O GEOGEBRA E A GEOMETRIA DOS SISTEMAS LINEARES DE ORDEM 3

Jaedson Carvalho da Silva[1]

Wagner Ferreira de Santana[2]

Educação Matemática, Tecnologias Informáticas e Educação à Distância.

Resumo:
O artigo apresenta uma abordagem sobre o uso do computador como recurso didático, utilizando o *software* GeoGebra como ferramenta para compreender algébrica e geometricamente a solução de um sistema linear de ordem 3. Inicialmente falamos um pouco da história e surgimento dos sistemas lineares e, em seguida mostramos sua resolução com todas as possiblidades de representação, depois foi feita uma descrição do conceito sobre as soluções desse sistema linear, expondo geometricamente. Para esse estudo e aplicação tivemos como base a regra de Cramer e a teoria de registros de representações semióticas de Duval. Sendo assim foi abordado o sistema linear de ordem 3, algebricamente e geometricamente, mostrando todas as suas possibilidades de solução utilizando o GeoGebra. Pode-se perceber que o geogebra é um recurso que pode ser utilizado para demostrar vários assuntos matemáticos, uma vez que o mesmo facilita a compreensão de muitos conceitos e nesse caso conseguiu aliar as perspectivas algébricas e geométricas de um sistema linear de ordem 3 baseado na regra de Cramer e nos registros de representação semiótica de Duval.

Palavras Chaves: Sistema Linear. Geometria plana. Recurso didático. Tecnologia.

Introdução

Trabalhar a Matemática de uma forma que os alunos sintam vontade de aprender é complicada, pois, muitos não gostam da disciplina, por isso é intrigante trazer recursos didáticos para a sala de aula, de uma forma que possa prender a atenção do aluno e façam com que eles se interessem. Segundo Brandt e Montorfano (2008), para ensinar a Matemática tradicional pouco se usa de recursos didáticos, os educadores se limitam aos livros, listas de exercícios e trabalhos. E que os mesmos fazem parte da essência de fazer com que seus alunos gostem dessa ciência a qual é tão importante para a vida, que traz no seu cotidiano o desenvolvimento cientifico e tecnológico. E ainda falam que, sem dúvidas, essas didáticas ajudam na aprendizagem Matemática, mas questionam, perguntando se motivam os alunos a desenvolverem um estudo com maior entusiasmo e dedicação, respondendo com uma afirmação, que essas investigações remetem às condições de como os professores podem criar uma ponte segura e confiável entre essas duas abordagens Matemática, o do ensino tradicional e o do ensino com significado, que atende às

[1] Licenciando em Matemática. Universidade do Estado da Bahia – UNEB. Jaedsonsilva2308@gmail.com
[2] Mestre em Matemática Aplicada. Universidade do Estado da Bahia – UNEB. wfsantana@uneb.br

exigências mínimas de cada um deles, que pode ser o caso de outros recurso didáticos, nesse momento nos referimos ao *software* matemático.

Os *softwares* vêm ganhando espaço ao longo do tempo, sendo opções de recursos didáticos. “O *software* educativo é um conjunto de recursos informáticos projetados com a intenção de serem usados em contexto de ensino e aprendizagem” (SANCHO, 1998, p. 169). Nesse artigo o *software* utilizado foi o GeoGebra, recurso utilizado para o ensino de Matemática. Ferreira (2010 *apud* SILVA; SANTANA, 2016, p. 1) falam que o GeoGebra como outros programas, é desenvolvido para a educação, mas muitos escolhem esse pelo custo, disponibilidade, características. E ainda falam que o mais importante é a adaptação do professor para utilizar qualquer *software* em suas atuações pedagógicas.

A escolha por este tema, uma junção da álgebra com a geometria dentro do GeoGebra, foi a oportunidade de trabalhar uma ferramenta que auxilia no ensino da Matemática. As dificuldades de aprender Matemática, às vezes, surgem quando o aluno não entende o método que o professor está explicando o conteúdo. Como esse *software* parte da forma algébrica para a geométrica, os assuntos podem ser trabalhados no quadro e demonstrados no computador, levando o aluno a compreender o porquê dessas fórmulas e tendo duas opções de aprendizagem.

