COMPOSIÇÃO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES EM UM AMBIENTE COMPUTACIONAL DINÂMICO

Monica Karrer[1]

Israel Florentino dos Santos[2]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Neste artigo, tem-se o objetivo de expor os resultados da aplicação de parte de um experimento de ensino da disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, especificamente sobre o conceito de composição de transformações lineares planas, o qual foi elaborado de modo a explorar relações entre representações gráfica, algébrica, matricial e da língua natural. O experimento, desenvolvido nos ambientes papel e lápis e *GeoGebra*, contou com a participação de quatorze alunos provenientes de cursos de exatas – Engenharias e Ciência da Computação - de uma instituição privada de ensino superior. O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas e sua elaboração e condução se basearam em aspectos da metodologia de *Design Experiment*. As produções dos sujeitos revelaram que um trabalho de integração dos ambientes papel e lápis e computacional favoreceu a análise das relações entre representações semióticas e permitiu a constatação, em diferentes registros, da não comutatividade da composição de transformações lineares. O aspecto dinâmico do software favoreceu a construção de conjecturas e o estabelecimento de relações entre representações gráficas e matriciais.

Palavras Chaves: Composição de Transformações Lineares. Registros de Representações Semióticas. *Design Experiment. GeoGebra*.

Introdução

A disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear desempenha uma função vital no curso de Ciência da Computação. Em particular, as transformações geométricas estudadas no campo da Matemática são utilizadas posteriormente na disciplina de Computação Gráfica, uma vez que traduzem movimentos de rotação, projeção ortogonal, reflexão, cisalhamento, dentre outros.

Vários pesquisadores, tais como Santos (2013) e Dallemole et al. (2011), apontam as dificuldades dos estudantes em lidar com questões da Geometria Analítica e citam a problemática de se limitar a resolução de exercícios a um tratamento algorítmico. Karrer (2006) estabeleceu uma análise comparativa no conteúdo das transformações lineares entre livros didáticos de Álgebra Linear e de Computação Gráfica. Esse estudo revelou que na disciplina de Álgebra Linear, as representações predominantes são a algébrica e a numérica, sendo deficiente a exploração de representações dos registros gráfico e matricial. Já nos livros de

[1] Doutora. Centro Universitário da FEI. mkarrer@uol.com.br

[2] Doutor. Universidade Presbiteriana Mackenzie. learsi.isr@gmail.com

Computação Gráfica, a conversão entre representações desses dois últimos registros é a mais requerida. Desta forma, Karrer (2006) concluiu que há um descompasso entre o que é valorizado em Álgebra Linear e o que é enfatizado na área de Computação Gráfica e que tal fato pode trazer prejuízos para o aluno quando do estabelecimento de relações entre conceitos dessas duas disciplinas.

Borba e Penteado (2010) e Noss e Hoyles (2009) destacaram as vantagens de integrar ferramentas computacionais no ensino de Matemática, sendo que os recursos dinâmicos, em particular, favorecem explorações distintas das que normalmente são realizadas em ambientes estáticos, do tipo papel e lápis, e permitem que o aluno desempenhe uma atitude mais ativa frente à construção do conhecimento.

O estudo de Karrer (2006) apontou que os livros de Álgebra Linear frequentemente indicados nas referências bibliográficas de cursos de exatas do país pouco integram recursos computacionais e, quando o fazem, normalmente são ambientes com indicação de tratamentos algébricos e numéricos, mas não gráficos.

Desta forma, partiu-se do pressuposto que a elaboração de uma abordagem na disciplina de Álgebra Linear que tratasse dessas transformações em um ambiente computacional dinâmico provavelmente despertaria, no estudante do curso de Ciência da Computação, o interesse em relacionar os conhecimentos matemáticos com os de computação.

Com isso, foi elaborado um experimento de ensino que tratou das transformações lineares planas no ambiente GeoGebra, construído de forma a explorar relações entre representações dos registros algébrico, gráfico, matricial e da língua natural, para que o aluno pudesse construir um conhecimento focado na sua área de interesse. Essa ferramenta foi selecionada pelo fato de se adequar à proposta do estudo, que procurou adotar um ambiente favorável à construção de conjecturas e ao estabelecimento de relações dinâmicas e simultâneas entre representações matriciais e gráficas.

