PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS NA ESCALA MUSICAL OCIDENTAL

Christian James Henschel[1]

Tânia Baier[2]

Educação Matemática no Ensino Médio

Resumo: Com uma abordagem interdisciplinar o presente relato de experiência buscou na música uma forma de mostrar um conceito matemático nas coisas do cotidiano. Explorou-se a história da música, desde o século VI a.C. até os dias atuais, mais precisamente na elaboração teórica da escala musical ocidental – a escala igualmente temperada – e seu entendimento matemático de estrutura e forma, segundo várias abordagens de diferentes músicos e matemáticos que existiram até chegar no conceito que que se tem definido hoje. O objetivo da pesquisa está no desenvolvimento e na aplicação de uma proposta de oficina que envolva interdisciplinarmente o ensino das progressões geométricas presentes na construção de um instrumento musical, mais especificamente na construção da escala temperada de um instrumento musical de cordas, quando a progressão geométrica (P.G.) determina a posição de cada um dos chamados "trastes" do instrumento musical no momento de sua construção. A atividade foi elaborada para os alunos do ensino médio participantes de uma oficina no ano de 2017.
Palavras Chaves: Escala Musical. História da Matemática. História da Música.

INTRODUÇÃO

Conforme discussões recentes do documento BNCC (Base Nacional Comum Curricular), em que trata das competências a serem desenvolvidas com os estudantes nos currículos matemáticos das escolas brasileiras, mesmo que este ainda esteja incompleto, percebe-se que há a crescente preocupação com a contextualização dos conceitos abordados em sala, pois o BNCC (2015) afirma que o ensino da matemática deve propiciar uma visão abrangente do mundo ao redor, que precisa desenvolver a capacidade de argumentação e segurança para lidar com problemas. Justamente por isso é fundamental que o ensino seja contextualizado e interdisciplinar e que ao mesmo tempo possa desenvolver a capacidade de abstração do aluno e a capacidade de perceber o que pode ser generalizado para outros contextos usando da imaginação. Desta forma este artigo busca atender esta conexão entre diferentes campos do conhecimento procurando estabelecer relações entre a matemática e a música.

Há muito tempo os matemáticos se interessam por música e músicos se interessam por matemática. Então, como trabalhar em sala de aula a relação entre a matemática e a música de forma interdisciplinar no ensino das progressões geométricas na matemática? Como hipótese, os autores pensam ser possível um trabalho interdisciplinar no ensino das progressões geométricas envolvendo a música.

[1] Mestrando em Ensino das Ciências Naturais e Matemática. FURB. christianjameshenschel@yahoo.com.br
[2] Doutora. FURB. taniabaier@gmail.com

Para isso faz-se uma contextualização história do desenvolvimento teórico das concepções de escala musical desde Pitágoras até a escala musical igualmente temperada adotada atualmente no ocidente. O objetivo, portanto, é o desenvolvimento e a aplicação desta proposta de oficina para o ensino médio.

METODOLOGIA

O relato de experiência foi desenvolvido no ano de 2017 com alunos participantes de uma oficina com encontros nas quartas-feiras à tarde onde tratavam do tema música com diversas abordagens que envolviam a física, a matemática, história, arte entre outros.

Quanto aos procedimentos metodológicos, esta pesquisa possui um caráter qualitativo e as atividades foram realizadas em seu ambiente natural porque entende-se que as ações são melhores compreendidas quando são observadas em seus ambientes naturais de ocorrência: a sala de aula. Uma das características da pesquisa qualitativa é que ela tem como fonte direta de dados o ambiente natural onde ocorre o fenômeno, ou seja, a própria sala de aula, pois há a preocupação com o contexto de ocorrência do fenômeno e os dados recolhidos são ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas. Quanto à forma de descrição dos dados houve o cuidado no registro de imagens da realização das atividades propostas, omitindo a identidade de cada aluno envolvido com as atividades, mas ao mesmo tempo houve a preocupação em registrar detalhes que ilustram momentos específicos do desenvolvimento das atividades. Na pesquisa qualitativa há o interesse no significado que os diferentes participantes da pesquisam atribuem às coisas. Ao buscar entender as perspectivas dos participantes, a pesquisa qualitativa enfoca a dinâmica interna das situações (BOGDAN; BIKLEN, 1999).

