CONCILIAÇÃO DE METAS, RELEVÂNCIA E FORMAÇÃO, TRATAMENTO E CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIOTICA DE OBJETOS MATEMÁTICOS[1]

Marleide Coan Cardoso[2]

Bazilicio Manoel de Andrade Filho[3]

Vanessa Isabel Cataneo[4]

Temática do Artigo

Processos Cognitivos e Linguísticos em Educação Matemática

Resumo: Este artigo é resultado de discussões do Grupo de Pesquisa em Pragmática Cognitiva da Universidade do Sul de Santa Catarina – Unisul, correlacionando teoria de conciliação de metas de Rauen (2013, 2014), teoria da relevância de Sperber e Wilson (2001[1986], 1995) e teoria de registros de representação semiótica de Duval (1999, 2009) e assumindo a tese de que a mobilização de diferentes registros de representação semiótica é essencial para a compreensão dos objetos matemáticos. O presente estudo descreve e explica a conversão como uma ação pragmático-cognitiva relevante guiada por metas; e, ilustrando a multiplicidade de representações dos objetos matemáticos em sua semiose ilimitada, aplica a noção de enumerabilidade dos conjuntos infinitos para explicar conjunto de interpretações que o objeto matemático pode assumir.

Palavras Chaves: Conciliação de Metas. Relevância. Registros de Representação Semiótica. Enumeração de Conjuntos Infinitos.

Introdução

A matemática, enquanto ciência formal, constitui-se de objetos abstratos que se restringem à mente humana em nível conceitual. “Os símbolos especiais que constituem parte do registro escrito da matemática são um acréscimo numeroso e exuberante aos símbolos das linguagens naturais” (DAVIS; HERSH, 1989, p. 153). Para os autores o que caracteriza esse tipo de ciência é a ausência de objetos externos observáveis, constituindo-se em um conjunto de símbolos vazios cuja principal característica é a forma e não o conteúdo da representação. Desse modo, “a matemática [...] em verdade dificilmente se encontra em qualquer lugar

---

[1] Os autores agradecem as pertinentes considerações dos revisores e a revisão textual da última versão do artigo feita pelo prof. Dr. Fábio José Rauen.
[2] Doutora, Instituto Federal de Santa Catarina, marleide.cardoso@ifsc.edu.br.
[3] Mestre, Instituto Federal de Santa Catarina, bazilicio.andrade@ifsc.edu.br.
[4] Mestre, Centro Universitário Barriga Verde- UNIBAVE, vanessaisacataneo@hotmail.com.

imaginável, fora dos textos e periódicos de lógica simbólica" (DAVIS; HERSH, 1989, p. 389).

Segue-se do caráter formal dos objetos matemáticos que seu acesso somente é possível por diferentes representações semióticas assumidas como "[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento" (DUVAL, 2012, p. 269), cuja formação de uma representação identificável, tratamento e conversão demandam do indivíduo processos inferenciais[5].

É justamente o caráter essencialmente semiótico dos objetos matemáticos e a constatação de que as diferentes formas de os representar demandam processos de inferência, que nos motivou a buscar nas ciências da linguagem teorias que permitissem descrever e explicar como os indivíduos mobilizam os diferentes registros de representação semiótica no processo de representação dos objetos matemáticos. Esse estudo em particular assume que uma interface produtiva pode ser feita com duas teorias de caráter pragmático-cognitivo, a teoria de conciliação de metas de Rauen (2013, 2014) e a teoria da relevância de Sperber e Wilson (2001[1986], 1995), uma vez que a primeira assume que as demandas cognitivas de mobilização dos registros são constrangidas por metas, e a segunda assume que a cognição humana visa a maximizar a relevância dos inputs que processa aumentando os benefícios cognitivos e minimizado os esforços de processamento.

Neste artigo, pretendemos ilustrar brevemente como essa interface pode descrever e explicar o que os indivíduos fazem numa demanda de identificação, tratamento e conversão e correlacionar o conceito de semiose ilimitada à noção de enumeração dos conjuntos infinitos.

