QUESTÕES PARA POTENCIALIZAR O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO PARA ENSINAR DIVISÃO DE FRAÇÕES

Jeferson Gomes Moriel Junior[1]

Matheus Candido Teixeira[2]

Vicente Pedroso da Silva Filho[3]

Claudio Zimmermann Junior[4]

Formação de Professores que Ensinam Matemática

Resumo: O objetivo deste artigo é apresentar e analisar questões baseadas no *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* que possam ser úteis para a exploração e construção de conhecimentos especializados na formação de professores de matemática relacionados ao ensino de divisão de frações. A proposta é uma investigação de caráter exploratório com enfoque analítico e encaminhamento metodológico qualitativo. Até o presente momento foram elaboradas 34 questões sobre conhecimento especializado para ensinar divisão de frações. Discutimos três delas de modo a contemplar tanto o conhecimento matemático quanto o conhecimento didático do conteúdo. Concluímos que é possível converter os resultados de estudos sobre conhecimento docente e divisão de frações em questões específicas com finalidade não só diagnóstica (quando o sujeito compreende o estado do seu próprio conhecimento), mas também com potencial formativo para que professores e licenciandos desenvolvam conhecimento especializado para ensinar matemática. Isto reforça que ser professor de matemática não significa ter notório saber, mas sim, conhecimento especializado.

Palavras Chaves: Conhecimento especializado de professores. MTSK. Divisão de Frações.

INTRODUÇÃO[5]

Diversos estudos e teses doutorais recentes têm utilizado o modelo teórico *Conhecimento Especializado de Professores de Matemática* - MTSK[6] (CARRILLO et al., 2014) para investigar o conhecimento docente. Seus resultados tem fornecido acesso a uma gama de episódios, casos e situações de prática nas quais estão identificados como e quando os conhecimentos especializados foram mobilizados por professores e licenciandos para ensinar matemática (ESCUDERO, 2015;

[1] Doutor em Educação em Ciências e Matemática (UFMT – REAMEC). Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT, Cuiabá, MT, Brasil, jeferson.moriel@cba.ifmt.edu.br.
[2] Graduando. Instituto Federal de Mato Grosso – IFMT, Cuiabá, matheuscandido2009@gmail.com.
[3] Mestrando em Ensino (PPGEn IFMT-UNIC). Instituto Federal de Mato Grosso - IFMT, Cuiabá, vicente.silva@cba.ifmt.edu.br.
[4] Graduando. Instituto Federal de Mato Grosso- IFMT, Cuiabá, claudio.zi.junior@gmail.com.
[5] Trata-se de uma investigação fomentada pelo convênio entre IFMT e FAPEMAT, Edital n. 33/2016.
[6] Sigla em inglês para *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*. Todas as siglas associadas ao modelo são apresentadas na versão original em língua inglesa.

ESCUDERO et al., 2015; FLORES, 2015; MONTES, 2015; MONTES; CARRILLO; RIBEIRO, 2014; MORIEL JUNIOR, 2014; ROJAS, 2014), possibilitando um avanço na compreensão profunda do conjunto de conhecimentos necessários para ensinar determinados conteúdos, como no caso da função quadrática ou da divisão de frações, este último tem um mais problemáticos na educação fundamental (ISIKSAL; CAKIROGLU, 2011; LOPES, 2008; TIROSH, 2000). Tais estudos têm configurado mapeamentos que expressam não só conhecimentos, como também as relações entre eles e entre os diferentes subdomínios (matemáticos e didáticos) do MTSK, avançando em relação a trabalhos correlatos, como o estudo sobre o conhecimento profundo de professores (MA, 1999).