Para esse estudo e aplicação tivemos como base a teoria de registros de representações semióticas de Duval, que segundo Pantoja, Campos e Salcedos (2013), Duval explica que uma maneira típica de representar um objeto matemático é com os registros de representações semiótica. Os registros semióticos são importantes por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado, e por se constituírem num sistema de comunicação.

Sendo assim, esse artigo tem por objetivo apresentar as resoluções de Sistemas Lineares de ordem 3 e suas interpretações geométricas, com o auxílio do GeoGebra. Para tanto pretende-se gerar um arquivo no GeoGebra que torne visível a interpretação geométrica para uma melhor compreensão da solução de um Sistema Linear de ordem 3 levando como base a regra de Cramer o os registros de representações semiótica.

GeoGebra como recurso didático

O *software* GeoGebra é um recurso didático bastante utilizado na atualidade e vem ganhando espaço a cada momento. Segundo Pereira (2012), o GeoGebra é um *software* livre criado por Markus Hohenwarterll da Universidade de Salzburg para educação Matemática nas escolas. Disponível para download, reuni recursos geométricos, algébricos e cálculos, sendo um aplicativo que trabalha a geometria de forma interativa. Segundo hohenwarter (2007), criador do *software*, “a característica mais destacável do GeoGebra é a percepção dupla dos objetos: cada expressão na janela de Álgebra corresponde a um objeto na Zona de Gráficos e vice-versa”.

Sendo assim o GeoGebra tem várias funções, a utilizada nesse artigo foi a interpretação geometria da solução do sistema linear, uma interação entre a álgebra e a geometria. Mostramos no quadro ou até no próprio aplicativo a solução de um sistema linear de ordem 3 (algebricamente) e mostramos no GeoGebra através dos planos (geometricamente). Com base em Duval, dando ênfase a transformação de representação semiótica das conversões, no qual temos também a representação dos tratamentos.

> Os tratamentos são procedimentos de justificação do objeto de estudo baseados em fenômenos congruentes, segundo os quais os registros permanecem num mesmo sistema de representação, seja através da escrita, de figuras, gráficos, diagramas, dentre outros; já a conversão é um processo de transformação de um tratamento em outro no qual há mudança de sistema de registro com a conservação da referência ao objeto estudado. (PANTOJA, CAMPOS E SALCEDOS, 2013, P. 5).

Neste artigo, o objeto de estudo é o sistema linear passando da representação algébrica para a geométrica no *software* GeoGebra, apresentando a representação semiótica das conversões. Os registros de representação são elementos constitutivos da ciência matemática, e é através deles que são definidos os vários tratamentos que podem ser empregados no estudo dos objetos matemáticos, daí não podermos deixar de reconhecer a importância dos registros para a construção do conhecimento, considerando os conteúdos específicos que cada representação tem. Para reforçar essa ideia, Pantoja, Campos e Salcedos (2013) dizem que cada registro de representação apresenta um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado, estabelecendo relações entre eles e o sujeito, se apropriando do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracteriza.

Sistemas Lineares e a geometria plana

Sobre o surgimento do sistema linear, Lamin (2000), destaca que na Matemática ocidental antiga, são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, com os chineses, o assunto foi melhor estudado. Com seu gosto especial por diagramas, eles acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação, representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com banas de bambu sobre os quadros de um tabuleiro, que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares. Mas não querendo se aprofundar na história, ela conta que foi só em 1683, num trabalho do japonês Seki Kowa, que a ideia de determinante veia à tona.

A geometria em geral surgiu no Egito com a necessidade do homem em medir as terras e ao longo do tempo foi ganhando formas até os tempos de hoje. Acrescentando, Brandt e Montorfano (2008) falam da importância da geometria, que a mesma é fundamental já que está presente no nosso dia a dia, sendo importante para a participação do homem na sociedade, pois facilita a resolução de problema, o raciocínio visual, compreensão do mundo, estando presente no artesanato entre outros. Em inúmeras ocasiões, precisamos observar o espaço tridimensional como, por exemplo, na localização e na trajetória de objetos e na melhor ocupação de espaços. E nesse caso na resolução de um sistema linear de ordem 3, que representam planos no espaço tridimensional.

