



## O ESTUDO DE SEQUÊNCIAS E LIMITES EM ANÁLISE REAL COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Greice Keli Silva Lacerda<sup>1</sup>

### Educação Matemática no Ensino Superior

#### Resumo

Essa proposta de minicurso tem como objetivo apresentar uma ferramenta que possa auxiliar a aprendizagem da disciplina de Análise Real. A metodologia empregada propõe a utilização do software Geogebra para a representação gráfica de sequências de números reais, subsequências de uma sequência de números reais e limites de uma sequência de números reais e de limites infinitos, para a manipulação dos gráficos gerados e para a construção intuitiva dos conceitos elencados. Ressaltamos que o minicurso a ser apresentado é parte integrante de uma pesquisa qualitativa exploratória que vem sendo desenvolvida dentro de um grupo de pesquisa em Ensino e Aprendizagem das Ciências na Educação Básica. Espera-se com esse trabalho incentivar novas discussões sobre as práticas educativas no ensino da disciplina eleita e motivar mais pesquisas acerca de sua importância na formação docente, de seu papel na construção da identidade do futuro professor e da efetiva aplicação de seus conteúdos nos Ensinos Fundamental e Médio na Educação Básica.

**Palavras Chaves:** Análise Real. Geogebra. Sequência. Limites. Ensino Superior.

#### Introdução

A disciplina de Análise Real ministrada nos cursos de graduação em Matemática, também conhecida como “Análise Matemática, Análise na Reta, Introdução à Análise ou Fundamentos de Análise” (BARONI; OTERO-GARCIA, 2012), possui uma fundamentação teórica rigorosa que provoca um grande impacto nos estudantes (BRITO, 2011).

Segundo Otero-garcia e Cammarota (2013), os “princípios axiomáticos e sistemáticos” da disciplina exigem o estudo definições formais e demonstrações rígidas que contribuem para as dificuldades que os alunos encontram em se adaptar aos novos conceitos apresentados pela disciplina.

---

<sup>1</sup> Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências (PPGEC) da UNIGRANRIO, Duque de Caxias, RJ. E-mail: greicelacerda@gmail.com.

Oliveira (2016), Gomes (2013), Brito (2010), Ferreira e Muniz (2014) e Brito (2011) afirmam que, desde o início do século XIX, buscava-se o rigor na “formulação dos métodos analíticos”, que até então, eram manipulados pelos matemáticos da antiguidade de “maneira quase cega, muitas vezes guiados pela intuição” (OLIVIERA, 2016, p.2 *apud* EVES, 1995, p.609-610).

Ao longo dos anos, diversos estudiosos como Cauchy e Weierstrass construíram para a disciplina uma fundamentação teórica que passou a privilegiar as “manipulações algébricas formais” e os conhecimentos abstratos, em detrimento dos conceitos construídos intuitivamente e de manipulações fundamentadas na visualização e em aspectos visuais e concretos.

Ferreira e Muniz (2014) afirmam que o estudo da disciplina pouco se modificou durante os anos. Se outrora a necessidade uma fundamentação teórica rigorosa para a Análise se justificava pela necessidade de abstração dos conceitos e demonstrações formais. Hoje, com o advento da tecnologia, que exige dos indivíduos o desenvolvimento da capacidade de construir e reconstruir novos conhecimentos, habilidades e atitudes para a manipulação de todo tipo de informação, nos questionamos sobre a necessidade da “rigorização” de seus conteúdos e demonstrações da disciplina e, indo além, nos inquiremos sobre sua importância na formação inicial do professor de Matemática que lecionará na Educação Básica.

Brito (2010, p. 11) destaca que um dos objetivos primordiais da Análise na graduação em Matemática é favorecer a prática em “enunciar e demonstrar teoremas”. Moreira, Cury e Viana (2005) apontam o estudo da disciplina na formação como uma “ocasião privilegiada” para o futuro docente: entrar em contato com os “saberes matemáticos e a forma de pensar dos matemáticos”; obter maior segurança na explicação dos “conteúdos básicos” da Matemática e compreensão sólida e profunda dos conceitos; e ter um “entendimento profundo dos fenômenos naturais que o cercam e de suas aplicações em outras áreas do conhecimento”.

Porém, os autores não deixam claro, o papel da Análise na formação docente. A disciplina tem um papel de oferecer conhecimento teórico, uma vez que contribui para a compreensão e construção dos saberes inerentes a disciplina? Ou o seu papel deve abraçar a prática educativa com a finalidade de preparar o futuro professor para a atividade em sala, munindo-o de ferramentas para as explicações dos conceitos básicos?