Buscando auxiliar os professores que tenham interesse na aplicação das atividades aqui propostas com outras turmas, neste artigo há o relato das atividades desenvolvidas sobre o tema. Um questionamento pertinente a ser feito neste momento é se os resultados desta pesquisa são possíveis de serem generalizáveis, no sentido de serem aplicáveis em outros locais e com outros sujeitos. Segundo Bogdan e Biklen (1999, p. 66), ao "[...] se estudar uma turma particular, é importante saber até que ponto as outras turmas são semelhantes à que foi estudada". Este questionamento é feito uma vez que as atividades didáticas deste artigo são voltadas a professores que queiram replicar estas atividades ou usá-las como referência para alguma atividade semelhante.

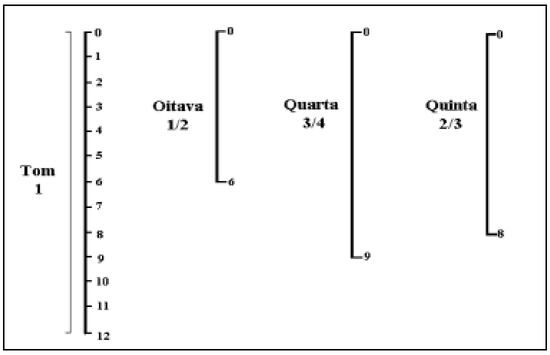
A pesquisa envolve uma fundamentação teórica sobre a construção histórica das escalas musicais pitagóricas e igualmente temperada e define progressão geométrica. Após estas fundamentações, propõe-se uma oficina para ser desenvolvida com alunos do ensino médio que trabalhe esta relação de progressões geométricas com música de forma interdisciplinar.

ASPECTOS HISTÓRICOS DA ESTRUTURA DA ESCALA MUSICAL OCIDENTAL

Segundo Abdounur (2015a) um dos primeiros sinais de estudos envolvendo a matemática e a música remetem ao século VI a.C. quando Pitágoras, através de experiências sonoras com o monocórdio deu origem na época ao quarto ramo da matemática: a música. O monocórdio, inventado possivelmente por Pitágoras, é um instrumento "composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha ou mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel colocado sob a corda para dividi-la em duas seções. " (ABDOUNUR, 2015a, p. 26). Seus experimentos eram constituídos por relações entre o comprimento da corda estendida e a altura musical do som que era gerado ao tocar esta corda estendida.

Os intervalos considerados harmônicos eram os seguintes: a oitava, que era obtido quando se pressionava a corda na metade de seu comprimento, ou seja, com a relação de 1:2; o intervalo de quarta, que era obtida na relação de 3:4; e o intervalo de quinta, o qual era obtido quando a corda era pressionada na relação de 2:3 do seu comprimento (FALLAS LÓPEZ, 1992).

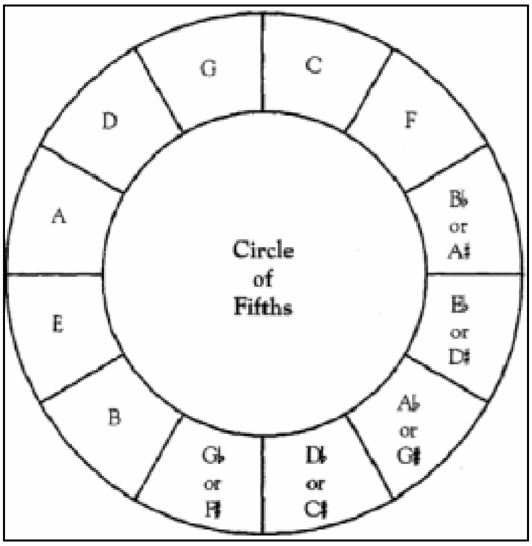
Figura 1 - As relações matemáticas na formação dos intervalos musicais



Fonte: Camargos (2010, p. 46)

Partindo do pressuposto da oitava ser um intervalo fundamental, a ideia era dividir a oitava em sons que determinassem este alfabeto musical através do qual a linguagem musical seria construída tornando-se natural a partir de uma nota, determinante da oitava-universo junto a sua oitava superior, e progredir em intervalos de quintas ascendentes[3] e descendentes, retornado à nota equivalente, acrescida ou diminuída de um número inteiro de oitavas, sempre que saísse da oitava-universo (ABDOUNUR, 2015a). Para melhor entender esse processo, a Figura 2**Erro! Fonte de referência não encontrada.** mostra o ciclo de quintas completo.

