



## O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA:

### Reflexões e discussões de professores que ensinam Matemática

**Elion Souza da Silva**<sup>1</sup>

**Fabiana Chagas de Andrade**<sup>2</sup>

**Jefferson Araújo dos Santos**<sup>3</sup>

### Formação de Professores que Ensinam Matemática

**Resumo:** Este minicurso consiste em uma proposta de atividade formativa sobre o *Conhecimento Matemático para o Ensino de Análise Combinatória*. À luz das noções de Conhecimento Matemático para o Ensino (BALL; THAMES; PHELPS, 2008) e de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (SHULMAN, 1986), buscamos inspiração no percurso metodológico apresentado por Biza et al. (2007), que consiste na apresentação de cenários de investigação contendo resoluções fictícias de alunos para observar a postura do professor ante as mesmas. Em nossa leitura, e adaptação, desenvolvemos nossa atividade a partir de um problema motivador de Combinatória - *O Problema dos Diferentes Caminhos* (ANDREESCU; FENG, 2013) -, para que os participantes possam refletir sobre estratégias para resolvê-lo no quadro para uma turma de alunos, e, em seguida, projetamos algumas resoluções prévias de professores do Ensino Médio para esse problema, que foram coletadas por um dos autores através de uma *Lista de Transmissão* em um aplicativo de mensagens instantâneas. Essas resoluções serão discutidas, buscando a reflexão segundo os aspectos metodológicos, didáticos e pedagógicos. Por fim, lançaremos duas questões disparadoras baseadas no ensino desse conteúdo junto ao grupo para promover a discussão. Esperamos que, com esta atividade, os participantes possam (re)construir alguns aspectos de seu conhecimento matemático para o ensino de Combinatória com vistas a contribuir para sua prática profissional em sala de aula.

**Palavras Chaves:** Conhecimento Matemático Para o Ensino. Saberes docentes. Formação de Professores. Análise Combinatória.

## 1. INTRODUÇÃO

Refletir sobre a própria prática de ensino é um exercício importante na busca do professor por uma melhor atuação em sala de aula em prol da aprendizagem de seus alunos, posto que refletir, segundo Geraldini, Messias e Guerra (1998), implica uma consideração cuidadosa e ativa daquilo em que se acredita ou se pratica, à luz dos motivos que o justificam e das consequências que daí resultam. Considerando essa premissa, trabalharemos neste minicurso uma atividade formativa para professores que ensinam matemática, na pretensão de fomentar discussões do tópico

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática (PROFMAT/UECE) e Doutorando em Ensino e História da Matemática e da Física (PEMAT/UFRJ). Docente do IFCE – *Campus Iguatu*. profelion@gmail.com

<sup>2</sup> Mestre em Matemática (PROFMAT/UNIRIO) e Doutoranda em Ensino e História da Matemática e da Física (PEMAT/UFRJ). Docente do CEFET/RJ – *Campus Itaguaí*. bia.proformat@gmail.com

<sup>3</sup> Mestrando em Ensino de Matemática (PEMAT/UFRJ). jeffaraujo30@yahoo.com.br

por nós eleito (Combinatória), mobilizando e, potencialmente, ressignificando seu conhecimento matemático para o ensino (Ball, Thames e Phelps, 2008) em seus vários aspectos, na perene intencionalidade de buscar enxergar a matemática elementar a partir de um ponto de vista superior, no sentido de Klein (2010). Nosso objetivo fulcral é contribuir para o desenvolvimento profissional de cada participante.

Em linhas gerais, apresentaremos um problema de Análise Combinatória (“O Problema dos Diferentes Caminhos”), acompanhado de duas questões disparadoras para a discussão acerca de aspectos conceituais, didáticos e pedagógicos, que permeiam o arcabouço de saberes de cada professor. Ainda comporão elementos para a discussão algumas resoluções prévias coletadas por um dos autores através de uma *Lista de Transmissão* em um aplicativo de mensagens instantâneas, que serão analisadas segundo os aspectos supracitados. Nossa inspiração, apesar das muitas particularidades, foi em Biza et al (2007), na mesma perspectiva de explorar simulações de situações que possam surgir no dia-a-dia da prática do professor na sala de aula.