Enumeração e registros de representação semiótica

[5] Conforme Duval (2009, p. 53), a formação de uma representação identificável "implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que 'queremos' representar". O tratamento "é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro, aquele onde as regras de funcionamento são utilizadas" (DUVAL, 2009, p. 39). A conversão, por sua vez, é uma transformação que demanda a passagem de um registro de representação a outro. Em casos de conversão, as informações contidas no registro de partida funcionam como pistas para inferir sua conversão em um registro de chegada (ANDRADE FILHO, 2013, p. 5).

O processo cognitivo envolvendo as representações semióticas dos objetos matemáticos revela-se complexo, pois envolve o domínio da diversidade de registros de representação em suas especificidades de constituição, das características dos objetos matemáticos representados e de seu processo de significação[6]. Para entender os processos semióticos envolvidos, vale relacioná-los com a noção de enumeração cardinal dos conjuntos infinitos.

De acordo com Ávila (2005), o conceito de cardinalidade tem relação com a quantidade de elementos de um conjunto. Dois conjuntos que possuem a mesma cardinalidade são equivalentes, de modo que é possível estabelecer uma correspondência que leve todo e cada elemento distinto de um conjunto a um elemento distinto do outro. Se a cardinalidade de um conjunto finito é denotada pelo número de elementos distintos desse conjunto, a cardinalidade dos conjuntos infinitos tem relação com a possível bijeção[7] com o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$).

Conforme Ávila (2005), o estudo dos conjuntos infinitos inicia-se com Georg Cantor. Ao estudar a representação de funções por meio de séries trigonométricas, Cantor acabou estudando conjuntos de pontos de descontinuidade de tais funções. Com isso, ele constatou a necessidade de investigar o conceito de cardinalidade dos conjuntos infinitos, discutindo sua possível enumeração. Cantor concluiu que existem dois tipos de conjuntos infinitos: aqueles que podem ser colocados em bijeção com $\mathbb{N}$, denominados de *enumeráveis*, e aqueles que não podem ser colocados em bijeção com $\mathbb{N}$, denominados de *não enumeráveis*.

Fundamentados em Peirce (1977) e Duval (2009), argumentamos que a semiose de um objeto matemático é ilimitada e pode ser comparada a diferentes enumerações de um conjunto infinito de representações que este objeto pode assumir, de forma que sempre haverá uma representação distinta entre as representações que escapa à percepção humana.

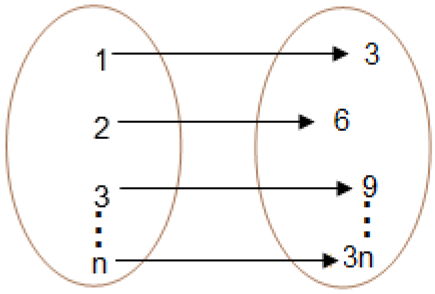
---

[6] "O método dedutivo, as demonstrações, as relações conceituais logicamente definidas e a especificidade das representações simbólicas com seus significados precisos, diferenciam o saber matemático dos demais saberes. Essas peculiaridades e a sua importância na vida em sociedade propõem problemas ao ensino. Da solução desses problemas depende a democratização do saber matemático" (BICUDO,1999, p.163).

[7] Bijeção do conjunto $\mathbb{N}$ para um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e seu subconjunto próprio, de maneira que, a cada elemento de $\mathbb{N}$ corresponde sempre um único elemento do subconjunto próprio de $\mathbb{N}$ e reciprocamente.

Para exemplificar essa questão, considerem-se os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ e o seu subconjunto próprio correspondente ao seu triplo, assim representado algebricamente $n \to 3n$. Portanto a correspondência $n \to 3n$, é de que ao elemento natural 1 faz corresponder o elemento natural 3, ao elemento 2 faz corresponder o elemento 6 e assim sucessivamente. Esta correspondência pode ser apresentada em outras formas de representação. A figura 1 ilustra a representação em diagramas de Venn, mostrando uma relação entre $\mathbb{N}$ e um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$.

Figura 1 – Representação de uma relação enumerável de $\mathbb{N}$



Fonte: Autores (2017).