Figura 2 - Ciclo de Quintas



Fonte: Garland e Kahn (1995, p. 61)

Matematicamente temos que o intervalo de quinta da nota *dó(C)* é a nota *sol(G)* e que a quinta de *sol* é a nota *ré(R)*, portanto, se *sol* corresponde a 2/3 de *dó*, a nota *ré* corresponderá a 2/3 de *sol*, então com isso temos que: $ré = \frac{2}{3}.sol = \frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. A fração 4/9 não corresponde a nenhuma fração que determina alguma nota entre a oitava de $dó = 1$ e sua próxima oitava $dó = \frac{1}{2}$ então pode-se multiplicar este valor por 2 e obtermos a fração da nota *ré* que corresponde à fração 8/9 (CAMARGOS, 2010).

Figura 3 - Ciclo de quintas representados no teclado

Fonte: Elaboração do autor

Continuando, para obter a quinta da nota *ré*, o *lá*, é usada a mesma ideia, ficando: $lá = \frac{2}{3}.ré = \frac{2}{3}.\frac{8}{9} = \frac{16}{27}$. Percorrendo ainda mais o ciclo de quintas, com a nota

---

[3] Os intervalos ditos ascendentes ocorrem quando a primeira nota é mais grave que a segunda e os intervalos descendentes são quando a primeira nota passa a ser mais aguda que a segunda (PRIOLLI, 2011).

mi, teremos $mi = \frac{2}{3}.lá = \frac{2}{3}.\frac{16}{27} = \frac{32}{81}$, fração esta que não estaria entre as frações da primeira oitava, mas multiplicando por 2 temos $mi = \frac{64}{81}$. Para gerarmos a fração correspondente à nota *si*, faremos: $si = \frac{2}{3}.mi = \frac{2}{3}.\frac{64}{81} = \frac{128}{243}$.

A coluna na Tabela 1 apresentada a seguir mostra as razões e as notas, respectivamente, geradas pela composição de quintas e decompondo as oitavas todas as vezes que a nota gerada é mais alta que a oitava, ou, matematicamente, sempre que a razão é menor que 1:2, para que as notas sempre sejam mantidas na mesma oitava mantendo as razões entre 1:1 e 1:2 (ABDOUNUR, 2015b).

Tabela 1 - Construção da Escala Pitagórica

ratio	note
1:1	C
2:3	G
8:9	D
16:27	A
64:81	E
128:243	B
512:729	F#
2048:2187	C#
4096:6561	G#
16384:19683	D#
32768:59049	A#
131072:177147	F
262144:531441	c

Fonte: Abdounur (2015b, p. 159)

A Figura 4 mostra a escala pitagórica em ordem gerada pela Tabela 1.

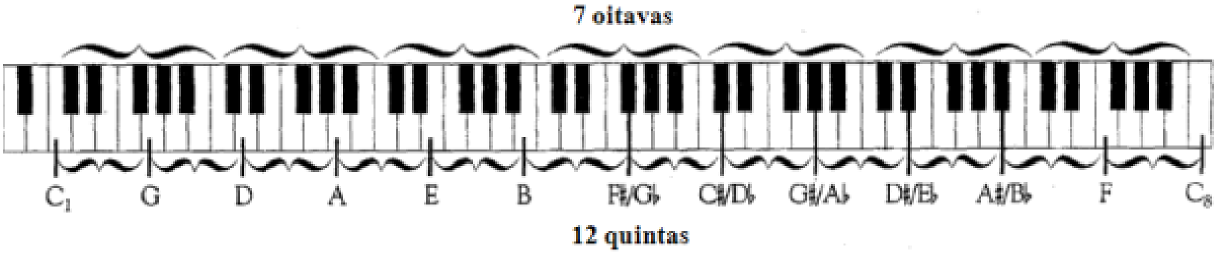
Figura 4 - As notas em ordem crescente de tonalidade

C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	c
1:1	2048:2187	8:9	16384:19683	64:81	3:4	512:729	2:3	4096:6561	16:27	32768:59049	128:243	1:2

Fonte: Abdounur (2015b, p. 158)

O ciclo de oitavas e de quintas não se encontram, como isto será mostrado mais à frente e que a melhor aproximação para esse encontro acontece com 7 oitava e 12 quintas como demonstrado na Figura 5.