Em geral, consideramos essas tarefas como oferecendo oportunidades para preparar os professores para entrarem na sala de aula com uma habilidade aprimorada para a prática reflexiva (...). Essas oportunidades podem ser na forma de oficinas nas quais os professores se envolvem e refletem/discutem suas respostas e as de outros para essas tarefas; (...) vemos esse tipo de tarefa como parte de um ambiente preparatório que levanta e desenvolve a consciência do professor (...). (BIZA ET AL; 2007, p. 309, tradução nossa).

## **2. O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO E O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO**

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, introduzido por Shulman (1986), é um marco no estudo e pesquisa sobre os saberes docentes, especialmente chamando a atenção para a ausência do olhar para o Conhecimento do Conteúdo, ao que ele denuncia como sendo o *Problema do Paradigma Perdido*. Nesse artigo, o autor afirma que o professor deve *compreender* as estruturas do conhecimento do conteúdo que leciona, tanto no aspecto disciplinar, quanto dentro do contexto pedagógico e acerca do currículo, caracterizando, assim, as três categorias do repertório de Shulman para o saber docente: (1) Conhecimento (Disciplinar) do Conteúdo; (2) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e (3) Conhecimento Curricular.

Na década de 80, Shulman (1986) e seus colaboradores iniciaram sondagens das complexidades da compreensão e transmissão do conteúdo do docente, concluindo a emergente necessidade de um quadro teórico mais coerente.

Como podemos pensar acerca do conhecimento que cresce na mente do professor com ênfase especial no conteúdo? Eu sugiro dividirmos entre três categorias do conhecimento de conteúdo: (a) Conhecimento Disciplinar do Conteúdo, (b) Conhecimento Pedagógico do Conteúdo e (c) Conhecimento Curricular. (SHULMAN, 1986, p. 9, tradução nossa).

O *Conhecimento Disciplinar do Conteúdo* se refere ao montante e organização do saber em si na mente do professor (p. 9). Requer compreender as estruturas sintáticas e materiais do conteúdo, sendo capaz de dizer não somente que *algo é assim*, mas também *porque é assim*.

O *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo*, por sua vez, vai de encontro ao conhecimento do conteúdo em si, na dimensão do conhecimento da matéria no ensino. Sendo assim, Shulman está se referindo ao tipo de conhecimento de conteúdo que dialoga e se mistura com o espectro pedagógico. Esse conhecimento tem muito a ver com as ilustrações, exemplificações, analogias, (re)formulações dos conceitos, ou seja, os caminhos para tornar o conteúdo mais tangível e compreensível ao aluno. (p. 9).

O *Conhecimento Curricular* constitui uma categoria que representa todos os programas concebidos para ensino de certos tópicos em dado nível, a variedade de material didático disponível etc. Assim como um médico preparado sabe exatamente qual medicamento prescrever para combater um determinado mal, o professor precisa saber qual o momento certo, para usar a ferramenta certa. “Com Aristóteles nós afirmamos que o derradeiro teste de compreensão reside na habilidade de transformar conhecimento em ensino. Quem sabe, faz. Quem compreende, ensina”. (SHULMAN, 1986, p. 14, tradução nossa).

Ball, Thames e Phelps (2008), por sua vez, desenvolveram uma teoria baseada na prática do conhecimento de conteúdo para o ensino, construída sobre a noção de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo de Shulman (1986). A proposta do trabalho de Ball e seus colaboradores foi investigar a natureza da orientação profissional para o conhecimento de matemática para estudos em ensino de matemática, e identificar o *Conhecimento Matemático para o Ensino*. Dessa forma, Conhecimento de Matemática para o Ensino é o conhecimento matemático necessário para executar o trabalho do ensino de matemática (p. 395).

Por “ensino”, queremos dizer tudo que os professores devem fazer para apoiar a aprendizagem de seus alunos. Claramente, significa que o trabalho interativo de lições de ensino nas salas de aula e todas as tarefas que surgem no decurso do mesmo trabalho. (BALL; THAMES; PHELPS, p. 395, tradução nossa).

Ball e seus colegas discerniram empiricamente quatro subdomínios dentro das categorias de Shulman: Conhecimento Comum do Conteúdo, Conhecimento Especializado do Conteúdo, Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino. Nesta perspectiva, os dois primeiros estariam contidos no Conhecimento (Disciplinar) do Conteúdo e os dois últimos no Saber Pedagógico do Conteúdo. O Conhecimento Comum seria aquele que tanto professores de matemática quanto não professores devem conhecer, enquanto o Conhecimento Especializado é *único* para o ensino (p. 399, 400). O terceiro é o Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos, que é a intersecção entre o conhecimento da matemática e também os conhecimentos acerca do aluno, permitindo ao professor antecipar ideias prováveis dos alunos, corrigindo, intervindo e dando-lhes autonomia. O último é o Conhecimento do Conteúdo e do Ensino, que é a intersecção entre matemática e ensino, diferenciando tarefas/problemas introdutórios de tarefas/problemas avançados, mensurando qual atividade é mais fácil ou mais difícil em termos gerais etc.