Neto e Bezerra (2016), Kogut e Miranda (2016) e Tardif (2014) discutem os diversos saberes necessários a formação docente. Saberes esses que são classificados pelos autores como: disciplinares, curriculares, experiências e da formação docente.

Ferreira e Muniz (2014) destacam dois saberes curriculares em forma de conteúdos que, segundo eles, apresentam uma efetiva ligação entre a formação docente e a prática docente no Ensino de Matemática na Educação Básica. Os saberes elencados pelos autores são: Conjuntos Numéricos e Noções de Topologia na Reta.

Numa correlação entre os conteúdos aplicados nos cursos de Análise Real nas licenciaturas em Matemática e os conteúdos matemáticos relacionados no Currículo Mínimo para a Educação Básica, destacamos mais quatro conteúdos que julgamos estarem relacionados aos dois níveis de ensino; são eles: Conjuntos, Funções, Sequências de números reais e Séries Numéricas. Esses conteúdos aparecem relacionados em vários livros e currículos do 9º ano do Ensino Fundamental e nos 1º e 2º anos do Ensino Médio.

Como vimos anteriormente, o estudo da Análise Real tem grande relevância na formação docente e seu papel deve ser de auxiliar a formação teórica e a prática educativa dos futuros professores. Fato este que evidencia a necessidade de ser vencer as barreiras que acentuam a “evasão e o insucesso da aprendizagem” dessa disciplina na graduação. Para Brito (2010) uma dessas barreiras encontra-se na resistência “por parte de alguns professores” em modificar sua prática de ensino nos cursos de Análise.

Nas concepções de Baroni e Otero-Garcia (2012), Brito *et al.* (2011), Ferreira e Muniz (2014), Moreira *et al.* (2005), Oliveira (2016) e Otero-garcia e Cammarota (2013) o ensino da Análise Real deve abarcar as “condições intelectuais dos alunos, seus conhecimentos prévios e suas imagens relacionadas aos conteúdos”, no intento de oferecer formas de articulação entre o pensamento intuitivo e o pensamento matemático formal.

Neste sentido nos propomos a repensar a prática educativa da disciplina escolhida, de forma a buscar novas perspectivas para o seu ensino tanto na graduação quanto na Educação Básica, respeitando-se as especificidades de cada nível de ensino. Na busca pelo desenvolvimento de uma metodologia que rompesse

ou diminuisse a “distância entre a teoria e a prática” (TARDIF, 2014) no ensino da Análise surgiu a proposta de criação de um produto educacional composto por um minicurso de Análise Real, que contemplasse o ensino do conteúdo de sequências de números reais com o auxílio do software Geogebra.

## O minicurso

A presente proposta de minicurso foi desenvolvida como parte de um projeto de pesquisa que tem como objetivo levantar alguns questionamentos acerca do ensino da disciplina de Análise Real nas licenciaturas e oferecer, a professores e alunos inscritos na disciplina, uma ferramenta que possa favorecer o ensino e a aprendizagem dos conceitos da disciplina na graduação em Matemática.

A intensão do minicurso é desenvolver um ambiente de aprendizagem enriquecido através da manipulação do software Geogebra e de uma metodologia que incentive a investigação, a construção intuitiva de conceitos e a busca pela definição formal dos conceitos de sequências de números reais, limites de uma sequência de números reais, subsequências de uma sequência de números reais.

Na metodologia a ser apresentada, os participantes deverão partir de casos particulares representados graficamente e, mediante a manipulação de construções gráficas, do acesso de conhecimentos prévios e de questionamentos direcionados, chegar a construção da ideia intuitiva dos conceitos e a busca pela formalização destes conceitos.

- **Público-Alvo:** Professores e alunos de graduação em matemática e áreas afins.
- **Pré-requisitos:** Conhecimentos básicos de informática e Matemática.
- **Números de vagas:** Depende do local oferecido. Mas, recomenda-se não ultrapassar um número total de 30 participantes.
- **Material utilizado:** Computadores com o software Geogebra instalado, disponível para todos os participantes, Datashow e quadro branco. Caso não

seja possível disponibilizar computadores para os participantes, utilizar-se-á apenas o Datashow e o quadro branco.