Ainda assim, progressos são necessários no sentido compreender como preparar (futuros) professores a partir dos resultados das investigações com o MTSK, ou seja, trata-se de investir no desenvolvimento de meios (estratégias, atividades, tarefas, casos ou questões) que promovam oportunidades formativas para (futuros) professores potencializarem a construção de conhecimento especializado necessário para ensinar matemática, sobretudo, no que diz respeito ao ensino focado na melhoria da literacia matemática de estudantes e na resolução de problemas contextualizados. Um caminho para fazer a transposição dos resultados empírico-teóricos das pesquisas para a formação é a elaboração de questões que sirvam de instrumento de avaliação, exploração e, sobretudo, de aprendizagem para o ensino de matemática, como é o caso dos itens presentes no *"MKT Measures"* (BALL; HILL, 2008; HILL; SCHILLING; BALL, 2004), questionário criado para investigar e aprimorar o conhecimento matemático de professores e licenciandos para o ensino. Neste sentido, estabelecemos como objetivo do trabalho desenvolver e analisar questões baseadas no MTSK que possam ser úteis para a exploração e construção de conhecimentos especializados na formação de professores de matemática relacionados ao ensino de divisão de frações.

CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA (MTSK)

O MTSK é um modelo teórico que caracteriza o conhecimento profissional específico e especializado que possui (ou deve possuir) um professor para ensinar matemática (CARRILLO et al., 2014). Este modelo é constituído por dois domínios – *Conhecimento matemático* (MK) e *Conhecimento didático do conteúdo* (PCK) –, estando cada um deles dividido em três subdomínios, os quais detalhamos a seguir (Fig. 1). No centro do modelo estão as crenças dos professores sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, as quais permeiam os subdomínios, pois elas dão sentido às suas ações.

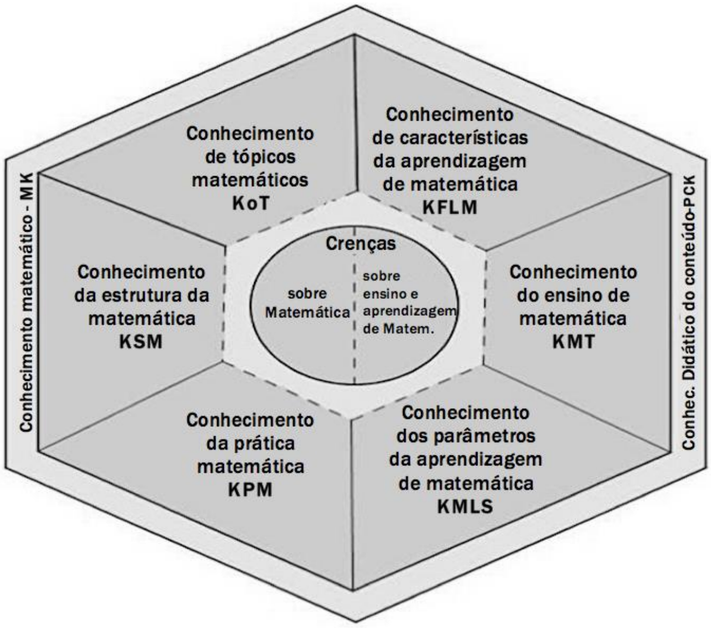

Figura 1. Domínios e subdomínios do MTSK (CARRILLO et al., 2014, p. 1, tradução nossa).

Apresentamos a seguir os três subdomínios contemplados no Conhecimento Matemático. O *conhecimento dos tópicos* (KoT) trata dos conteúdos matemáticos a serem ensinados e sua fundamentação conceitual profunda, englobando definições, interpretações e propriedades de conceitos, uma ou mais demonstrações de um tópico específico, justificativas para procedimentos algorítmicos, exemplos e contraexemplos, modelos realísticos, situações de aplicação e usos extra matemáticos. O *conhecimento da estrutura matemática* (KSM) inclui conexões entre tópicos (avançados-elementares, prévios-futuros, de diferentes áreas matemáticas, exceto as de fundamentação previstas em KoT) que permitem reconhecer certas estruturas da Matemática, bem como, vê-la como um sistema de elementos integrados. O terceiro de seus subdomínios é o *conhecimento da prática matemática* (KPM), englobando maneiras de proceder em Matemática, incluindo modos de criar ou produzir na área (conhecimento sintático), aspectos da comunicação matemática, raciocínio e prova, elementos que estruturam uma demonstração, modos de definir e usar definições, de selecionar representações, de argumentar, de generalizar, explorar ou modelar em matemática, conhecimento útil para avaliar a correção de argumentações e resoluções criadas pelos estudantes.

