USO DO MÉTODO DE COMPLETAR QUADRADOS DE AL-KHWARIZMI NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Cristiane Teixeira Cordeiro[1]

Melissa Martins Fazio[2]

Julia Schaetzle Wrobel[3]

História da Matemática, História da Educação Matemática e Cultura

Resumo: Esse artigo relata uma atividade desenvolvida com turmas do primeiro ano do Ensino Médio, com objetivo de trazer a história da Matemática para a sala de aula. Para isso, os alunos deveriam escolher um tema matemático relacionado à um determinado país. O grupo apresentado neste relato, juntamente com a pibidiana, autora deste trabalho, decidiram explorar a história de Al-Khwarizmi, grande matemático árabe, e o seu método de completar quadrados. A metodologia utilizada envolveu desde a pesquisa em livros da biblioteca da Universidade Federal do Espírito Santo até a explanação do método aos alunos pela pibidiana. Após esse trabalho, constatou-se uma ampla aceitação e utilização do método de completar quadrados por partes dos alunos envolvidos nesta atividade, que passaram a utilizá-lo em diversas vezes no contexto escolar. Percebe-se assim a importância do incentivo à pesquisa e utilização de novos métodos, principalmente geométricos, para a resolução de um mesmo problema.

Palavras Chaves: História da matemática. Método de completar quadrados. Al-Khwarizmi.

1. Introdução

A Escola Estadual de Ensino Médio Arnulpho Mattos (EEEMAM) realiza anualmente um projeto cultural interdisciplinar chamado GeoEEEMAM (Geo de Geografia e EEEMAM o nome da escola), onde cada sala representa uma região geográfica. Os alunos se dividem em grupos para pesquisarem sobre diversos aspectos da cultura daquela região, para apresentarem posteriormente na Feira do GeoEEEMAM. Estas apresentações vão desde danças típicas, até comidas e história local. Através desta atividade, os alunos têm a oportunidade de conhecer novas culturas e desenvolver habilidades de pesquisa e apresentação.

Este projeto é avaliado por todos os professores da turma, e cada professor avalia o desenvolvimento da atividade dentro do contexto de sua disciplina. Geralmente, a matemática era avaliada superficialmente, em dados demográficos, economia local e etc. No ano de 2016, entretanto, uma professora de matemática resolveu ir além. Seus alunos deveriam apresentar trabalhos envolvendo a história da matemática em seus respectivos países. Cada sala escolheria um determinado grupo de alunos para desenvolver a parte matemática da atividade.

[1] Licencianda em Matemática. Universidade Federal do Espírito Santo. teixeira.cris@hotmail.com

[2] Titulação. Escola Estadual de Ensino Médio Arnulpho Mattos. melissafazio@gmail.com

[3] Titulação. Universidade Federal do Espírito Santo. juliasw@gmaill.com

Essa escola é parceira do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) do curso de Matemática da Ufes. O grupo de alunos bolsistas do Pibid, aqui chamados pibidianos, acompanha todas as quatro turmas da professora, que é supervisora do Projeto. Na proposta da professora-supervisora, cada grupo responsável pela história da matemática em um país seria acompanhado por um pibidiano, que os auxiliaria na construção de um banner para a apresentação na Feira do GeoEEEMAM.

No presente trabalho, apresentamos o relato de experiência de desenvolvimento, no contexto do GeoEEEMAM, de um trabalho sobre a história da matemática no Marrocos com alunos do primeiro ano do ensino médio.

2. O desenvolvimento do projeto

Inicialmente, notou-se certo estranhamento entre os alunos em pensar na Matemática Marroquina, uma vez que nada já se havia ouvido falar sobre este assunto. A história da Matemática sempre foi algo que motivou e motiva os alunos a se apaixonarem pela matemática. Sempre ouvimos falar sobre os grandes matemáticos gregos, como Pitágoras. A história da matemática árabe, entretanto, é pouco mencionada no ensino regular, em especial a história da matemática marroquina, país de forte influência árabe.

Após uma primeira pesquisa utilizando recursos online, constatou-se a possibilidade de se abordar os seguintes temas: matemáticos marroquinos, a matemática fenícia ou o método de completar quadrados de Al-Khwarizmi.

