



VELOCIDADE INSTANTÂNEA: ANÁLISE DE UMA TAREFA PROPOSTA A ESTUDANTES QUE CURSAM CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Patrícia Aparecida Caldana Pereira¹

André Luis Trevisan²

Maycon Odailson dos Santos da Fonseca³

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Este texto descreve o trabalho de elaborar, aplicar e analisar uma tarefa para as aulas de CDI, implementadas com o Geogebra, abordando o conceito de taxas média e instantânea de variação de uma função, partindo de contextos oriundos da Física, mais especificamente, da cinemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Buscou-se, por meio da análise do modo como alunos que cursam a disciplina de CDI lidaram com a tarefa, evidenciar suas compreensões sobre velocidade instantânea, conceito usualmente utilizado como “pano de fundo” para o início do estudo de derivadas. A análise de dados evidenciou que, para esses estudantes, parecia ser posto que, para calcular velocidade (não diferenciando velocidade média de velocidade instantânea), bastava “dividir a posição pelo tempo”.

Palavras Chaves: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas matemáticas. Recursos computacionais. Velocidade instantânea.

Introdução

No Ensino Superior, nas áreas tecnológicas, econômicas e administrativas, não há dúvidas de que o ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é de fundamental importância para a compreensão e desenvolvimento da ciência moderna. Mas, ao iniciar seus estudos nestas áreas, os estudantes em geral enfrentam grandes dificuldades e apresentam pouco êxito, gerando desafios para os educadores e a necessidade de busca de métodos que facilitem seu entendimento.

Rezende (2003) aponta que a dificuldade na aprendizagem de CDI não é algo apenas cultural, justificado pela condição socioeconômica da sociedade brasileira, mas também ocorre em países desenvolvidos. Relata que mudanças no ensino dessa disciplina vem sendo discutidas desde a década de 80, quando já se falava sobre a introdução da tecnologia no ensino da disciplina.

¹ Especialista. SEED-PR. Email: paticaldana@hotmail.com.

² Doutor. UTFPR-Londrina. Email: andrelt@utfpr.edu.br.

³ Mestrando. UTFPR-Londrina. Email: santos_califa@hotmail.com.

As Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação (TDIC) possibilitam o uso de sites, aplicativos e softwares como recursos pedagógicos para auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem, promovendo ao educando recursos para elaboração do conhecimento de uma forma mais dinâmica e contextualizada.

Embasados neste contexto, este texto descreve o trabalho de elaborar, aplicar e analisar uma tarefa para as aulas de CDI, implementadas com o Geogebra, abordando o conceito de taxas média e instantânea de variação de uma função, partindo de contextos oriundos da Física, mais especificamente, da cinemática. Por meio da análise do modo como alunos que cursam a disciplina de CDI lidaram com a tarefa, foi possível evidenciar suas compreensões sobre velocidade instantânea, conceito usualmente utilizado como “pano de fundo” para o início do estudo de derivadas.

Este trabalho é recorte de um trabalho desenvolvido no âmbito de um projeto maior, intitulado “Investigação de um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino” (Processo 457765/2014-3 – CNPq), e foca em um dos objetivos específicos deste projeto, no caso, *organizar tarefas que integrem esse ambiente educacional para a disciplina de CDI*.

Fundamentação teórica

Com a evolução das tecnologias de informação e comunicação, e mais especificamente as TDIC, a elaboração de tarefas, na intenção de explorar ideias ou conceitos matemáticos, torna-se uma temática de pesquisa relevante. Não se trata apenas de elaborar uma tarefa, mas refletir acerca do momento mais adequado à sua proposição, antecipar possíveis estratégias de resolução a serem adotados pelos estudantes, planejar possíveis intervenções a partir do encaminhamento observado quando da sua aplicação

Neste trabalho, adotamos preferencialmente o termo tarefa, em menção ao “amplo espectro composto por ‘coisas a fazer’ pelos estudantes em sala de aula, o que inclui desde a execução de exercícios algorítmicos até a realização de investigações ou construção de modelos matemáticos” (TREVISAN; BORSSOI; ELIAS, 2015, p.3).

Compreendemos que, ao realizar uma tarefa, o aluno vai além da simples execução de uma atividade, seja física ou mental, ele é levado a interpretar, a refletir em determinados contextos. Assim, aprendizagem do aluno é resultado da sua

atividade e reflexão, mas deve-se considerar dois elementos importantes para que a aprendizagem aconteça: a tarefa proposta e a situação didática criada pelo professor.