O estudo foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2006, 2011), sendo desenvolvido segundo aspectos da metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003)

Nesse artigo, apresenta-se a análise da aplicação de parte desse experimento, a qual tratou da composição entre duas transformações lineares. Teve-se o objetivo de investigar as trajetórias dos estudantes na análise da não comutatividade das transformações, por meio de um enfoque que relacionou representações gráficas, matriciais, algébricas e da língua natural. O experimento foi aplicado em um laboratório de informática e contou com sete duplas de estudantes de cursos de exatas - Engenharias e Ciência da Computação - de uma instituição privada de ensino superior.

Fundamentação Teórica

Dada a importância de estabelecer relações entre representações de diferentes registros e visando integrar na Álgebra Linear representações dos registros gráfico e matricial no tratamento das transformações lineares, uma vez que deficiências deste tipo de exploração foram apontadas por Karrer (2006), o presente trabalho foi fundamentado na teoria dos registros de representações semióticas de Duval (1995, 2006, 2011). Para esse autor, o caráter abstrato da Matemática faz com que o acesso a seus objetos seja dado necessariamente por meio de um sistema de representações semióticas.

Duval (2006) afirma que existem três atividades cognitivas que caracterizam um registro de representação semiótica, denominadas formação, tratamento e conversão. Como exemplos de registros de representações semióticas podemos destacar o algébrico, o gráfico e o da língua natural.

A atividade de formação de representações em um registro objetiva exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real. Ao transformar uma representação em outra, pode-se ter uma atividade de tratamento ou de conversão. Se essa transformação se der no interior de um mesmo registro, tem-se um tratamento e, caso ocorra entre representações de registros distintos, tem-se uma conversão.

Segundo Duval (2011), é na conversão que os alunos apresentam maior dificuldade, uma vez que essa atividade cognitiva pode sofrer dois efeitos: o fenômeno da não congruência e o da heterogeneidade nos dois sentidos de conversão. No primeiro fenômeno, o autor aponta que, para haver congruência entre duas representações, deve ocorrer correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, uma mesma ordem possível de apreensão das unidades das duas representações e conversão de uma unidade significante de representação de partida para uma unidade significante correspondente no registro de chegada. Quando pelo menos uma dessas características não ocorre, tem-se uma conversão não congruente. Com relação à heterogeneidade nos dois sentidos de conversão, o autor destaca que uma conversão pode ser congruente em um sentido e não congruente no sentido contrário, sendo que normalmente esse fato não é levado em consideração no ensino de Matemática.

Outra dificuldade dos estudantes apresentada por Duval (2006) refere-se ao fato de confundirem um objeto matemático com uma de suas representações e, por este motivo, é vital, na visão do autor, que se proponha um ensino que diversifique os registros, para que o estudante possa ter elementos para efetuar essa distinção.

Ainda, para o autor, um registro pode ser multifuncional, quando admite várias formas de tratamento que não são algoritmizáveis, ou monofuncionais, quando tratados de modo processual. Ainda, um registro pode ser discursivo, quando permite o discurso, ou não discursivo. Neste tipo de classificação, o registro algébrico é monofuncional discursivo, o gráfico é monofuncional não discursivo, a língua natural é multifuncional discursivo e o figural é multifuncional não discursivo.

Duval (2011) revela que, nos níveis mais avançados de ensino, o uso de registros monofuncionais é privilegiado, sendo a língua natural e as figuras geométricas consideradas como objetos óbvios. O pesquisador afirma que tratar um objeto matemático sem diversificar os registros pode trazer prejuízos ao aluno para a compreensão do conceito e pode dificultar a ocorrência de avanços de qualidade em suas produções.

A teoria de Duval insere-se no modelo cognitivo do processo da aprendizagem matemática, que procura analisar as condições cognitivas internas necessárias para que o estudante compreenda Matemática. Nesta visão, o entendimento matemático depende da mobilização e da coordenação de vários registros de representações semióticas.

Coerentes com essa visão, o experimento de ensino elaborado procurou explorar relações entre representações dos registros gráfico, algébrico, matricial e da língua natural, englobando registros tanto mono como multifuncionais, envolvendo conversões entre representações de diferentes registros nos dois sentidos de conversão.