Para facilitar a comunicação, foi criado um grupo no whatsapp dos alunos com a Pibidiana responsável (primeira autora desse trabalho) sob a supervisão da professora-supervisora (segunda autora). Cabe ressaltar que a terceira autora é a coordenadora de área de Matemática do Pibid Ufes e esteve o tempo todo acompanhando e mediando o processo.

Decidiu-se então aprofundar mais a pesquisa, utilizando não apenas os recursos tecnológicos, mas também os bibliográficos. Os alunos foram então, juntamente com a pibidiana, à biblioteca da Ufes pesquisar sobre a matemática marroquina. Pode-se perceber neste contato com a biblioteca universitária um grande entusiasmo nos alunos. Estes estavam impressionados com a quantidade de livros que estavam a sua disposição e, de acordo com eles, se sentiram dentro de um filme, pesquisando em livros antigos e empoeirados. Um aluno indagou à pibidiana a respeito da seção de livros sobre direito, dizendo que sempre quis fazer este curso. Percebeu-se uma grande vontade nos alunos de fazerem parte do ambiente universitário, sendo este um grande motivador dos estudos e dedicação dos estudantes.

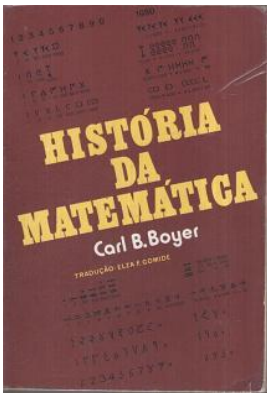
Embora pareça contraditório, muitos alunos do ensino médio público no nosso estado acreditam que a universidade não é para eles, ou que a Ufes cobra uma mensalidade que eles não podem pagar. Perguntas dessa natureza ocorrem com frequência nas turmas que acompanhamos. Transpor essas barreiras, levar os alunos dessa escola para dentro da universidade é valorizar nossos alunos, mostrar-lhes que podem sim estar ali. É uma porta aberta para o futuro.

Esta também foi uma experiência marcante para a pibidiana na construção de sua imagem enquanto professora, sendo o primeiro contato direto com os alunos e um incentivo à busca de novas formas de propiciar o aprendizado.

Após certo tempo de pesquisa, os alunos, juntamente coma pibidiana, decidiram focar no estudo do método de completar quadrados de Al-Khwarizmi. Embora este não seja um matemático marroquino, ele era árabe, povo que teve forte influência no Marrocos. Este tema foi escolhido devido ao pouco material encontrado sobre os matemáticos marroquinos, apenas pequenas citações em língua inglesa, mas também devido à sua fácil compreensão e aplicabilidade do método de completar quadrados para os alunos do ensino médio.

Os estudantes utilizaram o livro História da Matemática (BOYER,1974) como base de suas pesquisas sobre a história de Al-Khwarizmi e sobre o método de completar quadrados. Ainda assim, porém, percebeu-se certa dificuldade nos alunos de entenderem o funcionamento do método.

Figura 1: Capa do Livro "História da Matemática".



Fonte: BOYER(1974)

Escolhido o aporte teórico, a pibidiana e os alunos reuniram-se para estudar. Os estudantes relataram nunca terem conhecido o método e estarem nervosos quanto a dificuldade do tema escolhido. Porém, após explicação do método pela pibidiana aos alunos, percebeu-se que os alunos não só entenderam como funcionava, como também se mostraram entusiasmados em utilizá-lo no dia-a-dia escolar.

3. O Método de Completar Quadrados

Segundo Boyer (1974), Mohammed ibu-Musa Al-Khwarizmi viveu aproximadamente entre os anos 790 e 850, e escreveu mais de seis livros sobre matemática e astronomia, além de ter sido responsável pela grande difusão de obras matemáticas hindu traduzidas por ele, como a obra De numero hindorum (Sobre a arte hindu de calcular), onde está tão bem detalhado o sistema de numeração hindu (utilizado hoje), que muitos atribuiram a ele a autoria deste sistema de numeração.

