# CONTRIBUIÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

**Pedro Augusto Pereira Borges**[1]

## Formação de Professores que ensinam Matemática

**Resumo**: A formação do professor de Matemática tem um componente de formação científica, necessário para que sejam compreendidas as ligações do conhecimento matemático com as Ciências e a Tecnologia. Neste trabalho discutimos possibilidades de enfoques do ensino de Equações Diferenciais (ED) para a licenciatura em Matemática. A partir de uma revisão da legislação e das publicações, identificamos os argumentos e enfoques para o ensino de ED. Analisando esses posicionamentos com base em elementos da Teoria Crítica, apontamos algumas limitações do ensino livresco e propomos um enfoque instrumental investigativo, como contribuição para a formação científica do professor de Matemática.

**Palavras Chaves**: Equações diferenciais. Licenciatura. Formação de professores.

## INTRODUÇÃO

As disciplinas específicas de conteúdo matemático da Licenciatura em Matemática têm recebido atenção de pesquisadores, principalmente com relação às dificuldades de aprendizagem, análise de erros e aplicações, quase sempre com modelagem. Sobre a necessidade de diferenciar os enfoques de acordo com o curso, Meyer *et al* (2013) comentam que “Alguns anos atrás, os professores ministravam (e muitos ainda continuam) a mesma aula de Matemática para quem fazia Estatística, Geologia, Matemática, Agronomia ou Mecatrônica, porque a Matemática era uma só. Diziam os professores daquela época, “quem quer aprender, aprende que a Matemática é essa”” (p. 22). Em Borges (2016) são mostrados enfoques dados ao Cálculo Numérico em diferentes cursos, e ponderado que mesmo que existam conceitos e aplicações comuns, cada curso tem um nível de interesse específico em questões formais e assuntos de aplicação. Nesses dois trabalhos, fica pressuposto que os conhecimentos matemáticos são absolutamente necessários para a formação científica e aceita-se a tese da diferenciação de enfoques de acordo com o curso. Neste trabalho são discutidos enfoques para a disciplina de ED considerando que ela tem uma função primordial na Ciência, na Tecnologia e na formação científica do professor de Matemática.

[1] Doutor em Engenharia Mecânica e pós-doutor em Educação Científica e Tecnológica. UFFS. Professor da UFFS/Chapecó/SC. E-mail: pedro.borges@uffs.edu.br

Na primeira seção é apresentada uma revisão bibliográfica identificando os argumentos e enfoques utilizados para o ensino de ED. Na segunda, são apresentados os elementos da Teoria Crítica de Skovsmose (2001), seguida de apontamentos sobre limitações do ensino de ED. Na terceira seção é discutido o enfoque instrumental investigativo, como contribuição para a formação científica do professor de Matemática.

**O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA LICENCIATURA**

O Parecer CNE/CES N° 1.302/2001 e a Resolução CNE/CES N° 3/2003 determina que as disciplinas Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria, Geometria Analítica serão distribuídas ao longo do curso, sem referência especifica às Equações Diferenciais. O mesmo parecer recomenda ainda o desenvolvimento das competências e habilidades de "estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (...) trabalhar na interface da Matemática com outros campos de saber" e o ensino de "...conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias".

Entende-se então, que a legislação reconhece que o professor deve conhecer as ligações da Matemática com as ciências afins e ter a competência de trabalhar nessa interface. De fato, as ED estão presentes na formulação teórica de uma variedade de fenômenos da Física, Química, Biologia, Economia e por consequência das Engenharias. O conceito de taxa de variação é amplamente utilizado na formulação de leis de conservação de massa e energia, que são a base das ciências quantitativas. Assim, as ED são o principal elo daquelas ligações, e só esse motivo, já justifica o seu ensino na Licenciatura.

As publicações, em nível nacional, mostram que há interesse dos educadores matemáticos em investigar o ensino de EDO em cursos de Engenharia, Química e outros, como também na Licenciatura em Matemática.

Moreno e Azcárate (1997) destacam a existência de três estilos diferentes de ensino de ED: o tratamento estrutural das ED e das matemáticas (estilo tradicional); o planejamento metodológico muito próximo aos interesses das ciências experimentais, o qual considera as ED como um instrumento para resolver problemas químicos ou biológicos (estilo avançado); e entre esses dois estilos existe o que denominam transitório, no qual o professor entra em conflito entre o "que faz" e o "que se poderia fazer".