Quanto aos subdomínios do *Conhecimento pedagógico do conteúdo*, há o *conhecimento do ensino de matemática* (KMT) que diz respeito a materiais, recursos, modos de apresentar um conteúdo e suas respectivas características (limitações/potencialidades existentes em si mesmos) que permitam ao professor optar por uma estratégia para ensinar determinado conteúdo (incluindo organizar uma série de exemplos ou criar analogias e metáforas). Por exemplo, conhecer a estratégia de ensinar frações utilizando uma figura geométrica (circular ou retangular, por exemplo) ou um modelo (como pizzas ou chocolates) e saber que isto é (mais) adequado para desenvolver a interpretação parte-todo. Também inclui o conhecimento (formal ou informal) de elementos teóricos sobre o ensino de Matemática, por exemplo, sobre a resolução de problemas. Também há o *conhecimento das características de aprendizagem de Matemática* (KFLM) que inclui como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos (modelos e teorias formais ou informais), as características desse processo de compreensão, erros comuns e suas fontes prováveis, dificuldades, obstáculos e a linguagem normalmente usada pelos aprendizes ao lidar com cada conceito. Por exemplo, conhecer a teoria APOS para descrever como ocorre o desenvolvimento cognitivo de um estudante em aprendizagem Matemática. Por fim, está o *conhecimento das normas da aprendizagem de Matemática* (KMLS) que se refere a especificações curriculares envolvendo o que está previsto em cada etapa da educação escolar em termos de conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e de raciocínio matemático nos diversos momentos educativos), normas mínimas e as formas de avaliação que possibilitam a progressão de um ano para outro, materiais convencionais de apoio, objetivos e medidas de desempenho desenvolvidos por organismos externos.

Os subdomínios do modelo descrevem como compreender o conhecimento especializado de um professor de matemática e tem sido utilizados como categorias de análise em investigações. Um dos estudos com o MTSK, particularmente útil para nosso trabalho, identificou um *panorama de conhecimentos especializados para* *ensinar divisão de frações* mobilizados em contextos de prática e formação, descrevendo quando, como e com qual propósito eram utilizados, o que representou um avanço na visão integradora dos mesmos e culminou na construção do conjunto mais completo publicado até o momento, intitulado *MTSK da divisão de frações* (MORIEL JUNIOR, 2014). No domínio matemático ele contempla o conhecimento: (i) de tópicos matemáticos (incluindo termos e definições, propriedades, interpretações e problemas associados, algoritmos e procedimentos, justificativas e demonstrações, bem como, representações e exemplos de divisão de frações); (ii) da estrutura da matemática (incluindo a que sustenta o conceito de divisão de frações e de diversas conexões entre conceitos, incluindo corpo algébrico, inverso multiplicativo, multiplicação de frações, algoritmo 'igualar denominadores', comparação de frações, conjuntos numéricos e equação de 1º e 2º graus); (iii) da prática matemática (incluindo modos de proceder para demonstrar algoritmos da divisão de frações). No domínio pedagógico do conteúdo, o panorama em questão contempla o conhecimento: (i) das características de aprendizagem matemática (incluindo aquelas relacionadas à apreensão do conteúdo de divisão de frações, erros comuns e dificuldades de estudantes, bem como, teorias formais de aprendizagem); (ii) do ensino de matemática (incluindo modos de ensinar para a compreensão de divisão de frações envolvendo problemas, materiais e recursos didáticos); (iii) das normas de aprendizagem de matemática (incluindo metas de aprendizagem, conteúdos a serem ensinados, capacidades esperadas ou a serem desenvolvidas em determinada etapa escolar, bem como, sequenciação de conteúdos em torno da divisão de frações).

Baseado no aporte teórico apresentados trabalhamos na consecução do objetivo deste artigo, cuja metodologia apresentamos a seguir.