Peirce define por semiose ilimitada o processo dinâmico e em movimento que sempre ocorre na interpretação de um objeto por meio de signos. Peirce (1977, p. 74) define signo como:

> Qualquer coisa que conduz a alguma outra coisa (seu interpretante) a referir-se a um objeto ao qual ela mesma se refere (seu objeto), de modo idêntico, transformando-se o interpretante, por sua vez, em signo, e assim sucessivamente ad infinitum.

Uma característica essencial dos signos é que eles representam apenas parcialmente seus objetos. Eles estão no lugar desses objetos, representando algum ou alguns de seus aspectos, mas nunca a sua totalidade. Essa completude nunca será atingida, não importa quantas vezes substituamos um signo por outro signo que o interprete. É isso que permite falar de objeto do mundo físico mesmo ausentes[8].

---

[8] Vale destacar que os objetos matemáticos, posto que formais, têm como característica adicional e complexa o fato de serem somente acessados por representações sígnicas. “A função representativa do signo não está nem na qualidade material nem na aplicação demonstrativa; a função representativa cifra-se numa relação do signo com um pensamento” (PEIRCE, 1980, p. 74).

Aos aspectos parciais do objeto que o signo pode descrever, Peirce chamou de objeto imediato e aos aspectos sempre fugidios que o signo deixa escapar, Peirce chamou de objeto dinâmico. No contexto da Matemática, conforme Cardoso (2003, p. 13-14), “os objetos dinâmicos constituem-se como ideia geral de um objeto matemático, e o objeto imediato como representação sígnica desse objeto dinâmico sob determinado aspecto”.

Embora não assumindo a semiótica de Peirce integralmente, Duval (2009, p. 14) argumenta que “um objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes”. Segue-se disso que a representação é essencial para o processo de compreensão em matemática, desde que os objetos não sejam confundidos com suas representações. Para ele, a construção do conhecimento matemático está diretamente relacionada às formas de representações semióticas, pois os objetos matemáticos somente são acessados por suas representações semióticas parciais.

Para diferenciar o objeto matemático de suas representações, Duval (2009, p. 15) define *semiósis* e *noésis.*

> Se chamamos de *semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noésis* os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou compreensão de uma inferência, pareceria então evidente admitir que a *noésis* é independente da *semiósis* ou, ao menos, a dirige.

A *noésis* pode ser relacionada com a tentativa de apreensão do objeto dinâmico de Peirce, e a *semiósis* pode ser relacionada com os objetos imediatos de Peirce, mais próximos com processos de formação, tratamento e conversão das diferentes representações semióticas. Nessa perspectiva, a enumerabilidade discutida na teoria dos conjuntos pode ser relacionada com à infinitude das *semiósis* dos objetos dinâmicos da matemática. Estes objetos, quando acessados por meio dos registros de representação semiótica, tornam-se objetos imediatos em alguns aspectos, constituindo-se em diferentes entradas parciais e incompletas de acesso para os objetos dinâmicos. O objeto dinâmico constitui-se para a mente humana num constante e enumerável *vir a ser*.

Registros de representação semiótica em Matemática

Duval considera a matemática como um domínio de distintas formas de representação, para o autor (2006, p. 57), o que torna uma representação interessante em matemática é a possibilidade de transformá-la em uma outra representação. Assim, a função primária das representações não é nem de comunicação, nem a evocação de objetos ausentes, mas o processamento de informações, permitindo a produção de novas informações ou conhecimentos.

Para Duval, contudo, um dos maiores obstáculos para a aprendizagem da matemática está associado à dificuldade de conversão de uma determinada representação em outra, dada a heterogeneidade semiótica dos diferentes registros utilizados.

Damm (2008) destaca que a apreensão conceitual dos objetos matemáticos supõe a coordenação de vários registros de representação. Para a autora, quanto maior o número de registros mobilizados, maior a possibilidade de apreensão conceitual. Em outras palavras, para que a apreensão de um objeto matemático ocorra é indispensável que a noésis ocorra através de significativas semiósis.