Borssoi e Almeida (2004) acompanharam atividades de modelagem em uma turma de Cálculo, cujo conteúdo era ED, de um bacharelado em Química, fundamentadas nos pressupostos teóricos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e Novak, abordando o conteúdo de EDO. Consideraram os seguintes aspectos relativos à predisposição dos alunos para aprender: Envolvimento nas atividades; elaboração de estratégias próprias e aprendizagem extra conteúdo. Relativamente aos aspectos cognitivos as autoras consideraram: a compreensão conceitual; a construção e manipulação de representações múltiplas; a aplicação do conhecimento a situações novas e a retenção do conhecimento por longo tempo. Concluem que o estudo de ED poderá ser eficaz se explorado pelos três enfoques: da algoritmação (resolução das equações); da formulação e da resolução de problemas para a iniciação à modelagem. Acreditam que os estudantes ficaram motivados porque foram instigados a trabalhar os conceitos matemáticos relacionados às ciências, o que constitui uma prática constante nos cursos de Engenharia.

As dificuldades de estudantes de licenciatura na interpretação dos termos de EDO de primeira ordem num contexto de modelagem foram investigadas por Rowland e Jovanoski (2004) (*apud* DULLIUS *et al*, 2013), mais especificamente as habilidades dos estudantes para interpretar fisicamente os termos de uma EDO e para traduzi-los da descrição física para a descrição matemática. Os autores acreditam que provavelmente os estudantes possuem concepções corretas, mas apresentam imprecisão no uso da linguagem, outros fazem confusão entre quantidade e taxa de variação da quantidade.

Alvez (2008) propõe o ensino de ED para a Licenciatura sob o enfoque da modelagem matemática de problemas das ciências. “Equações Diferenciais é o fechamento de um ciclo referente ao estudo do Cálculo, pois é a partir de seu estudo que se passa a entender e melhor aplicar os conceitos de derivada, taxa de variação e integração” (p. 11). Para Alvez o estudo de ED compreende duas etapas: a resolução e a aplicação. Também preocupa-se em mostrar a importância das ED para a formação dos professores, mas não detalha essa posição.

Santos (2010) é um livro escrito para um curso de Licenciatura em Matemática à distância, na forma de aulas. O conteúdo selecionado compreende uma introdução às ED a partir de exemplos ilustrativos da Física, equações separáveis, equações autônomas, teoremas de existência e unicidade de soluções e equações lineares de 2ª ordem. Não há comentários sobre a relação entre ciência, tecnologia e ED, mas a exploração de modelos clássicos como o resfriamento de corpos, dessanilização, crescimento de populações e decomposição radioativa são expostos com linguagem simples, claramente detalhados para viabilizar a leitura e compreensão dos alunos de cursos à distância. A ênfase da abordagem está na elaboração, implementação e interpretação gráfica das soluções.

Laudares e Miranda (2007) acompanharam estudantes na realização de três atividades investigativas de iniciação à modelagem com ED, em um curso de Engenharia, com o objetivo de realizar conjecturas e prospecções em busca da competência de modelar.

Dessa breve revisão bibliográfica pode-se destacar alguns argumentos e tratamentos dados ao ensino de ED:

i) Argumentos para incluir ED na Licenciatura:

- *Composição curricular*: existe um ciclo na formação de matemáticos, o qual inicia em funções, passa pelos cálculos e fecha com ED. Com isso o licenciado estaria de posse de um conhecimento característico da sua área, a Matemática.
- *Pedagógico*: as ED são uma oportunidade de reforçar a compreensão e desenvolver habilidades operatórias com aplicações dos conceitos de derivada e integral.
- *Domínio de linguagem*: as ED, com seus símbolos e conceitos, principalmente o de taxa de variação, carregam a linguagem de expressão das ciências, viabilizando a tradução das descrições físicas para a Matemática. Dominar essa linguagem é uma das atribuições da formação matemática.
- *Competência de modelar*: As ED, juntamente com outros conceitos matemáticos, são as ferramentas para resolver problemas da realidade. A formação de habilidades no uso dessas ferramentas depende de práticas na produção e análise de dados experimentais, na formulação e teste de hipóteses. Essas são ações características da pesquisa nas ciências que podem fazer parte das aulas de Matemática, em uma perspectiva de modelagem.

ii) Tratamentos identificados nas práticas de ensino de EDO:

I – *Tratamento matemático teórico*: abordagem formal, cujo foco é a consistência da Matemática, reconhecível na precisão das definições, no enunciado e demonstração dos teoremas, na dedução dos algoritmos de solução e na importância secundária atribuída ao desenvolvimento de habilidades de encontrar soluções de ED. Esse tratamento é mais característico dos bacharelados em Matemática, mesmo que eventualmente, algum professor, em decorrência de sua formação, utilize-o na Licenciatura;

II – *Tratamento matemático prático*: o foco é o uso dos resultados enunciados pelos teoremas, a dedução e execução dos algoritmos de solução;

III – *Tratamento instrumental ilustrativo*: o foco é a ED como um instrumento para resolver problemas de outras áreas. Consiste na ilustração de contextualizações através de problemas de livros de ED. Esses problemas são em regra, depurações, simplificações de modelos utilizados na formação de profissionais de outras áreas. Trata-se de uma introdução à modelagem que cumpre parcialmente a função de mostrar a utilidade ou a conexão da Matemática com a Ciência.

## REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Skovsmose destaca quatro pontos essenciais na formulação da Educação Crítica, que resumiremos (assumindo o risco de redução da complexidade do tema) e consideraremos em nossa reflexão:

1. O *ambiente democrático*: professores e alunos têm igualdade de poder, em um ambiente democrático de relações dialogadas; (SKOVSMOSE (2001), p.17-18)
2. Desenvolvimento da *competência crítica* pelos estudantes; (idem p. 18).
3. A *distância crítica do conteúdo da educação* permite que sejam questionados:
   a) A *aplicabilidade do assunto*: quem, onde usa e tipos de qualificações desenvolvidas em Educação Matemática;
   b) Os *interesses por detrás da permanência do assunto no currículo*;
   c) *As questões e problemas que geraram os conceitos e os resultados* na matemática;
   d) *As funções sociais que o assunto pode ter*;
   e) *As limitações do assunto*; (ibidem p. 19).
4. *O direcionamento do processo ensino-aprendizagem* a problemas selecionados sob o ponto de vista subjetivo (ser relevante aos estudantes)

> e objetivo (ter relações próximas com problemas sociais objetivamente existentes). (ibidem p. 20)

Para Skovsmose a Educação Matemática tem se desenvolvido na direção de três alternativas: o estruturalismo, o pragmatismo e a orientação-ao-processo (SKOVSMOSE (2001), p.20): para estruturalismo, a essência da Matemática está na análise lógica dos conceitos fundamentais; para o pragmatismo a essência da Matemática encontra-se em suas aplicações, sendo que produzir modelos é sua atividade principal; e para a tendência de orientação-ao-processo a essência da Matemática está ligada "...aos processos de pensamento que levaram ao *insight* matemático. E é enfatizado que o interesse principal da educação matemática é dar aos estudantes oportunidades para fazerem eles mesmos reinvenções" (SKOVSMOSE (2001), p.24).

Uma abordagem estruturalista no ensino de ED prioriza as argumentações formais, a construção da rede de conhecimentos matemáticos, com interesse voltado exclusivamente para o interior da própria Matemática. Nessa direção, ensina-se ED a partir da definição, classificação quanto à ordem e número de variáveis independentes, teoremas de existência e unicidade de soluções e um repertório de soluções analíticas. O sentido de estudar ED se restringe à consistência lógica das proposições envolvidas nesse conteúdo e na possibilidade de usar tudo isso em outras áreas da própria Matemática. Subentende-se daí, que o professor de Matemática deve apropriar-se desses conhecimentos para mover-se no mundo matemático.

Uma abordagem pragmática no ensino de ED parte das relações que os conteúdos possam ter com algo externo à própria Matemática. Essa relação atribui um sentido de linguagem à Matemática, que historicamente se constituiu em um sistema de códigos eficientes para descrever as variáveis de fenômenos reais de interesse da humanidade. A descrição não é apenas conceitual ou discursiva, mas é instrumental, porque é objetiva e viabiliza a predição dos valores e as taxas de crescimento das variáveis em diferentes instantes de tempo ou espaço. São modelos matemáticos cujo objetivo é predizer o funcionamento das coisas. Quando abastecidos com dados de medições reais, os modelos descrevem com precisão casos particulares da realidade. Esse é o caráter instrumental da Matemática, fortemente imbricado em áreas de aplicação como as Engenharias e a Economia. O estudo dos modelos clássicos em livros de ED (degradação radioativa, resfriamento de corpos, sistema massa-mola, circuitos elétricos, crescimento populacional, modelos econômicos) é uma iniciação à constatação da importância das EDO nas Ciências.