- **Da organização do minicurso:** A data prevista para a realização do minicurso é 06 de outubro de 2017 e a duração é de 3 h. Sendo reservados 15 minutos iniciais para o preenchimento de um pequeno questionário, com no máximo 6 questões, para avaliar as concepções prévias dos participantes sobre a disciplina. E 15 minutos finais para preenchimento de outro pequeno questionário, com no máximo 10 questões, onde os participantes avaliarão o minicurso e oferecerão sugestões.

A proposta lançada é para o desenvolvimento de atividades individuais, pois possui a intensão de fazer com que o aluno se utilize de sua intuição e de conceitos previamente adquiridos na análise de gráfico e na busca, construção e solução de problemas. Caso seja necessário, todos os comandos para a manipulação do software deverão ser oferecidos pelo palestrante. Não sendo possível a utilização individual de computadores pelos participantes, o minicurso será apresentado em formato de seminário pelo palestrante.

- **Resultados esperados dos participantes:** Espera-se que os participantes vislumbrem a metodologia apresentada como mais uma forma de promover a articulação entre a teoria e a prática no ensino da disciplina, compreendendo que a utilização do software Geogebra pode enriquecer as aulas de Análise Real e favorecer a aprendizagem dos conceitos sem perda do rigor de sua fundamentação teórica. Além, de fornecer uma ferramenta que também pode ser utilizada na aplicação do conteúdo de sequência na Educação Básica, respeitando-se o nível de ensino e as “condições intelectuais dos alunos”. (BARONI; OTERRO-GARCIA, 2012)

## **Ementa do minicurso**

**Conceito 1** – Sequência de números reais.

**Objetivo:** Construir intuitivamente a ideia de sequência de números reais através da representação gráfica do conjunto dos valores dos termos de uma sequência dada e da busca pela compreensão e a formalização do conceito.

**Descrição:** Nesta etapa, propõem-se a utilização do software Geogebra para construção da representação gráfica do conjunto dos números naturais e de uma sequência de pontos. Após a construção e manipulação das representações gráficas, os participantes deverão buscar uma definição formal para o conceito. Ao final dessa etapa, propor-se-á a realização da demonstrar formal de que a sequência dada é limitada.

**Conceito 2** – Subsequências de uma sequência de números reais.

**Objetivo:** Compreender a ideia de subsequência de uma sequência de números reais, partindo da compreensão intuitiva do conceito e da definição de sequências.

**Descrição:** Utilizando-se das construções gráficas realizadas na primeira etapa e da definição formal de sequência de números reais, os participantes deverão: representar graficamente as subsequências de índices par e de índices ímpares da sequência dada e aplicar estilos de pontos e cores diferentes para cada uma delas. Através da manipulação do software e de conhecimentos prévios serão convidados a buscar a definição formal de subsequência de uma sequência de números reais. Para concluir, deverão visualizar que uma subsequência é, ela própria, uma sequência e propor-se-á a realização da demonstrar formal de que se a sequência dada é limitada então suas subsequências também são limitadas.

**Conceito 3** – Limite de uma sequência de números reais.

**Objetivo:** Construir intuitivamente a ideia de limite de uma sequência de números reais, utilizando-se da definição de sequência limitada e partindo de ideias intuitivas sobre o assunto até chegar na definição formal de limite de uma sequência.

**Descrição:** A partir das construções gráficas realizadas na primeira etapa e da definição formal de sequência de números reais, os participantes deverão construir a representação gráfica dos limites da sequência e através da manipulação do software e de conhecimentos prévios, buscar a definição formal de limite de uma sequência de números reais. Ao final, será proposta a demonstração formal do limite da sequência dada.

#### **Conceito 4 – Limite Infinitos.**

**Objetivo:** Estender a ideia intuitiva de limite de uma sequência de números reais para a ideia intuitiva de limite infinito através da representação gráfica dos valores dos termos de uma sequência divergente e buscar a compreensão do conceito e a formalização da definição, associando o conceito aprendido a ideia de sequência divergente.

**Descrição:** Através da representação gráfica de uma sequência divergente, os participantes deverão verificar a existência ou não da limitação dos termos da sequência. Após a manipulação do software e do acesso seus conhecimentos prévios, os participantes deverão definir formal o conceito de limite infinito. Para finalizar, realizar-se-á a prova formal da divergência da sequência dada.