Na perspectiva de Duval (2009), a *semiósis* implica três atividades cognitivas de representação: a formação de representação identificável num registro semiótico, o tratamento e as conversões. O autor destaca que a formação de uma representação identificável é utilizada seja para "exprimir", seja para "evocar" um objeto real, buscando permitir a atividade de tratamento neste registro.

Consideremos o enunciado:

> Numa determinada indústria, o custo para produção de uma mercadoria é composto por um valor fixo de R$ 140,00 mais um valor variável de R$ 0,65 por unidade produzida. Expresse por meio de uma fórmula matemática a lei dessa função.

Nesse contexto, para que se tenha a formação de uma representação identificável, o enunciado em língua natural deve estar subordinado a uma regra gramatical, a construção de um gráfico deverá respeitar as regras específicas do plano cartesiano, o registro de representação algébrico aos algoritmos da álgebra.

O tratamento, por sua vez, consiste nas transformações efetuadas em um objeto matemático dentro de um mesmo registro de representação, e a conversão diz respeito as transformações que permitem representar um mesmo objeto matemático por meio de diferentes registros de representações.

Para dar conta do exemplo, é necessário escrever uma fórmula por meio de regras algorítmicas pertinentes, assumindo um comportamento linear, considerando que o valor fixo corresponde ao coeficiente linear e o valor variável por unidade ao coeficiente angular. Assim, o exemplo requer a conversão do problema apresentado em língua natural para o registro de representação algébrico. Esta conversão exige que se infira que o custo total de produção é igual à soma do custo fixo mais o custo por unidade produzida.

$$CustoTotal = CustoFixo + CustoVariável \Rightarrow C(x) = 140 + 0{,}65x$$

Ainda considerando este exemplo, pode-se converter o registro de representação algébrico para o registro de representação tabular (Tabela 1).

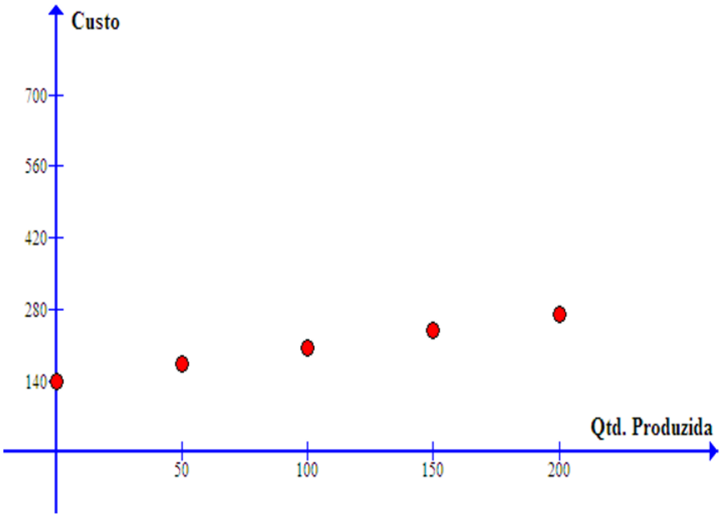
Tabela 1 – Conversão do registro de representação algébrico para tabular

x (em unidades)	C(x) = 140 + 0,65x	C(x) (em reais)
0	140 + 0,65.0	140,00
50	140 + 0,65.50	172,50
100	140 + 0,65.100	205,00
150	140 + 0,65.150	237,50
200	140 + 0,65.200	270,00

Fonte: Autores (2017).

Como também para o registro de representação gráfica (Figura 2).

Figura 2 – Conversão do registro de representação algébrico para gráfico



Fonte: Autores (2017).

Em linhas gerais, para que seja possível alcançar a meta de realizar as conversões anteriores, deve-se primeiro inferir alguns dados: Qual é a variável dependente e a independente? Qual o domínio da função? Para a construção do gráfico, a variável independente é contínua ou discreta?