Para além dos argumentos curriculares, pedagógicos, de linguagem e ilustrativos já apresentados, tanto as abordagens puristas como as aplicadas carregam consigo a característica da aula expositiva, de aprender o que está pronto, para mostrar o aprendido em uma verificação de aprendizagem. Ler modelos ou repetir sua dedução, pode ilustrar os procedimentos de modelagem, mas ainda está longe de ser uma atividade de modelagem. Nessa leitura, não há um problema a ser investigado, seleção das variáveis mais importantes, formulação de hipóteses, medições, proposição e verificação de modelos. Ao estudar modelos prontos aprende-se Matemática sim, mas não se aprende a modelar ou a investigar cientificamente situações reais.

Os textos de ED têm se caracterizado pelos seguintes passos: desenho ilustrativo + proposição de uma ED, condições iniciais e um ponto experimental + solução geral + solução particular + determinação de coeficientes. Esse algoritmo é tão repetido que alunos e professores passam a acreditar ser o método definitivo para descrever problemas reais. A determinação dos coeficientes a partir de apenas um dado não inicial, é mais uma atividade mecânica de manipulação algébrica, do que de análise do fenômeno, carente de atitude crítica e científica. A discussão sobre os coeficientes é fundamental no estudo dos fenômenos, pois esses são os elementos que vinculam o modelo de ED aos elementos constituintes dos fenômenos (materiais, substâncias, populações,...). Um coeficiente não pode ser determinado somente com um dado do domínio, pois se forem usados outros, o valor do coeficiente certamente não será o mesmo, já que toda medida carrega um percentual de incertezas, cujo tratamento constitui boa parte da prática de pesquisa. Os problemas de fim de capítulo são depurações dessa prática, cuja transposição didática é evidente, com o objetivo de facilitar o procedimento em aula, encaminhando rapidamente a soluções simplórias.

A aceitação acrítica de resultados desse tipo revela a posição passiva (ou ingênua) dos alunos e professores diante do conhecimento, ou talvez, um produto da ideologia da certeza, como se referem SKOVSMOSE e BORBA (2001), p. 127, no sentido de aceitação de um procedimento matemático impresso em livros e corroborado pelo professor, sobre um pseudo método científico escrito em linguagem matemática. A repetição do algoritmo de ensino descrito tem o objetivo de instrumentar, na medida que treina o aluno para um procedimento padrão.

**DA INSTRUMENTAÇÃO À INVESTIGAÇÃO**

Conhecer, contemplar e fazer exercícios sobre casos particulares de aplicações de ED nas ciências é importante, mas ainda é uma depuração da função das ED na ciência, que um professor de Matemática necessita conhecer. Entender essa função significa, do nosso ponto de vista, percorrer os caminhos de investigação próprios da Ciência, não olhando de fora, mas degustando seus métodos, dificuldades, limitações e potencialidades. Nesse sentido, propõe-se nesse trabalho um quarto tratamento: O *tratamento instrumental investigativo*, cujo foco também é a ED como um instrumento para resolver problemas de outras áreas (aplicação da Matemática), porém com uma inserção efetiva nesses problemas. Tal tratamento recupera a essência da modelagem como investigação de um problema (competência crítica), pois extrapola a descrição dos livros didáticos, buscando informações mais detalhadas dos fenômenos em livros específicos de ciência aplicada ou na produção de dados e informações reais. Além disso, realiza medidas, busca dados de outras pesquisas, dialoga com profissionais, especialistas, alunos de outros cursos.

O tratamento instrumental investigativo inicia com a proposição de um problema, é seguido de pesquisa de modelos (teoria), equacionamento, tratamento matemático, experimentação e verificação da solução. Ilustramos tal tratamento com a descrição e referências entre parênteses em itálico aos tópicos da Teoria Crítica apresentada na seção anterior, sobre o modelo de resfriamento de corpos, amplamente ensinado nas aulas de ED:

1. *Proposição do problema*: A visita a uma indústria metalúrgica, conversa com operários e engenheiros pode ser uma oportunidade de observar as condições de trabalho e as relações entre conhecimento e produção industrial (*aspectos sociais ligados ao tema*). Nos processos industriais, as peças forjadas ou soldadas costumam sair dos moldes ou máquinas em temperaturas altas e necessitam de resfriamento até a temperatura ambiente, no menor tempo possível, para que possam ser manuseadas (*aplicabilidade concreta do tema*). Um problema comum é determinar o tempo de resfriamento de uma peça, até a temperatura ambiente (*o problema de investigação*).