#### **Considerações Finais**

Para os diversos autores, o estudo da Análise Real na formação de professores é importante porque proporciona ao futuro docente o contato com a cultura matemática. Proporciona o domínio de conteúdos e mais segurança nas explicações dos conceitos. Favorece o entendimento e a aplicação dos conhecimentos adquiridos nesta disciplina em outras áreas do conhecimento. E, por fim, fornece ao aluno conhecimentos que são base de estudos mais avançados.

Porém, o grande número de evasões e insucessos na aprendizagem da disciplina, relatado por vários estudiosos, provoca inúmeros questionamentos sobre a necessidade de sua fundamentação teórica rigorosa na formação docente. Questiona-se o seu papel na formação da identidade do professor e a sua efetiva aplicação de seus conceitos na Educação Básica.

Alguns estudos realizados constataram que os conteúdos de conjuntos, conjuntos numéricos, noções de topologia na reta, funções, sequências e séries numéricas possuem presença marcante em livros do Ensino Fundamental e Médio e que constituem um “elo” entre os três níveis de ensino: superior, médio e fundamental.

Dos conteúdos elencados escolheu-se o conteúdo de sequência de números reais e seus conceitos associados: subsequência, limites e limites infinitos, para a elaboração desta proposta de minicurso na busca pela criação de uma metodologia diversificada para o ensino da disciplina na formação de professores.

A metodologia a ser apresentada tem a intenção de promover o equilíbrio entre a intuição e o rigor no estudo dos conceitos eleitos. E as atividades propostas deverão fornecer aos participantes, algumas ferramentas para a construção de conhecimentos matemáticos formais e desenvolvimento de novas competências que os auxiliem no raciocínio, escrita e elaboração das provas e demonstrações.

Os questionamentos feitos ao longo das etapas do minicurso aliados a visualizações e manipulações do software devem incentivar o desenvolvimento de novas habilidades para a representação matemática do pensamento intuitivo e para as manipulações algébricas necessárias as demonstrações dos conceitos.

Os participantes serão convidados a exercer sua autonomia e seu espírito investigativo; manipular as ferramentas do software; pesquisar conceitos; exercitar as provas e avaliar seu aprendizado.

Em suma, o minicurso proposto deverá incentivar o repensar da prática educativa no ensino da Análise. Mais do que isso, deverá ofertar aos participantes e, posteriormente a professores e alunos das licenciaturas, uma ferramenta que os auxiliem na construção de conceitos da disciplina, a partir de visualizações, manipulações, conhecimentos previamente adquiridos e formalização de conceitos e demonstrações formais.

## **Referências**



BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. Dois vieses para a disciplina de Análise em cursos de licenciatura em Matemática. **Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis.**, 2012.

BRITO, A. B. **Questionando o Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: Da abordagem dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática.** Ouro Preto, v. VIII, p. 84 f., 2010.

\_\_\_\_\_. **Ensino de Conjuntos Numéricos em disciplinas de Fundamentos de Análise Real: dos livros didáticos para a sala de aula em cursos de Licenciatura em Matemática.** Ouro Preto, 2011.

FERREIRA, M. DOS S.; MUNIZ, T. O. M. O ensino de análise: contribuições e perspectivas na formação do professor de matemática. **SIMPEMAD - Simpósio Educação Matemática em Debate**, v. 1, n. 0, p. 120–133, 2014.

GOMES, D. O. A disciplina de análise segundo licenciados e professores de matemática da educação básica. **UNESP Aleph**, p. 266 f. : il., 2013.

KOGUT, M. C.; MIRANDA, S. Os Saberes na Formação Docente. **IN: Desenvolvimento profissional docente em discussão.**, 2016.

MOREIRA, P. Por que análise real na licenciatura. **Zetetiké**, Campinas, n. October, p. 11–42, 2005.

NETO, J. DE C. S.; BEZERRA, L. M. A. Reflexões sobre os Saberes da Ação para a Formação Docente. **Id on Line REVISTA DE PSICOLOGIA**, v. 10, n. 31, p. 241–247, 2016.

OLIVEIRA, J. L. DE. A utilização integrada de softwares dinâmicos no ensino de Análise Real : um estudo da construção do conceito de Integral de Riemann. **RIUFOP - REPOSITORIO INSTITUCIONAL DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO**, n. 1995, 2016.

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Releituras de um Estado do Conhecimento do Ensino de Análise a partir da Noção de Cognição Inventiva. **ALEXANDRIA, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. n. 1, v. 6, 2007, p. 235–260, 2013.

TARDIF, M. **Saberes Docentes e Formação Profissional**. Petrópolis - RJ. 2014.