Klein (2010) defendia que professores de matemática deveriam olhar para a Matemática Escolar “de cima”. Mesmo sendo de uma época muito anterior a Shulman, Klein mostra ter impressões semelhantes sobre o saber necessário para o ensino, como enfatizam Rangel, Giraldo e Maculan (2014):

(...) Klein entende que o professor deve não somente ter conhecimentos específicos sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática como ciência. (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014, p. 2).

### **3. DETALHAMENTO DA ATIVIDADE**

Optamos por explorar a Análise Combinatória, um ramo importante da matemática escolar, que representa um caso especial principalmente por não possuir uma teoria axiomática. Tal campo interage com outras teorias matemáticas, levando a estratégias de resolução de problemas e fornecendo resultados, além de lidar com

problemas concretos e geralmente fáceis de entender. A resolução de problemas pode estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório, imprescindível para que o aluno não acabe tomando para si a Combinatória como simplesmente *o estudo dos arranjos, combinações e permutações*. Esses tipos de problemas são particularmente úteis quando se aprende e ensina matemática.

Klein (2010) defende que o professor precisa saber *mais* do que o que vai ensinar aos seus alunos. Mas, trazendo para os dias de hoje, em que se constituiria este *a mais* que o professor de matemática precisa saber acerca de combinatória em relação àquilo que exporá para (e explorará com) os seus alunos? Neste caminho, podemos pensar em subtópicos específicos que não figuram nos currículos do ensino médio regular: Como o Princípio das Casas dos Pombos, Princípio de Inclusão e Exclusão, Funções Geradoras etc. Mas, principalmente, podemos pensar sobre aspectos didáticos e metodológicos, tais como: Como enunciar o Princípio Multiplicativo para os alunos? Em que momento podemos introduzir fórmulas que resolvem determinados tipos de problemas (como Combinações)? Que contextos e situações podem ser explorados mais a fundo nos problemas propostos aos alunos? Refletir sobre questões como estas é um trabalho extremamente complexo e sutil, mobiliza saberes múltiplos do professor e serão o foco do minicurso.

Para apresentar a nosso minicurso de maneira estruturada, elencaremos a sequência de etapas planejadas e uma descrição logo em seguida. O problema motivador é o que segue:

### **O problema dos diferentes caminhos**

*Uma cidade tem forma retangular, e sua malha de ruas é composta por  $x + 1$  linhas paralelas sentido norte-sul e  $y + 1$  linhas paralelas para o leste-oeste. De quantas maneiras um carro pode chegar ao canto nordeste (B) se ele começa o trajeto no canto sudoeste (A) e viaja apenas nas direções leste e norte?<sup>4</sup>*

Duas questões disparadoras foram elaboradas para promover a discussão acerca das dimensões dos saberes dos professores participantes. São elas:

*Questão 1:* Você acha este problema adequado para se trabalhar com alunos de ensino médio? Por quê?

---

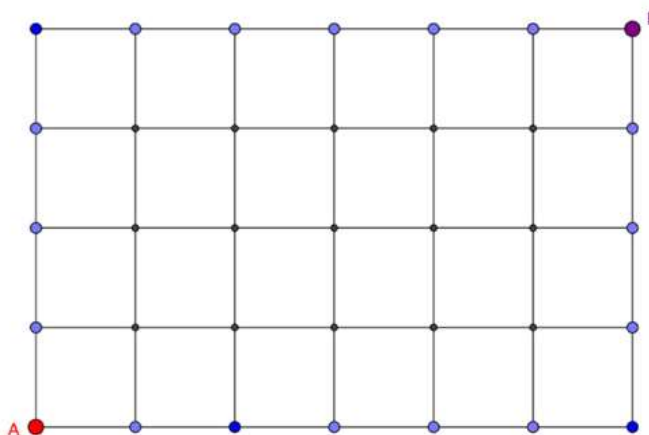
<sup>4</sup> Problema extraído de Andreescu & Feng (2013), tradução nossa.