Na Educação Matemática, a elaboração de tarefas que façam uso de *softwares* abre um leque de possibilidades, promovendo um ambiente heurístico. Neste sentido, por meio da exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos, Trevisan, Elias e Aranda (2016) afirmam que é

possível, pela adaptação/reestruturação de tarefas antes resolvidas com lápis e papel, oferecer aos estudantes possibilidades para formulação e refinamento de conjecturas, realização de testes, familiarização com notações, etc (TREVISAN; ELIAS; ARANDA, 2016, p.1909).

De acordo com Borba, Silva e Gadanidis (2015), a elaboração de tarefas matemáticas deve buscar formar um ambiente heurístico de descobertas, de formulação de conjecturas acerca de um problema, buscando por soluções diversificadas. Portanto, o professor deve buscar explorar as potencialidades diferenciadas oferecidas pelos recursos tecnológicos, levando os alunos a refletir, criar, problematizar e explorar o caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos.

O CDI é trata do estudo do movimento e de taxas de variações. Seu desenvolvimento ocorreu de maneira diferente ao que se aprende nos meios acadêmicos: o cálculo integral surgiu muito antes que o cálculo diferencial. Somente após o século XVII é que os dois passaram a ser tratados de maneira associada.

Dentre tantas áreas de aplicação do CDI, elegeu-se para este trabalho a Física, mais especificamente o estudo do movimento. Na Cinemática busca-se interpretar fenômenos que descrevem os movimentos, sem se preocupar com as suas causas. Aplicando o CDI na Cinemática, temos que, ao conhecer a função em relação ao tempo que rege esse movimento, podemos derivá-la e encontrar a função que representa sua velocidade em função do tempo. Da mesma forma, ao derivar a função velocidade, encontramos a função que representa a aceleração da partícula em função do tempo. Se realizarmos o processo inverso, partindo da função que representa a aceleração, podemos aplicar o cálculo integral nesta função e encontrar então, a função que representa a velocidade em função do tempo. Da mesma maneira, ao integrar a função velocidade, obtém-se a função que representa a posição de uma partícula em função do tempo.

Procedimentos metodológicos

O objetivo deste trabalho é analisar os conceitos que emergem da resolução de uma tarefa implementada com o Geogebra junto a uma turma de CDI, partindo de problemas oriundos da Física, mais especificamente da Cinemática e, a partir disso, evidenciar suas compreensões sobre velocidade instantânea. Tal tarefa foi proposta aos calouros da turma de Engenharia de Materiais de uma universidade Federal, ingressantes no 2º semestre de 2016, sob responsabilidade do segundo autor deste trabalho. A tarefa é recorte de uma sequência, construída com o objetivo principal de promover junto alunos a uma discussão matemática a partir de conceitos físicos, com vista a explorá-los de forma intuitiva, como “antecipação” ao estudo sistematizado de derivadas e integrais.

A prática de ensino adotada para a disciplina consiste na organização de *episódios de resolução de tarefas* (expressão adaptada de Palha, Dekker, Gravemeijer e Van Hout-Wolters (2013) e Palha, Dekker e Gravemeijer (2015)). Por meio dessa abordagem, os estudantes são incentivados a terem um papel ativo trabalhando quando possível em grupos e em tarefas não precedidas de exemplos, que sejam desencadeadoras de discussões e que contribuam para elaborações conceituais. Assim, antes de introduzir um conceito mediante sua definição formal, propõe-se que o estudante seja convidado a explorá-lo intuitivamente, levando em conta suas concepções e imagens conceituais prévias.

Para a realização da tarefa (que subsidiou um desses *episódios* naquele semestre), os estudantes organizaram-se em grupos com dois a quatro componentes, formados por afinidade e em função da disponibilidade de computadores por eles trazidos. Seu enunciado é apresentado no Quadro 1. Quarenta e cinco alunos, divididos em 16 grupos, trabalharam com essa tarefa.

Quadro 1 – Tarefa proposta.

