas aos aprendizes requerem habilidades e conhecimentos que eles não possuem, pois ultrapassam o nível de pensamento e de compreensão em que se encontram.

Apoiados por Freudenthal[5], que foi orientador dos trabalhos desenvolvidos pelo casal van Hiele, os pesquisadores observaram em seus estudos que quando o ensino ocorre em um nível cognitivo acima daquele que o aprendiz se encontra o conteúdo não é assimilado e não fica retido por muito tempo na memória, do mesmo modo que concepções erradas, quando aprendidas, geralmente são difíceis de serem abandonadas e acabam por se caracterizar como um obstáculo didático. Além disso, ratificando as ideias de Vigotski (2000), observaram que o desenvolvimento biológico não implica automaticamente num avanço dos níveis de pensamento e compreensão dos conceitos geométricos. Sobre os resultados do ensino e da aprendizagem da geometria, os estudos mostraram que poucos estudantes atingem o nível mais alto de pensamento que se refere ao rigor geométrico (KALEFF et al, 1994).

Além dos cinco níveis que descrevem os processos de pensamento em relação à compreensão dos conceitos geométricos e com o objetivo de favorecer a aquisição de um nível de pensamento, o Modelo de van Hiele também propõem uma sequência de cinco fases didáticas para compreensão de um conceito geométrico que devem ser empregadas pelo professor em cada nível, mas que não necessariamente precisa ser utilizada a sequência completa.

A Fase 1, do *questionamento*, trata-se da constituição de um diálogo entre professor e aprendiz, na qual se procura avaliar os conhecimentos prévios sobre o assunto a ser tratado e na qual ocorre um reconhecimento do conceito a ser estudado e como o trabalho será desenvolvido. A segunda fase, Fase 2 – *orientação dirigida, se caracteriza* pelo momento em que o aprendiz explora o assunto tratado por meio de materiais didáticos cuidadosamente selecionados. Na fase seguinte, de *explicitação*, os aprendizes aperfeiçoam o uso de seu vocabulário, expressando suas opiniões sobre o que observaram até o momento, sendo que nesse instante a participação do professor deve ser mínima, pois o aprendiz deve se apresentar mais autônomo na averiguação de relações entre os objetos de seus estudos. No processo de *orientação livre*, Fase 4, devem ser propostas tarefas em que os aprendizes sejam capazes de resolver de várias maneiras, ou seja, tarefas abertas, podendo buscar uma forma individual de resolver a atividade, com a possibilidade de

---

[5] Hans Freudenthal foi um matemático alemão que desenvolveu trabalhos relacionados à topologia e álgebra, e fez também, grandes contribuições ao campo da Geometria, Filosofia, História da Matemática e Educação Matemática.

se tornar uma atividade lúdica de descoberta. Finalmente, no momento de *integração* ou *fechamento* na Fase 5 realiza-se uma revisão e de tudo o que foi estudado, promovendo uma síntese visando a integração global entre o conteúdo, o material didático e as relações estabelecidas entre eles com a consequente internalização de um novo domínio de pensamento.

Metodologia

Este minicurso tem como objetivo fazer uma generalização do teorema de Pitágoras utilizando a metodologia sugerida no Modelo de van Hiele. Ele está dividido em dois momentos: inicialmente ocorrerá uma breve fala sobre a história da vida de Pitágoras de Samos e sua escola e o que os participantes conhecem sobre o referido assunto, em seguida, o foco é o encadeamento das atividades de demonstração do teorema de Pitágoras com o intuito de generalizá-lo, embasando-se nos níveis e fases do modelo de Van Hiele. O minicurso apresentado a seguir, poderá ter sua aplicação em turmas do nono ano do ensino fundamental II da educação básica, procurando desenvolver o pensamento geométrico e tornar o tópico de estudo lúdico para despertar o interesse pelo aprender dos alunos.

Após o primeiro momento de explanação geral da história do matemático Pitágoras e problematização, iniciam-se as duas atividades envolvendo a demonstração do teorema por meio do modelo de Van Hiele. Na primeira atividade, será entregue a cada um dos participantes um jogo do Tangran Pitagórico dos quadrados, onde as peças do material terão um lado colorido e do outro terão uma malha quadriculada, e uma folha para possibilitar registro relacionados a demonstração. Após será disponibilizado tempo para considerações visuais das peças sem levar em conta as propriedades.