> Al-Khwarizmi não manisfesta nenhuma pretensão de originalidade quanto ao sistema, cuja origem hindu ele assume como fato; mas quanto mais traduções latinas de sua obra apareceram na Europa, leitores descuidados começaram a atribuir não só o livro, mas a numeração, ao autor. A nova notação veio a ser conhecida como a de Al-Khwarizmi, ou mais descuidadamente, algorismi; finalmente o esquema de numeração usando numerais hindus veio a ser chamado simplesmente algorismo ou algoritmo. (Boyer, 1974, p.156)

Boyer (1974) escreve que a principal obra de Al-Khwarizmi tem como título Al-jabr Wa'l muqabalah, de onde origina a palavra álgebra, muito utilizada atualmente. Neste livro, o autor descreve a resolução de seis tipos de equações, divididas da seguinte forma:

- O capítulo I aborda o caso de quadrados igual a raízes, ou na linguagem utilizada hoje, $ax^2=bx$, a e b números reais (não se conhecia a raiz $x=0$);
- O capítulo II trata-se do caso de quadrados iguais a números, ou seja, quando $ax^2=c$, a e c números reais;
- O capítulo III abrange o caso de raízes iguais a números, ou seja, quando $bx=c$, b e c números reais;
- No capítulo IV, é analisado o caso de quadrados e raízes iguais a números, ou seja, $ax^2+bx=c$, a, b e c números reais;
- No capítulo V, o caso de quadrados e números iguais a raízes, ou seja, $ax^2+c=bx$, a, b e c números reais;
- E por fim, no capítulo VI, o caso de raízes e números iguais a quadrados, ou seja, $bx+c=ax^2$, a, b e c números reais.

É interessante ressaltarmos que apenas as raízes positivas eram consideradas, uma vez que os números negativos ainda não eram conhecidos nesta época. Assim, os seis tipos de equações descritos acima contemplam todas as possibilidades de equações lineares e quadráticas com raiz positiva. Todas as soluções apresentadas por Al-Khwarizmi são dadas como algoritmos aplicados a alguns exemplos, como o caso do método de completar quadrados.

> Para a equação x^2+ 10x=39 Al-Khwarizmi traça um quadrado ab para representar x^2, e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos c, d, e e f, cada um com largura 2 ½. Para completar o quadrado maior é preciso acrescentar os quatro pequenos quadrados nos cantos cada um dos quais tem uma área de 6 ¼ unidades. Portanto para "completar o quadrado" somamos 4 vezes 6 ¼ unidades ou 25 unidades, obtendo pois um quadrado de área total 39+25=64 unidades (como fica claro no segundo membro da equação). O lado do quadrado grande deve pois ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes 2 ½ ou 5 unidades, achando x=3, e provando assim que a resposta encontrada no Cap. IV está correta. (Boyer, 1974, p. 158)

Figura 2: Página 15 da Tradução de Al-Jabr por Frederic Rosen

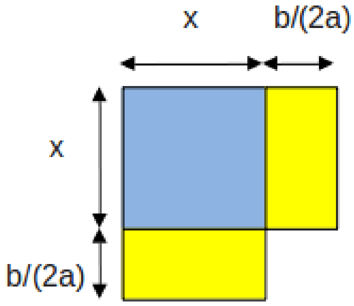
Fonte: Swetz; Katz, 2011.

Para melhor compreensão por parte dos alunos sobre o método de completar quadrados utilizando a linguagem moderna, a pibidiana apresentou-lhes alguns exemplos de equações quadráticas do tipo $ax^2+bx+c=0$ (a, b e c números reais), utilizando a representação geométrica apresentada por Al-Khwarizmi, com algumas modificações. Apresentamos abaixo a resolução genérica para o caso de b positivo utilizada pelos alunos.

Seja uma equação do segundo grau, da forma $ax^2+bx+c=0$, onde a, b e c são números reais, com a diferente de zero e b positivo. Para a utilização do método, é preciso seguir os seguintes passos:

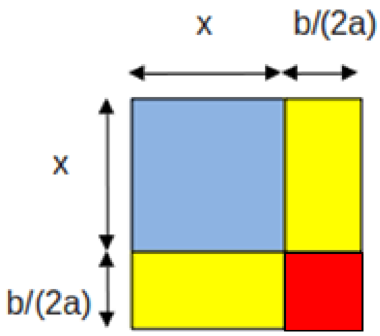
1. Isolar o termo independente dos termos dependentes, ou seja, subtrair dos dois lados da igualdade o valor de c, ficando $ax^2+bx= -c$
2. Dividir a equação pelo valor de a. Logo, teremos: $x^2+(b/a)x= -c/a$
3. Montar a seguinte representação geométrica para a equação:
   a. Construir um quadrado de lado x, ou seja, de área x^2;

b. Adicionar dois retângulos de lados x e $b/(2a)$, ou seja, dois retângulos de área $(b/(2a))x$, totalizando uma área de $(b/a)x$, a dois lados adjacentes do quadrado, como na figura abaixo:



Temos então que a área da figura construída é exatamente $x^2+(b/a)x$, que pelo item 2, tem o valor de $-c/a$.