- | | |
|---|--|
| A função horária do movimento, em linha reta, de certo objeto, é descrita pela função $f(x) = 2 - 2x + x^2$. | |
| a) | De acordo com os conceitos de Física, que tipo de movimento está descrito pela equação? |
| b) | No Geogebra, construa um esboço do gráfico da posição x tempo para esse movimento. |
| c) | Calcule o deslocamento sofrido pelo automóvel entre 1 e 4 segundos, descrevendo o método utilizado para o cálculo. |
| d) | Qual a velocidade média do automóvel entre 0 e 4 segundos, descrevendo o método utilizado para o cálculo. |
| e) | Proponha uma estratégia para determinar a velocidade instantânea para $t=1$, $t=2$, $t=3$ e $t=4$ segundos? |

Fonte: autores.

Caracterizamos como pesquisa qualitativa de cunho interpretativo. Para análise, consideramos as produções escritas apresentadas pelas equipes, bem como anotações no diário de campo dos autores.

Análise e discussão dos dados

A tarefa trata de um movimento retilíneo uniformemente variado (MUV) e, esperava-se que os alunos fossem capazes de identificar esse tipo de movimento sem dificuldades, pois usualmente é estudado no Ensino Médio.

No caso do item (a), em geral os grupos não apresentaram dificuldades em identificar que se tratava de um movimento uniformemente variado. Porém, tal fato não significou que necessariamente possuíam um conhecimento conceitual relacionado a esse tipo de movimento, já que grande maioria pareceu apenas ter associado o “formato” da equação horária a esse tipo de movimento (usualmente denominada “sorvetão” no ensino médio), mas sem compreender, por exemplo, propriedades da velocidade nesse tipo de movimento.

Nos itens (c) e (d) dessa tarefa ocorreram poucos erros. Em geral, conhecendo a função posição (consta no enunciado da tarefa), grande parte dos alunos realizaram a substituição de x (variável correspondente ao tempo), para calcular a posição do móvel para o instante final (4 segundos) e inicial (1 segundo) e, subtraindo estes dois valores, encontraram o deslocamento solicitado. Em alguns casos, houve grupos que encontraram (erroneamente) os valores da posição para cada instante de tempo, realizaram o quociente dos valores encontrados e, ao final, calcularam a média aritmética dos valores obtidos, considerando esta a resposta para a velocidade média no intervalo considerado.

No caso do item (e), temos uma situação que permitiria tanto uma resolução mais imediata (fazendo uso da equação para velocidade para o MUV) quanto uma exploração de caráter mais intuitivo (estudo da taxa de variação, tentando, por meio do cálculo da velocidade média, se aproximar cada vez mais da velocidade instantânea, considerando intervalos de tempo cada vez menores).

A intenção era que os estudantes pudessem fazer uso de recursos oferecidos pelo Geogebra (e supôs-se já conhecidos por eles), como o trabalho com *zoom* ou cálculo do valor da função em torno dos valores de tempo de interesse, com vistas a elaborar algumas hipóteses sobre o valor da velocidade instantânea a partir do trabalho com intervalos de tempo cada vez menores em torno do ponto de interesse.

No caso do item (e), a grande maioria dos grupos não o respondeu. Sendo um caso particular de movimento (MUV), poder-se-ia lançar mão das equações da Física do ensino médio para responder essa questão. Na parte superior da Figura 1, apresentamos um exemplo disso. Na parte inferior da Figura 1, vemos uma estratégia que, embora incorreta, foi bastante frequente entre os alunos que responderam esse item.

Figura 1 – Exemplos de respostas para o item (e) da tarefa.

Handwritten student work for item (e) showing kinematic equations and calculations:

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$V = v_0 + a t$$

Calculations shown:

$$V_1 = -2 + 2 \cdot 1 \rightarrow V_1 = 0$$

$$V_2 = -2 + 2 \cdot 2 \rightarrow V_2 = 2$$

$$V_3 = -2 + 2 \cdot 3 \rightarrow V_3 = 4$$

$$V_4 = -2 + 2 \cdot 4 \rightarrow V_4 = 6$$

Other equations and values:

$$s = -2t + t^2$$

$$a = 2$$

$$V_0 = -2$$

$$S_0 = 2$$

Resposta correta

Handwritten student work for item (e) showing a conceptual misunderstanding of velocity:

Baseando-se na fórmula da equação $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ a velocidade é espaço por tempo, deve-se usar determinado t em que acontece-se o movimento naquele determinado tempo.

Para $t=1, s=1; t=2, s=2; t=3, s=5; t=4, s=10$

$v=1 \text{ ms} \quad v=1 \text{ ms} \quad v=1.6 \text{ ms} \quad v=2.5 \text{ ms}$

Resposta incorreta

Fonte: autores.