Sendo assim, na resolução de um sistema linear de ordem 3, onde vamos ter três variáveis (x, y e z) podemos representar esse mesmo sistema no *software* GeoGebra, no qual vamos ter a representação de um plano, que ele varia de acordo com os valores de x, y e z nos dando algumas possibilidades que será tratada a seguir.

Regra de Cramer e a resolução do sistema linear

Para a resolução de um sistema linear, temos algumas opções, e uma delas é a regra de Cramer, Lamin (2000), diz que:

> Para resolver sistemas de n equações a n incógnitas, por meio de determinantes, é na verdade uma descoberta do escocês Colin MacLaurin (1698-1746), datando provavelmente de 1729, embora só publicada postumamente, em 1748 no seu *Treatise of algebra*. Mas o nome do suíço Gabriel Cramer (1704-1752) não aparece nesse episódio de maneira totalmente gratuita. Cramer também chegou à regra (independentemente), mas depois, na sua Introdução à Análise das Curvas Planas (1750), em conexão com o problema de determinar os coeficientes da cônica geral $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + By +F = 0$. (LAMIN, 2000, P. 3 e 4).

Sendo assim, Cramer é uma das maneiras de resolver um sistema linear, mas só poderá ser utilizada na resolução de sistemas que o número de equações e o número de incógnitas forem iguais com n-equações e n-incógnitas. No qual será mostrada nesse artigo de ordem 3.

Se um sistema de n equações tiver $D \neq 0$, então ele será determinado, e o valor de cada incógnita será dado por uma fração que tem D no denominador, e, no numerador, o determinante da matriz dos coeficientes, substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita pela coluna dos termos independentes do sistema.

Seja S um sistema linear com números de equações igual ao de incógnitas. Se $D \neq 0$,

$X = \frac{Dx}{D}$ $\forall\, x \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

$Y = \frac{Dy}{D}$ $\forall\, y \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

$Z = \frac{Dz}{D}$ $\forall\, z \in \{1, 2, 3, ..., n\}$

Onde D é o determinante da matriz obtida de A.

Os tipos de soluções dos sistemas lineares dependem da matriz A:

i) O Sistema é Possível e Determinado (SPD) se possui uma única solução. O determinante de A deve ser diferente de zero (A é uma matriz não-singular);

ii) O Sistema é Possível e Indeterminado (SPI) se possui infinitas soluções; O determinante de A é nulo (A é uma matriz singular);

iii) O Sistema é Impossível ou Incompatível (SI) se não possui solução. O determinante de A deve ser nulo; O valor no numerador não pode ser nulo ou múltiplo de alguma coluna de A.

Em sistema lineares de ordem 3x3 da forma $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, as equações (I), (II) e (III) representam planos π_1, π_2 e π_3 no espaço tridimensional.

As Possibilidades para as posições dos três planos são oito:

No sistema impossível (SI) vamos ter: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \varnothing$.

- $\pi_1 // \pi_2 // \pi_3$
- $\pi_1 // \pi_2 \equiv \pi_3$
- $\pi_1 // \pi_3$ e s // t
- r // s // t

No sistema possível e indeterminado (SPI) vamos ter: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = \pi$ ou r.

- $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3 = \pi$
- $\pi_1 \equiv \pi_2 \not\equiv \pi_3$
- $\pi_1 \not\equiv \pi_2 \not\equiv \pi_3$

No sistema possível e determinado (SPD) temos: $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = P$

- $\pi_1 \not\equiv \pi_2 \not\equiv \pi_3 = P$

Resultados

Serão apresentados três exemplos fixando na regra de Cramer, que apresentam a interpretação geométrica da solução algébrica de sistemas de equações lineares de três equações com três incógnitas através do arquivo desenvolvido durante essa pesquisa. No primeiro exemplo, iremos trabalhar com um sistema impossível (SI), que segue:

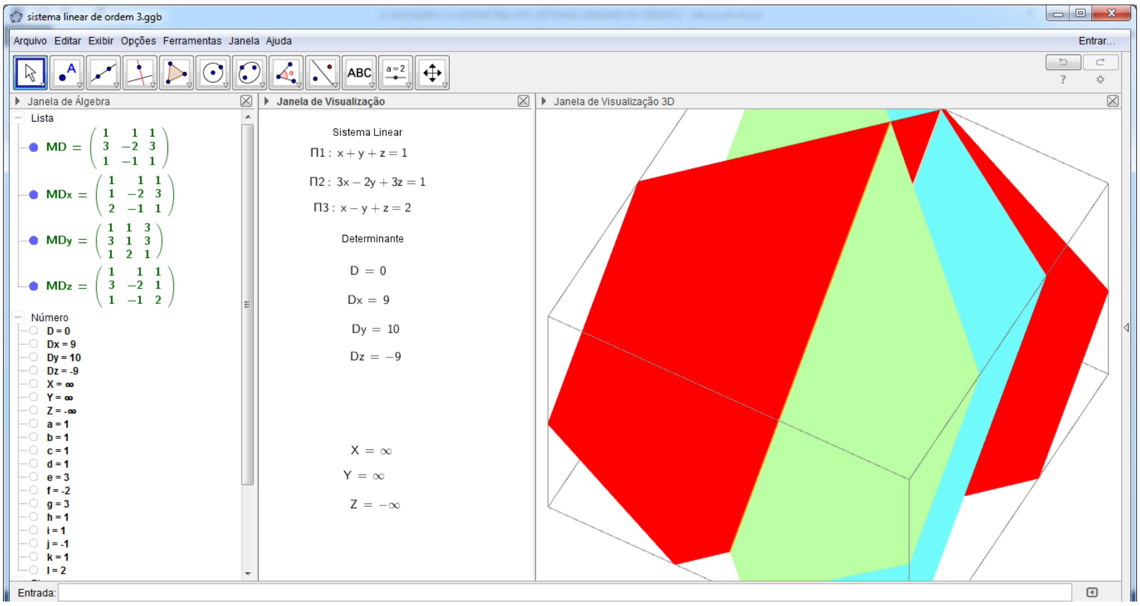
π_1 :x + y + z = 1

π_2 :3x - 2y + 3z = 1

π_3 :x – y + z = 2

Ao configurar os controles deslizantes (deixamos oculto para ser melhor visualizada a tela), para estarem de acordo com o sistema linear acima, teremos a seguinte tela:

Figura 1 - imagem do GeoGebra com o sistema impossível.