Figura 5 - Ciclo de Quintas e Ciclo de Oitavas



Fonte: Camargos (2010, p. 53)

A razão entre o último C e o C uma oitava acima, que é 1:2, é $(262144x2):(531441)$, que é também $(524288:531441) = 0{,}98654037$. Esta não é a razão 1:1, mas $(524288:531441) = 0{,}98654037$, e, portanto, nenhum dos ciclos se encontram, como o primeiro poderia esperar quando um pensa no mesmo processo no teclado. Entretanto, $524288:531441 = 0{,}98654037$ é quase 1:1 e é chamado de *coma pitagórico*, como será mostrado a seguir (ABDOUNUR, 2015b).

Os pitagóricos poderiam considerar um ponto onde é uma boa aproximação entre os ciclos mencionados acima. De fato, depois de repetir tal processo 12 vezes, as 12 notas musicais geradas por tal processo são aquelas que a escala cromática e o resultado é muito perto às 7 oitavas cheias. Se $n = 12$ e $m = 7$, então 12 quintas excedem por um pouco 7 oitavas; a diferença é precisamente o *coma pitagórico*. É possível visualizar se nós expressarmos o *coma pitagórico* matematicamente. Como a diferença é dada assim por $(2/3\,)^{12}:(1/2)^{7}$, que é $2^{19}:3^{12} = 524288:531441$, que é o *coma pitagórico*, este intervalo é tolerável no contexto harmônico, mas grande o suficiente para causar problemas nos intervalos harmônicos no contexto polifônico, por exemplo, se a quinta do *coma pitagórico* é executado com várias linhas de músicas simultaneamente. Desencadeia-se, assim, a necessidade para uma mudança estrutural verdadeira na estrutura matemática subjacente ao sistema de entonação padrão medieval persistente predominante desde a antiguidade. Isto significa que a entonação pitagórica, a afinação da escala compreende onze quintas puras e uma quinta impura, feita de uma pura menos o *coma pitagórico*, chamado de quinta do lobo. Isto era uma maneira de ajuste de ciclos de quintas e de ciclos de oitavas em uma tentativa de manter a pureza (ABDOUNUR, 2015b).

Temperamento foi necessário principalmente porque o intervalo natural não ajusta a si próprio em outro intervalo natural. Por exemplo, 3 terças maiores naturais não compreendem uma oitava por quase 1/5 do tom inteiro; quatro terças menores naturais excedem uma oitava por um pouco; o ciclo de quintas naturais não encontra o ciclo de oitavas como foram mostradas anteriormente; a segunda maior obtida da subtração da terça menor natural da quarta natural é menor que a obtida pela subtração da quarta natural da quinta natural e etc. (ABDOUNUR, 2015b).

Weber (1995) afirma que a resolução do problema da divisão da oitava vai de encontro com as questões de necessidade harmônicas e necessidades melódicas. Temperada é, em sentido mais amplo, toda escala na qual o princípio da distância é levado de tal modo que a pureza dos intervalos é relativizada com o fim de compensar a contradição dos distintos "círculos" de intervalos entre si, diante da redução de distâncias sonoras aproximadamente justas (WEBER, 1995).

No século XVI dominava um temperamento parcial, especialmente em instrumentos que tinha uma afinação fixa, como por exemplo, os instrumentos de teclas. Neste período os espaços sonoros de tais instrumentos não excediam muito mais da extensão das vozes cantantes, pois sua principal função era de acompanhamento desta música vocal. Importava, então, equiparar a afinação no interior das quatro quintas centrais do piano e manter a pureza do intervalo de terça. São vários os meios para esta equiparação. Este temperamento desigual deveria afinar de modo justo, mas na prática ocorria que era perceptível a inconveniência que trazia todos os temperamentos desiguais que alteravam a quinta (WEBER, 1995).