2. *Teoria sobre resfriamento*: o resfriamento de um objeto em um meio é um problema de troca de calor entre ambos. A Lei de Newton, de troca de calor entre um objeto sólido e um meio fluído (líquido ou gás) diz o seguinte: o fluxo de calor entre uma superfície sólida e um fluído é proporcional à diferença entre as temperaturas da superfície e do fluído (*conhecimento científico sobre o tema, além dos livros de ED*). Em linguagem matemática, tem a forma da Eq. (1):

$$q" = -h(T - T_\infty) \qquad (1)$$

Onde *q"* é o fluxo de calor (W/m$^2$), *h* é o coeficiente de troca de calor por convecção (W/m$^2$K), *T* é a temperatura na superfície e $T_\infty$ é a temperatura do meio fluído ($^oC$).

Se o fluxo de calor é a variação da quantidade de calor por unidade de área e tempo, pode-se escrever a Eq. (1) como:

$$\frac{m \cdot c \cdot \Delta T}{A \cdot \Delta t} = -h(T - T_\infty) \qquad (2)$$

Onde *m* é a massa (kg), *c* é o calor específico (J/kgK), *A* é a área da superfície e *Δt* o intervalo de tempo (s).

Escrevendo a Eq. (2) como derivada, tem-se:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{mc}(T - T_\infty) \qquad (3)$$

Fazendo $k = \frac{hA}{mc}$ a Eq. (3) torna-se:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_\infty)\ . \qquad (4)$$

A constante de proporcionalidade *k* (1/s), portanto, depende da constituição do material do objeto (metal, madeira, vidro,...), do tipo de superfície (lisa, rugosa, ...) e da área.

3. *Escolha de variáveis*: as grandezas *A, c, h* e *m* são próprias da peça a ser resfriada, sendo que não podem ser modificadas. Portanto, são constantes, ao menos para as condições do ambiente. Logo, *k* é uma constante para cada tipo de peça. Assim, o problema se resume a determinar o tempo de resfriamento.
4. *Tratamento matemático do modelo:* A solução da Eq. (4) com a condição inicial $T(0)=T_o$ *é:*

$$T(t) = (T_o - T_\infty)e^{-kt} + T_\infty \qquad (5)$$

A determinação de *k* é feita com base em dados experimentais de temperatura em função do tempo. Assim, para cada medida $i = 1,2,3,...n$ tem-se um $k_i$, obtido da Eq. (5) e expresso na Eq. (6):

$$k_i = -\frac{1}{t_i}\ln\left(\frac{T(t_i)-T_\infty}{T_o-T_\infty}\right) \qquad (6)$$

5. *Experimentos*: Usando dois termômetros, um balde com água e a peça aquecida, pode-se obter curvas de temperatura por tempo. Como essas medidas são passíveis de erros de leitura, tanto de tempo como de temperatura, é bem comum que não formem curvas perfeitas. Por isso, os valores de *k* obtidos com a Eq. (6) serão diferentes entre si. Um procedimento razoável é usar o valor médio dos n *k*.

$$\bar{k} = \frac{\sum_1^n k_i}{n}. \qquad (7)$$

O experimento pode ser repetido para peças semelhantes com superfícies, tamanhos e fluídos (ar, água, óleo,...) diferentes. Espera-se valores diferentes de *k* para cada situação (*formulação de hipóteses*).

6. *Análise dos resultados*: como a curva do modelo é assintótica com a reta $T = T_\infty$, determina-se um percentual acima dessa temperatura, por exemplo, 10 % acima de $T_\infty$, como temperatura desejada para a peça: $T_d = 1{,}1\ T_\infty$ (*discussão do modelo em função dos interesses da aplicação*).
Levando $T_d$ na Eq. (5) e usando o valor de $\bar{k}$ correspondente, calcula-se o tempo de resfriamento $t_R$ pela Eq. (8).

$$t_R = -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{T_d - T_\infty}{T_o - T_\infty}\right) \quad (8)$$

Assim, a condição de resfriamento que apresentar o menor $t_R$ poderá ser escolhida para implementação no processo industrial.