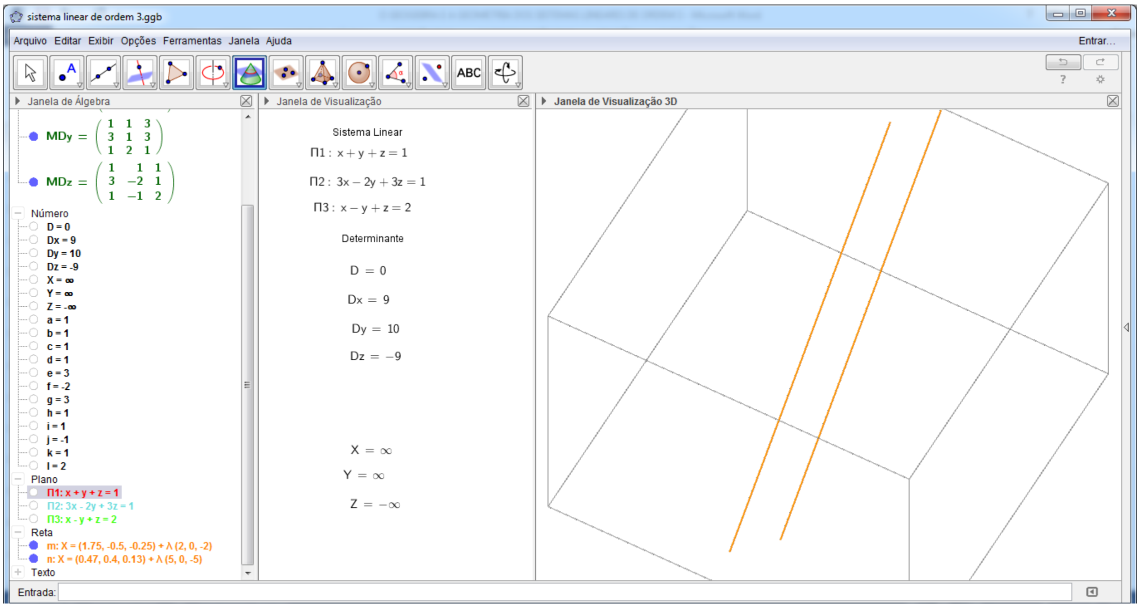
Fonte: Autoria própria

A regra de Cramer mostrada acima, diz que, para se ter um sistema impossível, o determinante D tem que ser 0 e Dx, Dy e Dz diferentes de 0. Observamos que os planos π_1 e π_2 e as retas m e n são paralelos, não possuem pontos e retas em comum. Ou seja, o sistema não possui solução, o que é comprovado pelos valores dos determinantes das matrizes correspondentes D= 0, Dx= 9, Dy= 10 e Dz= -9. Como o determinante de D é nulo, e os outros não, temos que x = $\frac{9}{0}$, y = $\frac{10}{0}$ e z = $\frac{-9}{0}$. Logo x, y e z não existem (na imagem do GeoGebra os valores correspondentes de x, y e z aparecem mostrando o resultado para o infinito).

Se tratando dos registros das teorias de representações semióticas desenvolvida por Duval, podemos ver na plataforma do GeoGebra os objetos a serem estudados, temos duas janelas, álgebra e geometria, vemos a representação numérica na janela algébrica e os planos na janela geométrica. Neste caso temos dois registros, que é vista de maneira simultânea pelo *software* comprovando que o mesmo é uma boa base para esse estudo.

Se tirar os planos vamos ter duas retas (m e n) paralelas:

Figura 2 - imagem do GeoGebra com o sistema impossível retirando os planos.



Fonte: Autoria própria

O próximo exemplo do Sistema linear é um sistema possível e determinado (SPD). Sejam:

$\pi_1 : x + y + z = 1$

$\pi_2 : 3x + y - z = 1$

$\pi_3 : x - y + z = 2$

Conforme o exemplo anterior, vamos configurar os controles deslizantes para estar de acordo com o sistema acima.

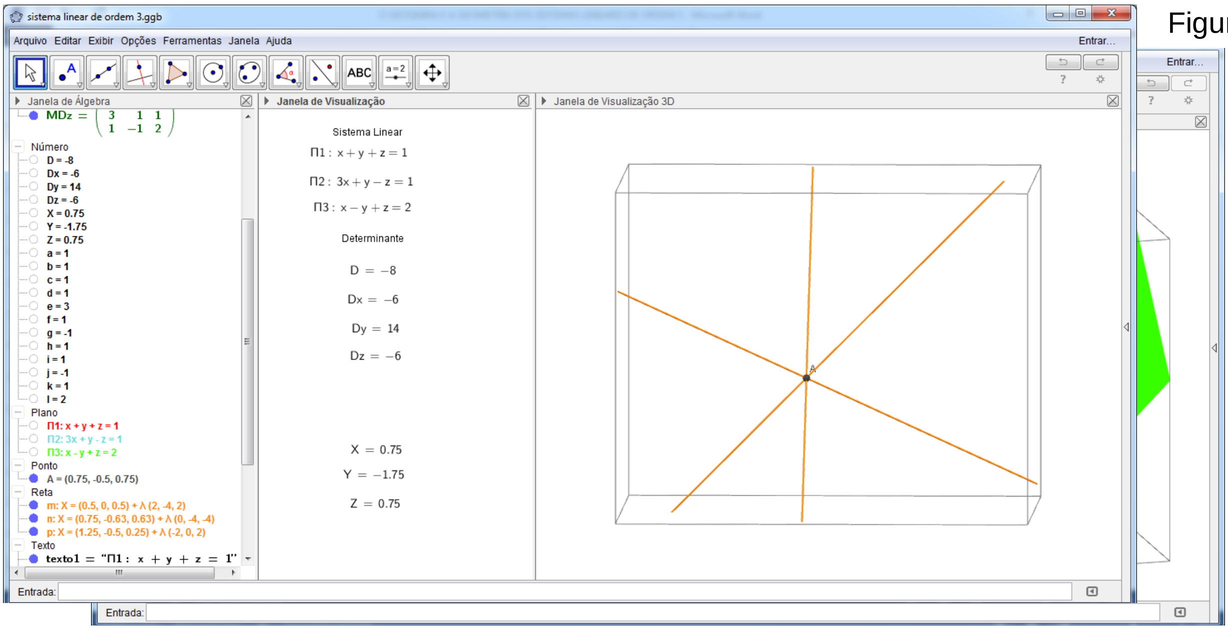


Figura 3 - imagem do GeoGebra com o sistema possível e determinado.