Junto a isso, também o aumento do espaço sonoro dos órgãos e pianos buscando desenvolvimento na música puramente instrumental, as dificuldades técnicas de utilização de pianos com teclados superiores a 30 ou 50 teclas, a necessidade das transposições e o livro movimentos dos acordes levou ao desenvolvimento da ideia de temperamento igual, ou seja, "a divisão da oitava em 12 distâncias iguais de semitom, cada uma de $\sqrt[12]{1/2}$" (WEBER, 1995, p. 132). Deste modo equiparava-se 12 quintas das 7 oitavas, problema este enfrentado pelo *coma pitagórico*. "Toda a moderna música acórdico-harmônica não é concebível sem o temperamento e suas conseqüências. Só o temperamento proporcionou-lhe a liberdade plena. " (WEBER, 1995, p. 133). Desenvolvido e sistematizado no século XVII e início do século XVIII, este modelo que consistia na divisão da oitava em 12 intervalos iguais de semitom permitia que o instrumentista de tecla pudesse executar uma peça em qualquer tonalidade diatônica (ABDOUNUR, 2015a).

Segundo O'Keefee (1972) o problema era encontrar um fator f que correspondesse ao intervalo de semitom que ao multiplicar 12 vezes numa frequência

$f_0 = 1$, correspondente a uma determinada nota, atingiria a oitava referente à frequência 2.

$$f_0.f.f.f.f\ldots f = f_0.f^{12} = 2.f_0$$

É uma solução matemática simples atualmente, mas que precisou utilizar um novo instrumento de cálculo que viria a ser construído somente no século XVII: os logaritmos. Com isso a formulação teórica do temperamento igual seria descrita na obra *De Musica* publicada em Salamanca, de F. Salinas, de 1577 onde afirmava que a oitava deve ser dividia em doze partes iguais e proporcionais (RODRIGUES, 1999).

Baseado, então na progressão geométrica[4], Euler pesquisou um sistema de afinação que permitisse os compositores modularem quaisquer dos 12 centros tonais sem distorções. A conclusão é que o fator f deve assumir um valor de $2^{1/12}$. Considerando o *dó*, como sendo de frequência 1 apenas como referência, obtém-se as outras notas da gama temperada (ABDOUNUR, 2015a):

$$dó^{\#} = ré_b = 2^{\frac{1}{12}}, ré = 2^{\frac{2}{12}} = 2^{\frac{1}{6}}, ré^{\#} = mi_b = 2^{\frac{3}{12}} = 2^{\frac{1}{4}}, mi = 2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}}, fá = 2^{\frac{5}{12}}, fá^{\#} = sol_b = 2^{\frac{6}{12}} = 2^{\frac{1}{2}}, sol = 2^{\frac{7}{12}}, sol^{\#} = lá_b = 2^{\frac{8}{12}} = 2^{\frac{2}{3}}, lá = 2^{\frac{9}{12}} = 2^{\frac{3}{4}}, lá^{\#} = si_b = 2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}}, si = 2^{\frac{11}{12}}, dó = 2.$$

Estas notas da escala temperada possuem, portanto, as seguintes relações de frequência com a nota inicial (o *dó*) (ABDOUNUR, 2015a):

Dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
1	$2^{\frac{1}{6}}$	$2^{\frac{1}{3}}$	$2^{\frac{5}{12}}$	$2^{\frac{7}{12}}$	$2^{\frac{3}{4}}$	$2^{\frac{11}{12}}$	2

"Nesse ponto, caberia ainda levantar a questão de por que escolher 12 notas entre os 300 sons diferentes dentro de uma oitava possíveis de discriminar pelo ouvido humano treinado" (ABDOUNUR, 2015a, p. 112). Segundo Abdounur (2015a) a divisão por 12 notas em uma oitava se deu pelo respeito a continuidade da escala grega que tinha como construção o percurso de quintas. Mas nada impede a construção de uma escala utilizando-se de qualquer outro número de notas em uma oitava.

RELATO DA EXPERIÊNCIA

---

[4] Progressão Geométrica (PG) é toda sequência de números não-nulos na qual é constante o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado razão (q) da progressão. Ou seja, uma progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma (DANTE, 2009, p. 142)

Para a atividade que liga as progressões geométricas à música, foram utilizados violões usados, fornecidos por conhecidos e amigos após uma publicação em redes sociais solicitando por instrumentos musicais com estas características. Ao todo foram 8 violões doados para a realização da oficina. Alguns destes violões estavam com alguma avaria, faltando peças, problemas de fabricação, então foram cedidos ao autor deste artigo.