METODOLOGIA

A presente proposta é uma investigação de caráter exploratório, cujo enfoque é analítico e o encaminhamento metodológico é qualitativo. Trata-se da construção de questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de divisão de frações diretamente vinculadas aos diferentes subdomínios do modelo MTSK, construídas a partir de resultados empíricos e teóricos do *MTSK da divisão de frações* (MORIEL

JUNIOR, 2014), levando em consideração instrumento de medida utilizados em questões formuladas em estudos semelhantes (BALL; HILL, 2008). Assim, no processo de construção de questões e respostas, a fonte de informações empíricas utilizadas foi o conjunto de dez episódios em que se analisa e descreve quais conhecimentos especializados para ensinar divisão de frações foram mobilizados por 4 sujeitos (duas professoras e 2 licenciandos em matemática) em situações de prática. A fonte de informações teóricas usada para elaboração de questões consiste na revisão de 52 estudos sobre o conteúdo de divisão de frações e o conhecimento docente para o ensino deste tema, por meio da qual se reuniu as contribuições relacionadas a: (i) Definições e notações; (ii) Algoritmos, suas justificações e outros procedimentos; (iii) Interpretações e problemas associados; (iv) Explicações instrucionais, propostas de ensino e recursos didáticos; (v) Aspectos da aprendizagem de estudantes.

As questões têm como objetivo simular um contexto de prática ou uma situação de aula e por isso estabelecemos como critérios na elaboração das questões e dos itens de respostas o seguinte:

- Ser o mais objetivo possível nas perguntas e respostas;
- Elaborar questões cujas respostas possam variar e sejam configuradas em múltiplas escolhas;
- Situações empíricas e episódios de sala de aula devem ser priorizados, porém evitando-se atingir crenças;
- Respostas devem ser claramente certas ou erradas do ponto de vista científico e alinhadas com os aportes teóricos;
- Elaborar respostas distratoras tão plausíveis quanto possível;
- Abordar cada subdomínio MTSK, isolada ou conjuntamente, tendo claro o seu objetivo da questão;
- Questões do tipo “marque a errada” tem potencial formador.

Após elaboração das questões, passamos pelo escrutínio de *experts* em relação à sua adequação ao(s) respectivo(s) subdomínios(s) do MTSK e pela análise quanto ao seu potencial formativo. Assim, realizamos uma triangulação de investigadores (DENZIN, 1989), uma vez que elas são colocadas em discussão e análise coletivamente com os integrantes do Grupo SIDM da Universidade de Huelva (Espanha), criadores do MTSK, o que permite detectar e corrigir vieses na análise dos dados que possam comprometer os resultados.

RESULTADOS

Até o presente momento, nossos esforços possibilitaram elaborar 34 questões sobre conhecimento especializado para ensinar divisão de frações, cada uma contemplando um ou mais subdomínios (cf. Tabela 1). Pela impossibilidade de apresentar todas essas questões, por limitações de espaço, optamos por discutir três delas de modo a contemplar tanto o conhecimento matemático quanto o conhecimento didático do conteúdo.

Tabela 1. Distribuição das questões elaboradas por subdomínios que contemplam (abril/2017)

Subdomínios do MTSK	**KoT**	**KSM**	**KPM**	**KFLM**	**KMT**	**KMLS**	**KoT e KFLM**	**KSM e KoT**	**KPM e KoT**	**Total**
Quantidade de questões	17	4	3	3	2	1	1	2	1	34