Fonte: Autoria própria

Nessa resolução, Cramer diz que um sistema é determinado se D, Dx, Dy e Dz forem diferentes de 0 o que ocorreu de acordo com a resolução na janela algébrica, assim possui apenas uma solução. Os planos π_1, π_2 e π_3 não são paralelas e nem congruentes, contendo um ponto (A) em comum. As retas m, n e p são concorrentes. Tem, x= 0,75, y= - 1,75 e z= 0,75. possui uma única solução, o determinante de D é diferente de zero. Os determinantes são: D=-8, Dx= -6, Dy= 14 e Dz= -6.

Se tirar o plano e deixar só a intersecção dos planos (reta) e a intersecção das retas (ponto), podemos ver uma melhor visualização do sistema, mostrando que, vamos ter apenas um ponto em comum.

Figura 4 - imagem do GeoGebra com o sistema impossível retirando o plano.

Fonte: Autoria própria

Nosso último exemplo trazemos um sistema linear possível e indeterminado (SPI). Sejam:

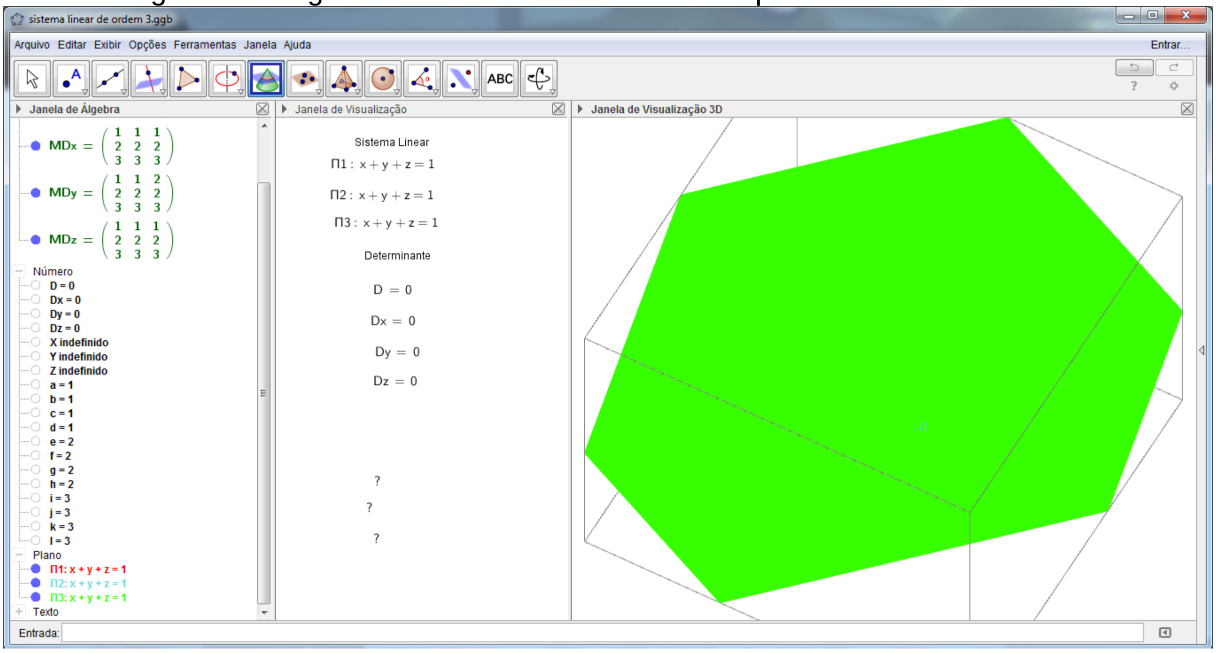
$\pi_1 : x + y + z = 1$

$\pi_2 : 2x + 2y + 2z = 2$

$\pi_3 : 3x + 3y + 3z = 3$

Após utilizarmos os mesmos procedimentos dos casos anteriores, obtivemos a seguinte tela (o GeoGebra simplifica as equações, logo π_1, π_2 e π_3 ficaram iguais):

Figura 5 - imagem do GeoGebra com o sistema possível e indeterminado.