Com estes violões foram feitas algumas adaptações para o uso nas atividades didáticas: em cada violão foi deixado apenas duas cordas, de mesmas características e afinadas no mesmo tom e os trastes foram retirados e os braços dos violões foram lixados e pintados de forma que não mostrassem mais as antigas marcações que nele havia. Este último procedimento é essencial pois as atividades dependem das medidas que os alunos tirarão do instrumento, e, caso os trastes não forem tirados, o aluno poderia simplesmente medir comprimentos já estabelecidos pelos trastes.

Figura 6 – Trastes sendo retirados do violão

Fonte: Acervo Pessoal

Outro detalhe é que a maioria dos violões é de diferentes formas e marcas, tornando a atividade mais rica. No entanto, se a atividade dispusesse de violões idênticos, nada afetaria no andamento da aula.

As atividades sobre progressão geométrica foram aplicadas em formato de oficina a alunos de diferentes turmas do ensino médio. A oficina durou 4 horas ininterruptas. A seguir estão algumas imagens das atividades realizadas nesta oficina. A aula iniciou com a apresentação de um vídeo de um *luthier* construindo uma guitarra. Durante o vídeo foi comentado alguns processos desta construção e alguns alunos também comentaram sobre o que sabiam desta técnica.

Figura 7 – Exibição de um vídeo de um *luthier* construindo uma guitarra

Fonte: Acervo Pessoal

Após o vídeo os violões foram entregues a cada aluno e inicialmente puderam familiarizar-se com os violões sem trastes e analisar a sonoridade destes violões.

Figura 8 – Alunos familiarizando-se com os violões

Fonte: Acervo Pessoal

Depois deste primeiro contato realizaram as medidas nos violões, registrando no quadro as medidas das cordas necessárias para a formação de intervalos consonantes. Os alunos utilizaram seus *smartphone* para a realização dos cálculos. Foi utilizado ao total 6 fitas métricas para a determinação do comprimento das cordas dos violões.

Figura 9 – Alunos realizando as medições dos violões

Fonte: Acervo Pessoal

Nas próximas atividades os alunos localizaram através do uso das frações de números inteiros o comprimento que a corda deve ser pressionada para a formação de intervalos consonantes assim como feito por Pitágoras.

Figura 10 – Alunos medindo e fazendo as marcações dos trastes dos violões

Fonte: Acervo Pessoal

Tendo determinado a posição dos trastes segundo a escala pitagórica os alunos receberam uma folha com as atividades sobre o ciclo de quintas. Primeiramente resolveram estas atividades calculando as frações de cada uma das notas do ciclo. Depois foi calculado os problemas que a escala pitagórica gerava no encontro dos ciclos de quintas e ciclos de oitavas. Na atividade da folha que solicitava a determinação das notas do ciclo de quintas demandou um pouco mais de tempo do que o esperado. Nesta atividade era essencial que os alunos tivessem bastante atenção na determinação das notas deste ciclo pois um erro acarretaria em problemas nas próximas atividades.

Figura 11 – Alunos calculando e resolvendo as atividades propostas

Fonte: Acervo Pessoal

Os alunos determinaram, então, a posição de cada um dos trastes no braço do violão usando a progressão geométrica. Para a determinação das posições que os trastes deveriam ter foi utilizado giz pois desta forma facilitaria apagar as marcações nos violões entre uma atividade e outra.

Figura 12 – Alunos marcando a posição de todos os trastes do violão

Fonte: Acervo Pessoal

Os alunos utilizaram um aplicativo disponível gratuitamente na internet que determina a frequência sonora de cada uma das notas captadas pelo *smartphone* para esta próxima atividade. Como muitos alunos já tocavam violão e outros instrumentos então não foi necessário baixar este aplicativo. Conforme iam terminando as atividades puderam ajudar seus colegas que não tinham o aplicativo. Um dos alunos trouxe seu instrumento musical, um violino, e contou que enfrentava dificuldades em localizar as notas no violino pois este instrumento não é temperado, ou seja, não apresenta trastes como o violão. Utilizando a progressão geométrica que acabara de aprender nesta oficina este aluno poderia, então, localizar todas as notas temperadas no braço do violino.