Metodologia

Para construir e conduzir o experimento de ensino, foram adotados aspectos da metodologia de *Design Experiment* de Cobb et al. (2003). O foco dessa metodologia é analisar as compreensões dos sujeitos durante o processo de aprendizagem quando deparados com uma abordagem matemática inovadora. O experimento de ensino elaborado deve ser constantemente readequado diante das produções fornecidas pelos sujeitos, o que torna a metodologia dotada de características cíclica, iterativa e flexível. Essa metodologia objetiva fornecer uma base para propostas de inovações no ensino da Matemática, sendo manifestada tanto por pesquisas em pequena escala, com um grupo reduzido de sujeitos, como para grandes amostras, quando o objetivo consiste em realizar reestruturações mais amplas. Com o intuito de favorecer uma análise mais minuciosa das trajetórias dos sujeitos, no presente estudo adotou-se o modelo em pequena escala. O pesquisador atuou como orientador do processo, intervindo somente em ocasiões de bloqueio.

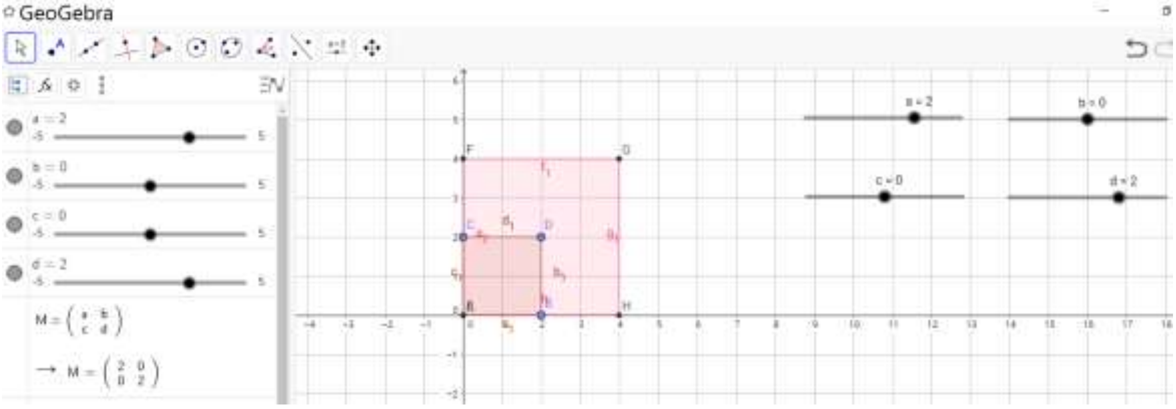
Participaram do experimento quatorze estudantes de cursos de exatas de uma instituição privada de ensino superior, os quais já haviam tido contato com o tema proposto, porém, com uma exploração exclusivamente algébrica e sem o uso de recurso computacional. Os encontros ocorreram em um laboratório de informática, e os alunos desenvolveram as atividades em duplas. Para a análise dos dados, foram consideradas as produções oral e escrita dos sujeitos.

Apresentação do *design* e análise das produções

Primeiramente foi realizada uma familiarização com o *software GeoGebra*, uma vez que a maioria dos alunos não conhecia essa ferramenta. Em seguida, foram propostas situações sobre transformações lineares no plano, nos ambientes papel e lápis e computacional, explorando representações dos registros algébrico, matricial, gráfico e da língua natural. Nessa etapa, pretendia-se familiarizar os estudantes com as principais transformações geométricas (expansão, contração, cisalhamentos, dentre outras) e fornecer um ambiente favorável para que o sujeito pudesse transitar por estas representações.

Foi proposta uma construção no *software* que gerava a tela apresentada na Figura 1.