Ainda nesta situação, para determinar o custo para produção de 500 unidades, por exemplo, o estudante deveria realizar o tratamento[9] na função, substituindo a variável x por 500, obtendo um custo de R$ 465,00.

$$C(x) = 140 + 0{,}65x$$
$$C(100) = 140 + 0{,}65 \cdot 500$$
$$C(100) = 140 + 325$$
$$C(100) = 465$$

Nosso argumento neste texto é que todas essas operações são constrangidas por metas que desencadeiam hipóteses abdutivas relevantes de solução da proposição do exercício que são, em seguida, executadas e checadas.

Relevância, conciliação de metas e registros de representação semiótica

Sperber e Wilson (2001[1986], 1995), ao discutirem os processos cognitivos de processamento da linguagem desenvolvem a teoria da relevância, considerando que os processos comunicacionais vão além da mera codificação e a decodificação. Para os autores, um estímulo ostensivo qualquer[10] funciona como pista para processos inferenciais.

Buscando descrever e explicar esse processo ostensivo-inferencial, Sperber e Wilson (2001[1986], 1995) postulam o conceito de relevância como uma inequação na qual os benefícios cognitivos do processamento de um estímulo ostensivo devem superar os esforços cognitivos para processá-lo. A teoria assume dois princípios: o

---

[9] Na elaboração da tabela e na construção do gráfico acima, outros tratamentos são realizados, cada um seguindo regras próprias ao registro utilizado, ou seja, cada registro de representação apresenta tratamentos específicos.
[10] Chamaremos de estímulo ostensivo um enunciado qualquer, um registro de representação, um input.

princípio cognitivo de que a mente humana é direcionada para a maximização da relevância e o princípio comunicativo de que enunciados geram expectativas de relevância. Presume-se que um enunciado é otimamente relevante quando ele é suficientemente relevante para valer a pena processá-lo e é o estímulo mais relevante de acordo com as preferências e habilidades do emissor.

Partindo dessa presunção de relevância ótima, os autores constroem um mecanismo de interpretação guiado pela relevância. De acordo com esse mecanismo, o ouvinte segue um caminho de esforço mínimo na computação de efeitos cognitivos, considerando hipóteses interpretativas seguindo a ordem de acessibilidade e parando quando o nível esperado de relevância é alcançado. Desta forma, os estímulos ostensivos dos enunciados são enriquecidos pelo ouvinte até torná-los explícitos, gerando implicações contextuais, quando necessário, com base nesses enunciados e em suposições armazenadas na memória enciclopédica até que a interpretação satisfaça sua expectativa de relevância ótima.

Ao consideramos a atividade matemática, isso não é diferente. O estudante, quando diante de uma demanda de conversão, construirá inúmeras suposições a partir das informações apresentadas. Contudo, dentre este conjunto de suposições apenas algumas serão utilizadas, sendo a escolha definida a partir de uma meta.

Rauen (2014), ao discutir à modelação dos processos cognitivos envolvidos na interpretação de *inputs*, assume a pertinência do procedimento de interpretação guiado pela noção teórica de relevância de Sperber e Wilson, mas o integra num esquema abdutivo-dedutivo, considerando que os indivíduos visam a obter uma interpretação que satisfaça suas expectativas de relevância ótima – a rigor uma meta. Rauen (2014, p. 3), defende a hipótese de que a ampliação do contexto cognitivo é abdutiva, e a cognição é movida antes por uma conclusão presumida do que pela emergência de premissas, de maneira que a modelagem dedutiva é apenas parte do processo de avaliação ou de checagem de hipóteses abdutivas.

A teoria de conciliação de metas encontra-se organizada em quatro estágios: o primeiro consiste na projeção da meta (interna); o segundo na formulação de pelo menos uma hipótese abdutiva antefactual para atingir a meta Q; o terceiro estágio (ação intencional) refere-se à provável *execução da ação antecedente P*; e o quarto estágio consiste na *checagem dedutiva da formulação hipotética*.

Retoma-se o exemplo apresentado anteriormente.

> Numa determinada indústria, o custo para produção de uma mercadoria é composto por um valor fixo de R$140,00 mais um valor variável de R$0,65 por unidade produzida. Expresse por meio de uma fórmula matemática a lei dessa função.