Figura 13 – Alunos medindo as frequências sonoras de cada uma das notas

Fonte: Acervo Pessoal

Muitos dos alunos trouxeram seus violões de casa e ao final das atividades com as progressões geométricas alguns deles realizaram medidas em seus violões para verificarem a validade do que acabaram de aprender desta oficina.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aulas extremamente teóricas e desconexas com a realidade dos estudantes podem ser mal recebidas. Muitas vezes o aprendizado acaba sendo prejudicado pois o aluno perde o interesse no estudo e acaba criando um certo rancor com a disciplina da matemática. As elaborações das aulas devem levar em conta este fato para não ocasionar este tipo de situação de aprendizagem. Também deve haver a preocupação do professor em considerar os conhecimentos prévios que os estudantes trazem para a sala de aula a fim de desenvolver estes conhecimentos valorizando características pessoais de cada aluno.

Aulas que usam como contexto algo que está relacionado com o cotidiano dos estudantes apresentam um potencial enorme para o aprendizado. Além de vários dos alunos trazerem para as aulas conhecimentos adquiridos em suas experiências prévias também podem desenvolver estes conhecimentos aplicando todo um conhecimento teórico matemático. Esta forma de abordagem didática busca a formação do estudante como alguém crítico e que pensa sobre sua própria atitude de aprender, sendo assim uma aprendizagem muito mais profunda e vantajosa do que uma mera memorização de informações desconexas com seus cotidianos.

A música sendo explorada nas aulas de matemática mostra-se uma ótima ferramenta para que o professor elabore suas aulas. Os alunos reconhecem que esta forma de trabalho é pouco utilizada, mas que traz várias oportunidades de ensino interdisciplinar e que envolvem seus conhecimentos prévios sobre o tema de tal forma que há o interesse na realização das atividades propostas.

Um dos obstáculos que o professor de matemática pode encontrar ao utilizar da música em suas aulas é a falta de conhecimento que este tem relacionado ao tema que não é de sua formação. Este é um grande desafio para a prática interdisciplinar, quando o docente percebe que buscar inovações para sua prática também é buscar conhecimentos por campos que não são de seu domínio e que exige tempo e dedicação para tal.

As ligações entre a matemática e a música não estão restritas às relações entre a razão áurea e as progressões geométricas. Existem muitos outros conhecimentos entre estes dois campos a serem relacionados ainda. Em uma proposta interdisciplinar há várias outras formas de abordagem deste tema envolvendo diversos outros campos de conhecimento.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Matemática e Música.** São Paulo: Livraria da Física, 2015a

______. The Emergence of the Idea of Irrationality In Renaissance Theoretical Music Contexts. **Mathematical Journal Of Interdisciplinary Sciences,** Patiala, v. 3, p.155-172, 30 mar. 2015b. Semestral. Disponível em: <http://dspace.chitkara.edu.in/xmlui/handle/1/540>. Acesso em: 16 jan. 2017.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação Qualitativa em Educação:** Uma Introdução à Teoria e aos Métodos. Porto: Porto, 1999. 336 p.

BRASIL, MEC. **Base Nacional Comum Curricular**: Apresentação. Brasília: MEC/SEB, 2015.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso em: 5 fev. 2014.

CAMARGOS, Chrisley Bruno Ribeiro. **Música e Matemática:** A harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem. 2010. 181 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010. Disponível em: <http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/dissertacoes_2010/Diss_Chrisley.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: Volume Único. São Paulo: Ática, 2009.

FALLAS LÓPEZ, Luiz. A. La Analogia Pitagorica; Estudio interpretativo del pensamiento de Arquitas de Tarento. **Revista de Filosofia de la Universidad de Costa Rica**, n. 73, edição extraordinária, 1992.

GARLAND, Trudi Hammel; KAHN, Charity Vaughan. **Math and Music:** Harmonious Connections. Parsippany, NJ: Dale Seymour Publications, 1995.

O’KEEFEE, Vincent. Mathematical-musical relationships: a bibliography. **The Mathematics Teacher**, v. 65, p. 315-324, 1972.

PRIOLLI, Maria Luisa de Mattos. **Princípios Básicos da Música Para a Juventude.** 52. Ed. Rio de Janeiro: Casa Oliveira de Músicas, 2011.

RODRIGUES, José Francisco. A Matemática e a Música. **Revista Colóquio/Ciências**, n. 23, 1999, p. 17-32. Disponível em: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/musmat_99.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2017

WEBER, Max. **Os Fundamentos Racionais e Sociológicos da Música**. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1995.