Figura 1. Construção proposta para os alunos no *GeoGebra*

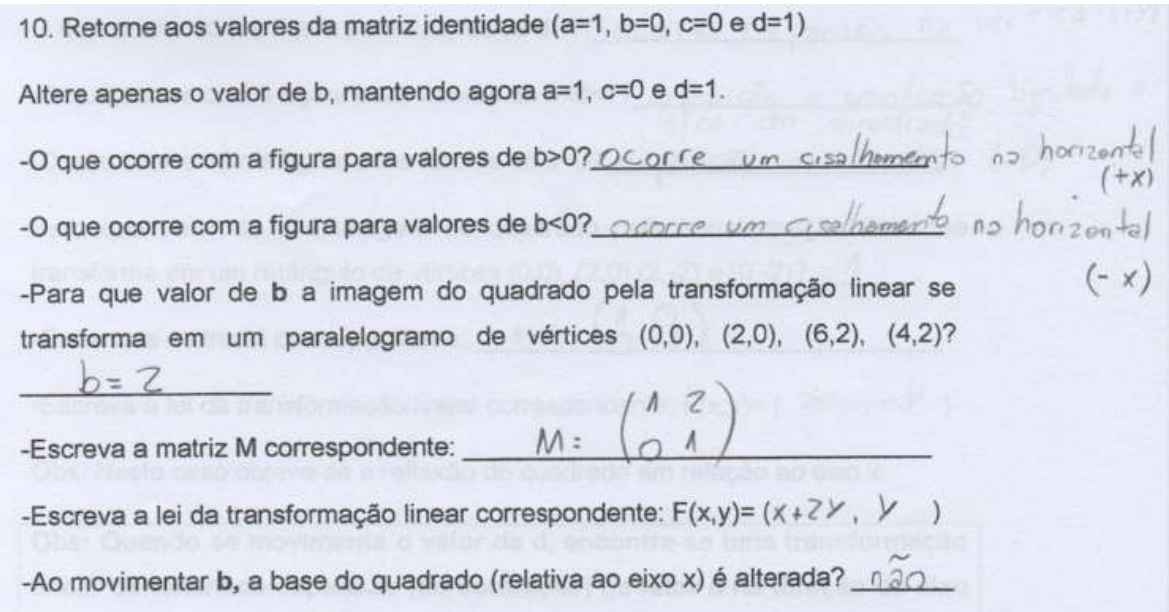


Fonte: Acervo próprio

Baseado nessa construção, foram apresentadas oito atividades sobre transformações lineares de reflexão, cisalhamento, rotação, projeção, dentre outras. Nessas atividades, foram propostas conversões entre representações dos registros gráfico e da língua natural, gráfico e matricial e matricial e algébrico, nos dois sentidos de conversão. As duplas não apresentaram dificuldades neste tipo de atividade. Apesar de o experimento explorar conversões não usuais no ensino, é provável que os estudantes apresentaram facilidade em realizá-las devido ao uso do ambiente computacional, tendo em vista que nele as relações entre representações podem ser observadas de forma simultânea.

Na Figura 2, apresenta-se a produção da Dupla 6 para uma tarefa que tratou do caso de cisalhamento horizontal.

Figura 2. Caso de Cisalhamento Horizontal – Dupla 6



10. Retorne aos valores da matriz identidade (a=1, b=0, c=0 e d=1)

Altere apenas o valor de b, mantendo agora a=1, c=0 e d=1.

-O que ocorre com a figura para valores de b>0? ocorre um cisalhamento na horizontal (+x)

-O que ocorre com a figura para valores de b<0? ocorre um cisalhamento na horizontal (- x)

-Para que valor de **b** a imagem do quadrado pela transformação linear se transforma em um paralelogramo de vértices (0,0), (2,0), (6,2), (4,2)?

b = 2

-Escreva a matriz M correspondente: $M: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

-Escreva a lei da transformação linear correspondente: F(x,y)= (x+2y, y)

-Ao movimentar **b,** a base do quadrado (relativa ao eixo x) é alterada? não

Fonte: Acervo próprio

Em seguida, foi proposta a atividade sobre composição de transformações lineares no plano. Das tarefas de 1 a 7, teve-se o objetivo de propor aos sujeitos uma construção no *software* que permitisse relacionar, nesse ambiente, representações matriciais e gráficas das transformações lineares planas.

A matriz (em relação à base canônica do R^2) da composição de duas transformações lineares planas F e G é obtida por meio do produto das matrizes de F e G dadas também em relação à base canônica do R^2.