A ilustração desse enfoque mostra o caráter investigativo na proposição do problema, na abordagem conceitual da teoria, na análise e escolha das variáveis, na interpretação do sentido do coeficiente, na formulação de hipóteses para novos experimentos e na análise dos resultados. Tal enfoque não significa que o professor de Matemática precise dominar as técnicas de experimentação, todos os conceitos da Física ou as teorias da Engenharia. Porém, algumas noções de precisão das medidas e seus tratamentos, além da capacidade de ler, compreender e aplicar conceitos isolados dessas áreas, podem fazer parte do repertório do modelador, visto que esses conceitos estão impregnados de conhecimento matemático.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os enfoques ilustrativos, aqueles que se limitam ao entendimento dos problemas de fim de capítulo de livros, cumprem a função de ilustrar possíveis relações entre Matemática e Ciência e como ilustração, apresentam uma imagem depurada dessas relações, ainda distantes do que seria a modelagem (ou a própria Ciência). Trata-se de uma abordagem cômoda e segura para o professor, pois todas as informações estão disponíveis nos livros e os conteúdos a estudar ficam determinados *a priori*. Porém, é um enfoque acrítico, que destoa da natureza investigativa da Ciência.

O enfoque investigativo, ao propor um problema, pode levar a diferentes conteúdos não previstos e momentos de insegurança, pois as respostas não necessariamente são conhecidas (se fossem não seria um processo de pesquisa). A investigação, a formulação e checagem de hipóteses são ações de reflexão, características dos métodos da Ciência. Esse enfoque extrapola a leitura de modelos e execução de algoritmos, através do “fazer” a Ciência de maneira crítica, com interação entre alunos e professores, questionando os métodos, as medidas, os dados e os próprios modelos.

Explicitar as conexões entre Matemática, Ciência e Tecnologia é fazer investigação crítica, no sentido enunciado por Skovsmose. Os interesses nessas aplicações, são os interesses da humanidade de predizer a natureza, para adaptá-la às nossas necessidades de andar, vestir, proteger, habitar, alimentar e bem viver. Evidentemente, como toda ciência, trata-se de uma abordagem limitada, pois “A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade” (BASSANEZI, 2002, p. 24). A impossibilidade de uma abordagem holística, implica na desconsideração algumas variáveis - como as sociais e ambientais - que também precisam ser avaliadas. Esse ciclo de investigar, propor soluções, avaliar as consequências, propor novas investigações para melhorar soluções antigas é o fazer da humanidade, no qual as ED têm desempenhado um papel decisivo. Entendemos que vivenciar esse papel é parte da formação do professor de Matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ALVEZ, M.B. Equações diferenciais ordinárias em cursos de licenciatura de Matemática – Formulação, Resolução de problemas e introdução à modelagem. Dissertação de Mestrado. PPG/Educação em Ciências e Matemática/PUC/MG. Belo Horizonte, 2008.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.

BORGES, P.A.P. Diferenciação de enfoques no ensino de Cálculo Numérico. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo, 2016. v. 6. p. 1-12.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Modelagem matemática e aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa**, v.6, n.2, 2004.

DULLIUS, M.M, VEIT, E.A. e ARAUJO, I.S. Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias**.** Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v.6, n.2, p. 207-228, junho 2013.

LAUDARES, J.B. E MIRANDA, D. F. Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais**. Educação Matemática Pesquisa***,* São Paulo, v. 9, n. 1, pp. 103-120, 2007.

MEYER, J. F. C., CALDEIRA, A.D. e MALHEIROS, A.P.S. **Modelagem em Educação Matemática**. 3ª. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013.

MORENO, M. M.; AZCÁRATE, C. G. Concepciones de los Profesores sobre la Enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales a Estudiantes de Química y Biología. Estudio de Casos. **Revista Enseñanza de las Ciencias***, v*.15, n.1, p.21-34, 1997.

ROWLAND, D. R.; JOVANOSKI, Z. Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of mathematical Educations in Science and Technology,* v.35, n.4, p.503-516, 2004.

SANTOS, R. J. **Equações diferenciais para licenciatura em matemática**. Belo Horizonte : Editora UFMG, 2010. 109 p.

SKOVSMOSE, O. e BORBA, M.C. A ideologia da certeza em Educação Matemática. In: SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica: a questão da democracia**. Campinas, SP: Papirus, 2001. p. 127-148.