A primeira situação que apresentamos (Quadro 1) simula um contexto de aula na qual o professor necessita compreender os processos de solução de alunos e analisar sua correção. Ela se faz relevante porque um aspecto importante apontado na revisão da literatura é a necessidade do professor conhecer e saber lidar com os diferentes tipos de erros comuns cometidos por estudantes ao lidarem com a divisão de frações (MORIEL JUNIOR, 2014). Dentre eles, podemos citar em ordem decrescente de ocorrência (REDMOND, 2009): manter denominadores quando são iguais ($\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$); inverter o dividendo ao invés do divisor (inclusive quando é um inteiro, como em $4 \div \frac{1}{4}$); escrever $4 \div \frac{1}{4} = 1$ sem explicar o motivo; inverter corretamente e multiplicar em cruz ($\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{12}{32}$); (v) cancelar ou dividir em cruz (como em $\frac{2}{9} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$). Assim baseados na literatura revistada sobre o assunto (ASHLOCK, 2006; BAYOUD, 2011; NEWTON, 2008; REDMOND, 2009), elaboramos a *questão 1* para identificar qual é o conhecimento que tem o professor a respeito de alguns dos erros comuns que alunos comentem ao lidar com divisão de frações. Deste modo, situamos a primeira questão no subdomínio do conhecimento de características da aprendizagem matemática, o KFLM. As alternativas utilizadas (*É erro comum de estudantes, Não é erro comum de estudantes* e *Não sei/não tenho certeza*) possibilitam identificar o conhecimento de (futuros) professores sobre erros comuns de alunos, particularmente, aqueles quatro apresentados, embora existam outros. Acreditamos que a terceira alternativa torna o resultado mais confiável, pois evita a escolha aleatória em alguma alternativa. No Quadro 2 estão as respostas e respectivos fundamentos teóricos.

Quadro 1. Questão 1 sobre erros comuns de alunos com a divisão de frações (KFLM)

SITUAÇÃO. Se coloque no papel de um professor trabalhando divisão de frações que se depara com os seguintes processos de resolução de alunos:

Resolução A	Resolução B	Resolução C	Resolução D
$\frac{9}{10} \div \frac{3}{10} = \frac{3}{10}$	$\frac{8}{9} \div \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$	$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{15}$	$\frac{22}{21} \div \frac{2}{7} = \frac{22 \div 2}{21 \div 7}$

Questão 1: Como você avalia os processos de solução A, B, C e D da situação apresentada? *(Marque somente uma alternativa para cada resolução)*.

RESOLUÇÃO	*É erro comum de estudantes*	*Não é erro comum de estudantes*	*Eu não sei/não tenho certeza*
A	O	O	O
B	O	O	O
C	O	O	O
D	O	O	O

Quadro 2. Respostas corretas da Questão 1 e fundamentos teóricos respectivos (KFLM)

Item	Resposta correta	Fundamento teórico
A	É erro comum de estudantes	Manter denominadores quando são iguais é um erro comum (NEWTON, 2008)
B	É erro comum de estudantes	Cancelar ou dividir em cruz (como em $\frac{2}{9} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$) (NEWTON, 2008)
C	É erro comum de estudantes	Inverter o dividendo ao invés do divisor (ASHLOCK, 2006; BAYOUD, 2011; REDMOND, 2009)
D	Não é erro comum de estudantes	Não há erro, pois a divisão foi feita usando o algoritmo dividir numeradores e denominadores entre si.

A partir da situação de prática anterior, elaboramos a segunda questão (cf. Quadro 3) sobre a característica de cada erro, cuja análise envolve conhecimento de propriedades de divisão de frações (como equivalência de frações e inverso multiplicativo) ou a aplicação de algoritmos (por exemplo, inverter-e-multiplicar). Por isso, entendemos que a questão explora o subdomínio KoT do conhecimento de professores. As respostas corretas se baseiam nas justificativas do Quadro 2 e são:

A) Manter denominadores quando são iguais; B) Cancelar ou dividir em cruz; C) Inverter o dividendo ao invés do divisor; D) Não há erro.

Quadro 3. Questão 2 sobre processos matemáticos de alunos ao dividir de frações (KoT).

Questão 2. Considerando os processos envolvidos em cada resolução A, B, C e D apresentados na Situação anterior, responda qual é o erro cometido em cada um deles. *(Marque somente uma alternativa para cada resolução)*.

RESOLUÇÃO	*Manter denominadores quando são iguais*	*Cancelar ou dividir em cruz*	*Inverter o dividendo ao invés do divisor*	*Não há erro*
A	O	O	O	O
B	O	O	O	O
C	O	O	O	O
D	O	O	O	O

Entendemos que após se deparar com a resolução de um aluno em sala de aula, o professor necessita, além de compreender o procedimento utilizado (como feito na Questão 2), analisar sua validade e generalidade. Por isso, elaboramos uma terceira questão com base na situação (cf. Quadro 4) que exige a análise das condições necessárias e suficientes para que a solução do aluno retorne o resultado correto. Assim, contemplamos o subdomínio KPM considerando que trata-se de examinar a capacidade do professor em “gerir os raciocínios matemáticos colocados em jogo por seus alunos na hora de aceita-los, refutá-los ou refiná-los” (FLORES et al., 2014, p. 8, tradução nossa).