4. Completar, geometricamente, a figura construída no item 3 para que se torne um quadrado, de forma que tenha a menor área possível, sem que haja deformação das figuras já construídas.



Temos então que foi adicionado um quadrado de lado $b/(2a)$, como indica a figura acima. Logo, se antes a área da figura era de $-c/a$, agora temos que a área total da figura tem o valor de $-c/a+(b/(2a))^2 = b^2/(4a^2)-c/a$.

Observando o quadrado completado, percebemos que ele possui lado igual a $x + b/(2a)$, portanto, possui área igual a $(x+b/(2a))^2$.

Igualando os valores da área do quadrado completado, temos que $(x+b/(2a))^2 = b^2/(4a^2)-c/a= (b^2-4ac)/4a^2$

Logo, $x+b/(2a) = \sqrt{((b^2-4ac))/4a^2}$ ou $x+b/(2a) = -\sqrt{((b^2-4ac))/4a^2}$.

Assim, concluímos que $x=(-b+\sqrt{(b^2-4ac)})/(2a)$ ou $x= x=(-b-\sqrt{(b^2-4ac)})/(2a)$.

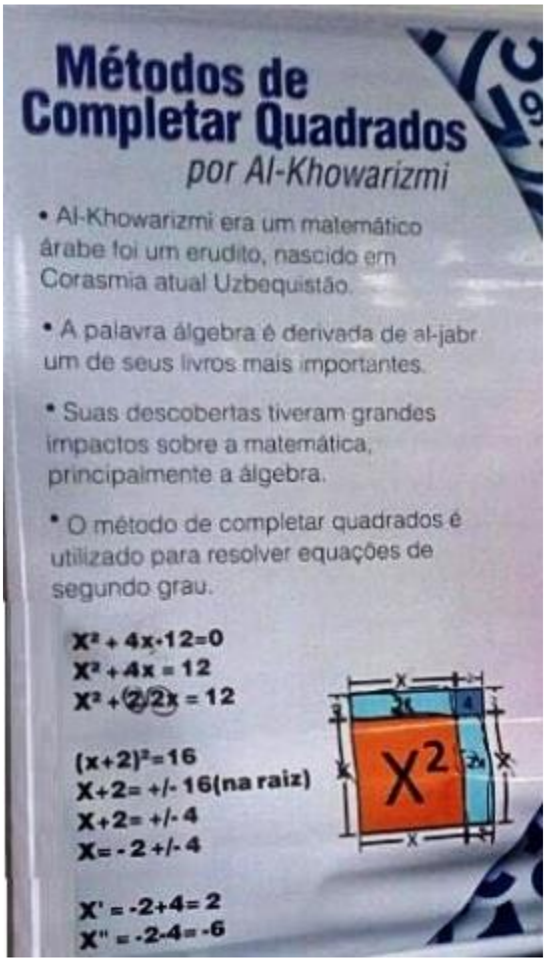
Os alunos observaram, então, que este método utiliza recursos geométricos que concluem na mesma solução encontrada na fórmula de Bhaskara.

Perceberam também que neste método, os números negativos podem surgir enquanto raízes das equações do segundo grau, mas não enquanto medida de lados ou de área das figuras geométricas. Após pesquisa sobre o questionamento levantado, os alunos constaram que na época de Al-Khwarizmi, os números negativos ainda não existiam, portanto não havia esta confusão. Levado isto em consideração, concluíram que o método pode ser sempre aplicado para calcular as raízes de equações do segundo grau.