Na etapa seguinte o participante tem a oportunidade de fazer uma análise informal sobre os conceitos geométricos, além de analisar as características e propriedades das figuras, e, partindo disso, poder resolver os desafios propostos. Com as peças do jogo, o participante será incentivado a montar quatro quadrados sem que haja a mistura das cores das peças. Após, o mesmo será desafiado a montar três quadrados com todas as peças do jogo, considerando que o primeiro quadrado teria que ser construído a partir de um trapézio e um triângulo, sendo ambos pequenos e de mesma cor. O segundo quadrado será montado a partir de três peças, porém deve ser com dois triângulos de tamanhos diferentes e um trapézio, fazendo-se arranjos com cores iguais. Com os três quadrados montados os participantes deverão unir seus vértices de modo a formar um triângulo retângulo.

Após essa construção os participantes serão induzidos a medir os lados das figuras para estabelecerem relações entre as propriedades das mesmas, em seguida será solicitado que calculem a área por meio das medidas e por meio da malha quadriculada, sendo os dados encontrados serão detalhados no material impresso para poder realizar-se relações entre as somas das áreas por meio de combinação. Mediante isso objetiva-se que o participante observe que a soma das áreas das figuras dos catetos do triângulo retângulo é igual à área da figura na hipotenusa. Nesta etapa o participante se encontraria no nível dois do modelo de Van Hiele que estabelece inter-relações das propriedades nas figuras e subentende-se a demonstração prática do teorema. Finalizando a atividade será feita a demonstração utilizando-se da linguagem matemática.

Na segunda atividade será entregue outro quebra-cabeça com as peças no formato de semicircunferências e lúnulas. Os participantes deverão analisar o formato das peças de uma forma geral e em seguida, montar com as mesmas um triângulo retângulo, nesse momento considerando as propriedades e as características de cada peça. Assim como fora estabelecido as áreas dos quadrados no exercício anterior, agora estabelecem-se novamente as relações de área, porém com as figuras que compõem o suporte para o triângulo retângulo. Com base nas demonstrações, os envolvidos no minicurso terão a oportunidade de deduzir o Teorema partindo das análises realizadas, aplicando as deduções em diferentes contextos. Executadas essas etapas, os envolvidos tornam-se capazes de se aprofundarem na análise e chegarem à conclusão de como podem generalizar o teorema.

Apesar de a atividade estar embasada no modelo de Van Hiele, o último nível não é atingido por este necessitar de vários sistemas axiomáticos, o que não se alinha com objetivo do minicurso, que é apenas a generalização do Teorema de Pitágoras.

Para finalizar a oficina, os participantes serão questionados, com o intuito de que exponham ideias e concepções construídas referentes ao conteúdo desenvolvido. Após os questionamentos será demonstrada a generalização do teorema através da linguagem matemática, chegando ao famoso Teorema de Pitágoras.

Conclusão

A oficina proposta, elaborada com base no modelo de organização do pensamento geométrico de Van Hiele, apresenta uma metodologia alternativa e concreta para a generalização de um conceito da geometria que pode ser trabalhado de forma aprofundada no ensino fundamental II e que conduza o aluno ao desenvolvimento do raciocínio formal e uso da linguagem matemática de modo a desenvolver capacidade argumentativa, de análise e de síntese. Além de ser uma proposta de aprendizagem significativa para a assimilação de um conceito geométrico, a partir da mediação do concreto ao abstrato, esta atividade é um método alternativo para os professores de Matemática, que desejam utilizar metodologias diferenciadas como objetivo de tornar suas aulas mais dinâmicas, atrativas e apresentarem para seus alunos da educação básica curiosidades que são pouco conhecidas.

Referências bibliográficas

CAMPOS, E. P.; CANDIDO, C. C. *O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico e conclusões de suas aplicações*. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Elisa%20Padinha%20Campos.pdf>. Acesso em: 15 maio 2017.

HAMAZAKI, Adriana Clara. O Ensino da Geometria por meio da Metodologia van Hiele: Uma Experiência. VII Encontro Paulista de Educação Matemática–EPEM. São Paulo, 2004.

KALEFF,A.M.R, HENRIQUES, A . S., REI, D.M., FIGUEIREDO, L.G. Desenvolvimento do pensamento geométrico – O Modelo de van Hiele, *Bolema*, Rio Claro, 1994. n. 10, pp.21-30.

KALEFF, Ana Maria M. R. *Novas tecnologias no ensino da matemática: tópicos em ensino da geometria*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008. 223 p.

Libâneo, J. C. *Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa: unido ensino e modos de investigação*. USP, Pró-Reitoria de Graduação - Universidade de

São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.prpg.usp.br/attachments/article/640/Caderno_11_PAE.pdf>. Acesso em: 09 Set. 2014.

VIGOTSKI, L. S. *A construção do pensamento e da linguagem*. Tradução de Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

______ . *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes, 1999.