Quadro 4. Questão 3 sobre validação e generalização das resoluções de alunos (KPM)

Questão 3: Ao avaliar o *processo* de cada resolução A, B, C e D, qual é a conclusão que você chega sobre as condições necessárias e suficientes para que cada um dos processos forneçam o resultado correto para a divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$? *(Marque somente uma alternativa para cada resolução)*.

RESOLUÇÃO	Condição: $b = d = 1$	Condição: $a = \pm b$	Condição: a é combinação de b, c, d	Nunca é válido	Não sei
A	O	O	O	O	O
B	O	O	O	O	O
C	O	O	O	O	O
D	O	O	O	O	O

Para responder cada item da questão o professor que comparar o resultado correto da divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ com aquele gerado em cada processo de resolução e explorar quando eles coincidem. O procedimento empregado na resolução A se aplica quando os denominadores são iguais (*b*=*d*), de modo que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{b} = \frac{\mathrm{a} \div c}{b}$ será igual a $\frac{ad}{bc}$ quando b=1, o que implica b=d=1. No caso de B, a divisão em cruz $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{b \div c}{a \div d} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{d}}$ será igual a $\frac{ad}{bc}$, quando $a^2 = b^2$, o que implica que $a = \pm b$. No caso C, a inversão do dividendo (ao invés do divisor) $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{d}$ será igual a $\frac{ad}{bc}$ quando tivermos não somente $a = \pm \frac{b \cdot c}{d}$, como também as demais combinações entre numeradores e denominadores $b = \pm \frac{a \cdot d}{c}; c = \pm \frac{a \cdot d}{b};\ d = \pm \frac{b \cdot c}{a}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossos resultados avançam em relação a estudos antecedentes por apresentar questões que focalizam estritamente o conhecimento docente que é *especializado* e *específico*. As questões aqui discutidas focalizam diferentes conhecimentos especializados necessários a um professor para ensinar e fazer aprender divisão de frações. A primeira delas focalizou erros comuns que estudantes podem cometer (conhecimento das características de aprendizagem de matemática, KFLM). A segunda abordou conhecimento de procedimentos para dividir frações, exigindo conhecimento de tópicos (KoT), e a terceira explorou condições necessárias e suficientes para a generalização de tais procedimentos (conhecimento da prática matemática, KPM), algo útil para analisar as heurísticas de alunos. O modo como elas foram construídas indica que é possível converter os resultados de estudos sobre conhecimento docente e divisão de frações em questões com finalidade não só diagnóstica (quando o sujeito compreende o estado do seu próprio conhecimento), mas também com potencial formativo para desenvolver o MTSK de professores e licenciandos (algo que abordaremos em publicações futuras).

Acreditamos que a elaboração de atividades formativas baseadas no MTSK (incluindo questionários, casos ou episódios ligados ao contexto de prática) seja um caminho promissor para aprimorar a formação docente. Mas, assim como estudos anteriores, não autorizamos o uso destas questões para avaliação em larga escala visando penalizar docentes, licenciaturas ou formadores. O objetivo é proporcionar ações que convertam o que *ainda* não se conhece em conhecimento especializado. Entendemos que isto é especialmente útil para formadores nas licenciaturas aprimorarem as diretrizes de seu trabalho, para (futuros) professores realizarem uma auto-reflexão cientificamente fundamentada e para investigadores intencionados em desenvolver o modelo teórico MTSK da divisão de frações. Por isso, temos desenvolvido esforços no sentido de finalizar o questionário MTSK da divisão de frações (com respaldo de meta-análises da literatura), validá-lo e compreender como ele pode potencializar a construção de conhecimento especializado por meio de ações formativas, cujos resultados poderão reforçar a ideia de que este tipo de trabalho deve ser feito para todos os conteúdos da educação básica.