Trata-se de uma leitura equivocada do conceito de velocidade média (variação de posição dividida pela variação de tempo) que, quando “transladada” para o contexto do cálculo de velocidade instantânea, é tomada como a posição [absoluta] dividida pelo tempo: “não é só dividir distância pelo tempo?”, argumentaram algumas estudantes quando se sugeria que repensassem a resposta. Isso chamou bastante a atenção dos pesquisadores, uma vez que, adotando essa perspectiva, não faria qualquer sentido para esses estudantes alguma discussão, ainda que de cunho mais intuitivo, que buscasse problematizar o cálculo da velocidade instantânea.

Assim, embora fosse nossa intenção analisar como os estudantes fariam uso de recursos oferecidos pelo Geogebra, e partir disso investigar os efeitos do uso de tecnologias, de forma direcionada, integrada/s às tarefas, isso não foi possível, uma

vez que, para a grande maioria dos grupos, parecia estar “posto” um conceito (equivocado) de velocidade (seja média ou instantânea): “distância pelo tempo”.

Considerações finais

O objetivo deste trabalho foi analisar uma tarefa elaborada para aulas de CDI, implementada com auxílio do software Geogebra, que levassem os alunos a explorar conceitos matemáticos, partindo de problemas oriundos da Física. Da análise realizada, inferimos que a situação proposta não se constituiu enquanto uma tarefa, uma vez que, durante sua realização, os procedimentos restringiram-se à simples execução de procedimentos, sem que os estudantes fossem levados a interpretar, discutir e refletir para se chegar à uma solução.

O Geogebra é um *software* que nos permite explorar a importância de diferentes parâmetros, variáveis e constantes ao estudar um sistema físico, seja para levantar dados ou simplesmente para pensar neles. Embora seu uso possa proporcionar maior rapidez para levantamento de hipóteses e comparação de resultados, levando a uma maior compreensão dos conceitos e fenômenos, isso não ocorreu no caso da tarefa em tela; apesar dos incentivos do professor, eles mantiveram um uso “automatizado” do *software*. Os alunos se focaram, na maior parte do tempo, às expressões matemáticas e seus respectivos cálculos, deixando de explorar um recurso tecnológico que poderia auxiliá-los de maneira rápida e dinâmica.

Ao refletir a respeito, reconhecemos alguns fatores que podem ter contribuído para isso, dos quais destacamos: a formulação fechada dos itens da tarefa, o que indica uma necessidade de reformulação no sentido de agregar elementos que possibilitem a realização de alguma experimentação com tecnologias (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2015); a hipótese inicial de “domínio” de ferramentas do Geogebra não ter se confirmado; a necessidade de incluir algum item na tarefa, ou planejamento de alguma nova situação que “gere” a necessidade de calcular a velocidade instantânea, uma vez que a necessidade de se tomar a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores não pareceu “fazer sentido” para muitos estudantes nesse momento – para eles, parecia ser posto que, para calcular velocidade (não diferenciando velocidade média de velocidade instantânea), bastava “dividir a posição pelo tempo”.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (Processo 457765/2014-3) pelo auxílio à realização do projeto do qual resulta este artigo.

Referências

BORBA, M. C; SILVA, R. S. R. da; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 1. ed.; reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

PALHA, S.; DEKKER, R.; GRAVEMEIJER, K.; VAN HOUT-WOLTERS, B. Developing shift problems to foster geometrical proof and understanding. **The Journal of Mathematical Behavior**. Springer, v. 32, p. 141-159, 2013.

PALHA, S.; DEKKER, R.; GRAVEMEIJER, K. The effect of shift-problem lessons in the mathematics classroom. **Internacional Journal os Science and Mathematics Education**. Ministry of Science and Technology, Taiwan, v. 13, p. 1589-1623, 2015.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2003, Santos. **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, II, Santos: SBEM, 2003, p. 1-20.

TREVISAN, A. L.; BORSSOI, A.H.; ELIAS, H. R. Delineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo. VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Pirinópolis/GO, 2015. **Anais...** Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6, Brasília: SBEM, 2015. v. único. p. 1-12.

TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R.; ARANDA, V. Um estudo de tarefas de Cálculo Diferencial e Integral com auxílio de recursos computacionais. In: VII Congresso Mundial de estilos de aprendizagem, Bragança – Portugal. **Anais...** CMEA, 7. Bragança: Biblioteca Digital do IPB, 2016, v. 1, p. 1908-1916.