Fonte: Autoria própria

Observa-se que os planos π_1, π_2 e π_3 são paralelos coincidentes, formando um único plano, $\pi_1 \equiv \pi_2 \equiv \pi_3 = \pi$. Logo, possuem infinitos pontos e retas em comum, e, portanto, o sistema tem infinitas soluções. De acordo com a regra, todos os determinantes têm resultados iguais a 0, o determinante de D é nulo, temos: D= 0, Dx=0, Dy=0 e Dz= 0, o que ratifica o conceito, já que $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$ e $z = \frac{0}{0}$ o que chama-se de indeterminação Matemática, no *software* aparece o nome “indefinido”, pois não pode definir um único valor para x, y e z.

Considerações Finais

O uso de tecnologia como recurso didático vem ganhando espaço a cada ano, onde a utilização dela poderá trazer contribuições para o processo de ensino e aprendizagem matemático, pois auxilia na construção do conhecimento e aprimora o ensinamento, com uma nova metodologia. Os programas, nesse caso o *software* GeoGebra, apresentam possibilidades de ensino, neste apresentado podemos encontrar inúmeras funções podendo se trabalhar vários assuntos matemáticos e não apenas o sistema linear, isso o torna ainda mais procurado e aproveitado por professores e alunos.

O GeoGebra teve como objetivo facilitar o ensino de um sistema linear de ordem 3, possibilitando outras opções de resolução, partindo da álgebra para a geometria, reforçando os registros de representações semiótica de Duval onde tínhamos dois objetos de trabalho e representamos em um só, o GeoGebra.

Antes de trabalhar o GeoGebra é importante ensinar a regra de Cramer, introduzido no artigo, dentro dela que se trabalhou as resoluções para as opções de SI, SPD e SPI para em seguida no *software*, onde pudemos ver uma melhor visualização e entendimento dos conceitos.

Apresentar novos recurso didáticos ajudam, mas não podemos afirmar que é a solução para o ensino e aprendizagem matemático, são vários fatores que implicam nesse contexto, partido da metodologia do professor com facilidade de lidar com esses recursos, até chegar no interesse de aprender do aluno, são vias que temos que seguir para tentar achar soluções para uma melhor educação.

Sendo assim trabalhamos a solução dos sistemas lineares de ordem 3, tendo como base o artigo "O GeoGebra e a Geometria dos Sistemas Lineares de Ordem 2" da mesma autoria, se apegando a pesquisa de Duval e a teoria de Cramer.

Referencias

BRANDT, S. T.; MONTORFANO, C. O software Geogebra como Alternativa no ensino da geometria em um minicurso para professores. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf> Acesso em: 03 de outubro de 2016.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. *O uso do software geogebra em uma escola pública*: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Mestrado profissional em educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

Geogebra**.** Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>, acesso em 12 de maio de 2017.

HOHENWARTER, M. GeoGebra Quickstart: Guia rápido de referência sobre o GeoGebra, disponível em: <https://app.geogebra.org/help/geogebraquickstart_pt_BR.pdf>. Acesso em: 10 de maio de 2017.

SANCHO, Juana. Para uma tecnologia educacional. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FERREIRA, R. C (2010) apud. SILVA. J. C.; SANTANA, W. F. O Geogebra e a Geometria dos Sistemas Lineares de ordem 2**.** In**:** I CONGRESSO BRASILEIRO DO GEOGEBRA. 2016, Natal. Anais... UFERSA, 2016. P. 1.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. S. C; SALCEDOS, R. R. C. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares**.** In: VI CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA. 2013, Canoas. Anais... UBRA, 2013. P. 5.

LAMIN, Maria Regina Nunes. *Resolução de problemas modelados com sistemas de equações lineares.* 2000. 91 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2000.