Este artigo traz à tona, em consonância com resultados de estudos anteriores, a existência de conhecimentos especializados necessários para ensinar matemática. Possibilitou reforçar que eles são validados pela literatura e avançar na direção de que podem se converter em ferramenta para explorar/potencializar sua construção por professores. Isto implica que ser professor de matemática não exige possuir notório saber, mas sim, ter conhecimento especializado, algo que só pode ser construído por meio de formação altamente especializada, conduzida por formadores preparados, o que passa pela valorização da profissão docente e pela necessidade de investimento adequado, sério e contínuo nos cursos de licenciatura, nas instituições formadoras, na Educação Matemática. Espera-se com isso contribuir para que os professores de matemática e licenciandos aprimorem suas práticas pedagógicas e favoreça a melhoria da qualidade ensino e na aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

ASHLOCK, R. B. **Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction**. Upper Saddle River, N.J.: Pearson Education, 2006.

BALL, D. L.; HILL, H. C. Mathematical knowledge for teaching (MKT) measures. Mathematics released items 2008. **Ann Arbor: University of Michigan**, 2008.

BAYOUD, J. M. **A comparison of pre-service and experienced elementary teachers’ pedagogical content knowledge (PCK) of common error patterns in fractions**. 2011. 180 p. Thesis (Master of Arts). Departament of Education, American University of Beirut, Beirut.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. Á.; ESCUDERO, D.; MEDRANO, E. F. **Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas**. Huelva: Universidad Huelva Publicaciones, 2014. 93 p.

DENZIN, N. **The Research Act**. Englewood Cliffs, NJ Prentice Hall, 1989. 185 p.

ESCUDERO, D. I. **Una caracterización del conocimiento didáctico del contenido como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas de secundaria**. 2015. 200p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidad de Huelva, Huelva.

ESCUDERO, D. I.; MORIEL JUNIOR, J. G.; FLORES, E.; ROJAS, N.; GONZALEZ, A. A.; CATALAN, M. C. M.; FLORES, P. Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. In: II Jornadas de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 2., 2015, Huelva. **Anais...** Huelva, 2015. p. 1-7.

FLORES, E. **Una profundización en la conceptualización de elementos del modelo de Conocimiento Especializado del Profesor deMatemáticas (MTSK)**. 2015. 200p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidad de Huelva, Huelva.

HILL, H. C.; SCHILLING, S. G.; BALL, D. L. Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. **The Elementary School Journal,** v. 105, n. 1, p. 11-30, 2004.

ISIKSAL, M.; CAKIROGLU, E. The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. **Journal of Mathematics Teacher Education,** v. 14, n. 3, p. 213-230, 2011.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v. 21, n. 31, p. 1-22, 2008.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States**. Lawrence Erlbaum Associates Mahwah, NJ, 1999. 198 p.

MONTES, M. A. **Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito: un estudio de caso**. 2015. 200 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade de Huelva, Huelva.

MONTES, M. Á.; CARRILLO, J.; RIBEIRO, C. M. Teachers knowledge of infinity, and its role in classroom practice. In: LILJEDAHL, P.;OESTERLE, S., et al (Ed.). **Proceedings of the Joint Meeting 4 - 233 of PME 38 and PME-NA 36**. Vancouver, Canadá: PME, v. 4, 2014. p. pp. 233-240.

MORIEL JUNIOR, J. G. **Conhecimento especializado para ensinar divisão de frações**. 2014. 162 p. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). PPGECEM/REAMEC, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá.

NEWTON, K. J. An Extensive Analysis of Preservice Elementary Teachers' Knowledge of Fractions. **American Educational Research Journal,** v. 45, n. 4, p. 1080-1110, December 1, 2008.

REDMOND, A. **Prospective Elementary Teachers' Division of Fractions Understanding: A Mixed Methods Study**. 2009. 178 p. Thesis (Doctor of Philosophy). University of Phoenix, Stillwater.

ROJAS, N. **Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos.** 2014. 200p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidad de Granada, Granada.

TIROSH, D. Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. **Journal for Research in Mathematics Education**, p. 5-25, 2000.