4. Apresentação do Método para a Comunidade Escolar

Os alunos apresentaram o trabalho na feira do GeoEEEMAM através de banner com a história e explicação do método. No início, relatarem estarem ainda um pouco inseguros em falar em público, mas após as primeiras apresentações foram adquirindo confiança e mostrando a todos um pouco mais sobre a história da matemática árabe.

Figura 3: Banner apresentado pelos alunos



Fonte: acervo das autoras

Para reforçar o conhecimento adquirido no estudo, os alunos reapresentaram o banner em sala de aula para os colegas de classe, professora regente (supervisora do Pibid) e pibidianos. Foi permitido também a participação de demais alunos que quisessem estudar o tema e apresentar juntamente com o grupo de alunos inicial.

A apresentação começou com um relato histórico sobre a vida de Al-Khwarizmi e seus feitos para a matemática. Em seguida, os alunos passaram a explicar o funcionamento do método dando três exemplos de equações de segundo grau. Cada aluno ficou com uma equação para resolver.

Figura 4: Apresentação do Banner em sala de aula.

Fonte: acervo das autoras

Percebeu-se que os alunos que não participaram de todo o processo de pesquisa e construção do trabalho tiveram mais dificuldades na apresentação do método em sala de aula. Em uma das equações, o aluno que estava apresentando esqueceu como continuar e resolveu começar de novo outra equação, conseguindo realizar esta, sendo que eram equações extremamente semelhantes. Percebe-se também que o fator nervosismo contribuiu muito para que isto ocorresse, além da falta de intimidade com o método, pois os alunos que não estavam engajados no projeto desde o início tiveram pouco tempo para aprendê-lo. Para resolver este problema, a equação foi resolvida novamente por uma das alunas que estava no grupo desde o início, explicando novamente o funcionamento do método.

Após apresentação do trabalho em sala de aula, os alunos foram avaliados pela professora e pelos pibidianos. Percebeu-se então que houve uma boa apresentação histórica e matemática do método de forma geral, com a apresentação de vários exemplos, embora estivessem um pouco nervosos e alguns alunos do grupo demonstrassem que não conheciam tão bem o método como os demais.

Na aula seguinte a esta, enquanto a professora corrigia uma prova no quadro com os alunos e resolvia uma equação do segundo grau que havia aparecido naquela questão, dois alunos que estiveram envolvidos no trabalho, entre eles o que tinha apresentado dificuldades na apresentação em sala de aula, perceberam logo a aplicação do método de completar quadrados e resolveram a equação utilizando-o em seus cadernos. Como o resultado foi o mesmo obtido pela professora usando a fórmula de Bhaskara, os alunos mostraram para a professora como haviam feito e esta solicitou que apresentassem mais uma vez o método no quadro para toda a sala, agora resolvendo a questão da prova.

Muitos alunos que não participaram diretamente da construção do trabalho se interessaram pelo método e diante do interesse da sala, a professora resolveu utilizá-lo na avaliação seguinte como uma questão extra.

Além disso, o grupo de estudantes envolvidos neste trabalho gostou tanto do tema que em um projeto seguinte envolvendo o uso de mídias digitais na matemática, escolheu aprofundar ainda mais no estudo deste método de completar quadrados.

5. Considerações Finais

Após a análise de todo o projeto de aprofundamento matemático na feira do GeoEEEMAM, percebe-se que houve um real interesse dos alunos na pesquisa e desenvolvimento do método de completar quadrados, além da sua utilização em atividades em que o seu uso não era obrigatório.

Realça-se assim a importância do incentivo à pesquisa e utilização de novos métodos, principalmente geométricos, para a resolução de um mesmo problema, construindo assim uma real compreensão sobre os assuntos abordados.

Esta atividade também contribuiu em diversas formas para o aprendizado da pibidiana responsável, como no aprofundamento do conhecimento e aplicação do próprio método de completar quadrados, na melhora da comunicação com os alunos e na percepção da construção da imagem de futuro professora, que incentiva a pesquisa e descoberta nos alunos.

6. Agradecimentos

As autoras agradecem à CAPES o apoio para o desenvolvimento deste trabalho, por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid.

7. Referências

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**, 1974.

SWETZ, Frank J.; KATZ, Victor J.. **Mathematical Treasures: Al-Khwarizmi's Algebra**. 2011. Disponível em: <http://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-al-khwarizmis-algebra>. Acesso em: 14 abr. 2017.