*Questão 2:* Quais conceitos, padrões, regras, fórmulas etc você consegue enxergar dentro desta situação-problema? Destes, quais (e de que forma) você poderia trabalhar com seus alunos no ensino médio?

Além disso, serão exibidas algumas resoluções prévias para o mesmo problema (no caso particular onde  $x = 6$  e  $y = 4$ ), que teve o seguinte comando:

*“Uma cidade tem forma retangular, e sua malha de ruas é composta por 7 linhas paralelas sentido norte-sul e 5 linhas paralelas para o leste-oeste, conforme ilustra a figura 1 abaixo. De quantas maneiras um carro pode chegar ao canto nordeste (B) se ele começa o trajeto no canto sudoeste (A) e viaja apenas nas direções leste e norte?”*

*Figura 1: Representação da malha de ruas*



*Fonte: Autores*

*Suponha que você tenha encaminhado este problema como uma tarefa para alunos de uma turma de ensino médio na qual você leciona. Após dar o visto nas soluções de cada aluno, você decide expor uma solução possível no quadro. Responda esta mensagem nos mostrando qual seria essa solução para o problema, descrevendo de que modo você explicaria cada passo para os seus alunos.”*

As resoluções foram coletadas por meio de respostas individuais dos professores participantes a uma mensagem enviada por um dos autores numa *Lista de Transmissão* de um aplicativo de mensagens instantâneas e algumas dessas respostas serão expostas durante o minicurso.

Este é o roteiro de proposição de nossa atividade formativa:

## Roteiro

- 1) Explicação da proposta para o público-alvo;
- 2) Exposição do problema motivador e resolução (em duplas) por escrito pelos participantes;
- 3) Apresentação das respostas previamente coletadas e discussão coletiva;
- 4) Apresentação da Questão 1 e discussão coletiva;
- 5) Apresentação da Questão 2 e discussão coletiva;
- 6) Fechamento da dinâmica.

## 4. À GUIA DE CONCLUSÃO

Esperamos que, através deste minicurso, os participantes possam ter a oportunidade de buscar (re)construir alguns aspectos de seu conhecimento matemático para o ensino de Análise Combinatória, com vistas a contribuir para sua prática profissional em sala de aula. Na esteira do trabalho de Shulman (1986), temos a ambição de contribuir para que o Saber (disciplinar) do Conteúdo (de Combinatória) destes profissionais se articule com seu saber pedagógico do conteúdo (enunciar o Princípio Multiplicativo de modo a amenizar possíveis más compreensões por parte dos alunos; perceber o melhor momento para introduzir as fórmulas combinatórias que resolvem determinados tipos de problemas etc), culminando num eficaz desenvolvimento profissional e num norteamento para a constante reflexão sobre a sua própria prática docente. Acreditamos que as bastantes discussões que proporemos e mediremos, irão convergir para o objetivo principal do minicurso.

## 5. REFERÊNCIAS

ANDREESCU, T.; FENG, Z. **A Path to Combinatorics for Undergraduates: Counting Strategies**. Springer Science & Business Media, 2013.

BALL, D. L.; THAMES, M. H. T.; PHELPS, G. **Content Knowledge for Teaching, What Makes It Special?** Journal of Teacher Education p. 389-407, 2008.

BIZA, I.; NARDI, E.; ZACHARIADES, T. **Using Tasks to Explore Teacher Knowledge in Situation-Specific Contexts**. Journal of Mathematics Teacher Education, v. 10, n. 4-6, p. 301-309, 2007.

EVEN, R.; BALL, D. **The professional education and development of teachers of mathematics – *The 15th ICMI Study***. 2009, New York, NY: Springer.

GERALDI, C. M. G; MESSIAS, M. G. M.; GUERRA, M. D. S. **Refletindo com Zeichner: um encontro orientado por preocupações políticas, teóricas e epistemológicas**. Cartografias do trabalho docente, v. 3, p. 237-276, 1998.

KLEIN, F. **Matemática elementar de um ponto de vista superior-Volume 1-primeira parte: Aritmética**. Tradução de Tiago Pedro e Suzana Metello de Nápoles. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática, 2010.

RANGEL, L. G.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. **Matemática Elementar e Saber Pedagógico de Conteúdo – Estabelecendo Relações**. *Professor de Matemática Online* – SBM. No. 1, v.2. ISSN 2319-023. 2014.

SHULMAN, L. S. **Those Who Understand: Knowledge Growth In Teaching**. Stanford University. 15, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform**. Harvard educational review, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.