Em linhas gerais, a descrição da resolução da questão pode ser modelada a partir da arquitetura fornecida pela teoria de conciliação de metas. Essa modelação fornece uma espécie de engenharia reversa para o processo de resolução da questão, descrevendo um conjunto de procedimentos que devem ser executados a fim de se atingir a meta final, de resolvê-la.

Figura 31 – Esquema de resolução da atividade a partir da TCM

[1]							Q	Resolver a questão
[2]					P	⇔	Q	Escrever a fórmula ⇔ resolver a questão
[3]			O	⇔	P		|	Identificar o modelo matemático ⇔ escrever a fórmula
[4]	N	⇔	O		|		|	Identificar as unidades significativas no registro em língua natural ⇔ identificar o modelo matemático
[5]	N		|		|		|	Identificação das unidades significativas
[6]			O’		|		|	Identificação do modelo matemático
[7]					P’		|	Obtenção da fórmula matemática
[8]							Q’	Resolução da questão

Fonte: Autores (2017)

Na figura 3, a etapa 1 consiste na meta final a ser atingida. Ao alcançar esta meta ocorre o que Rauen (2013, 2014) denomina de autoconciliação de meta e Sperber e Wilson (2001[1986], 1995) de satisfação de relevância. As etapas 2-4 consistem em hipóteses abdutivas antefactuais, sendo necessário para resolver a questão (meta final) escrever uma fórmula matemática (ação), sendo, para isso, necessário estabelecer submetas, que requerem novas ações. O encadeamento de hipóteses abdutivas em relação a metas e submetas descritas, reverte-se em direção ao encadeamento das sucessivas ações executadas em direção à meta final (etapas 5-7). Por fim, a etapa 8 consiste na conciliação da meta ou satisfação da relevância.

Considerações finais

Neste artigo, assumimos que as atividades de identificação, tratamento e conversão de registros de representação semiótica estão a serviço de hipóteses abdutivas relevantes em direção ao atingimento de metas, mobilizando simultaneamente as noções de conciliação de metas (RAUEN, 2013, 2104), relevância (SPERBER; WILSON, 2001[1986], 1995) e registros de representação semiótica (DUVAL, 1999, 2009).

Além disso, partindo do princípio de que os objetos matemáticos formais necessitam de registros de representação para serem acessados, assumimos que as *semioses* que ocorrem neste processo são por princípio enumeráveis, estabelecendo uma correlação entre o processo de *semiósis* ilimitada e a enumeração dos conjuntos que permite compreender melhor a complexidade cognitiva na representação dos objetos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE FILHO, B. M. **Processos de conversão de registros em língua natural para linguagem matemática**: análise com base na teoria da relevância. 2013, 119 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Linguagem) -Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2013.

ÁVILA, G. S. S. **Análise matemática para licenciatura**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999.

CARDOSO, M. C. **Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática.** 2015. 173 f. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) -Curso de Pós-graduação em Ciências da Linguagem, Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015.

DAMM, R. F. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 167-188.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **A experiência Matemática.** Trad. de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. de Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

______. Quelle sémiotique por l'analyse de l'activité et des productions mathématiques? **Revista Latinoamericana de investigación em Matemática Educativa**, Comitê latino Americano de matemática educativa, Distrito Federal, México, n. Esp., 2006, p. 45-82.

______. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. de Lênio Fernandes Levy e Marisa Roâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. v.1. São Paulo: Proem, 2011.

PEIRCE, C. S. **Os pensadores**. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

RAUEN, F. J. Hipóteses abdutivas antefactuais e modelação proativa de metas. **Signo**, Santa Cruz do Sul, v. 38, n. 65, p. 188-204, jul./dez. 2013.

______. For a goal conciliation theory: ante-factual abductive hypotheses and proactive modelling. **Linguagem em Discurso**, Tubarão, v. 14, n. 13, p. 188-204, set./dez. 2014.

SPERBER, D.; WILSON, D. **Relevance:** communication & cognition. 2nd. ed. Oxford: Blackwell, 1995. [1st. ed. 1986].

______; ______. **Relevância:** comunicação e cognição. Lisboa: Fundação Galouste Gulbenkian, 2001.