1. Criar 8 controles deslizantes (a, b, c, d, e, f, g, h)

2. Criar duas matrizes dinâmicas na entrada da janela de álgebra:

M= {{a,b}, {c,d}} referente à matriz canônica da transformação linear F(x,y)=(ax+by, cx+dy) e N={{e,f}, {g,h}} referente à matriz canônica da transformação linear G(x,y)=(ex+fy, gx+hy)

Ajustar a=2, b=0, c=0, d=2, e=1, f=0, g=0 e h=1

3. Obter o produto da matriz M por N

-Digitar na entrada da janela de Álgebra: M*N (enter)

-renomear a matriz (com o botão direito clicar sobre o nome da matriz e renomear para T)

4. Criar um quadrado de vértices (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1)

5. Multiplicar a matriz T pelos vetores cujas extremidades são os vértices do quadrado, efetuando: T*A (enter), T*B (enter), T*C (enter) e T*D (enter)

6. Criar o polígono EFGH, unindo (0,0), (2,0), (2,2), (0,2), (0,0)

7. Ajuste a matriz M de modo que se faça um cisalhamento horizontal de fator 1 e ajuste a matriz N de modo que se faça uma reflexão em relação ao eixo x .

Todos os alunos efetuaram essa construção no *GeoGebra* sem dificuldades, uma vez que, neste momento do experimento, já estavam bem familiarizados com o *software* e com as transformações solicitadas. Intervenções pontuais foram realizadas pela professora-pesquisadora para as duplas que solicitaram orientações do uso da ferramenta.

Em seguida, foi proposta a continuidade do experimento, cujo objetivo consistiu em avaliar, por meio da análise matricial, gráfica e algébrica, que a composição de transformações lineares não é uma operação comutativa.

A matriz T representa a matriz da composição dessas duas transformações, ou seja, uma reflexão em relação ao eixo x seguida de um cisalhamento horizontal de fator 1. Transcreva abaixo a figura obtida e a matriz T da janela de álgebra:

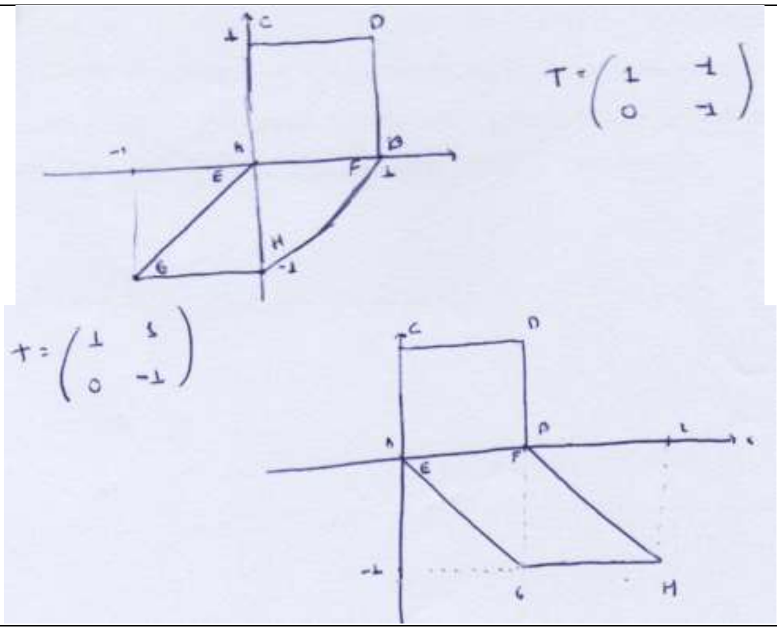
8. Vamos realizar um novo ajuste de modo que essas duas transformações se invertam, ou seja, ajuste a matriz M de modo que se faça uma reflexão em relação ao eixo x e a matriz N de modo que se faça um cisalhamento horizontal de fator 1 Com essa alteração, a matriz T representa agora a composição dessas duas transformações, ou seja, de um cisalhamento horizontal de fator 1 seguido de uma reflexão em relação ao eixo x. Transcreva abaixo a figura obtida e a matriz T da janela de álgebra.

A troca da ordem alterou o resultado? ______________________________________

A composição de transformações lineares é comutativa? Justifique. ____________

Nessa fase, os alunos puderam explorar a construção realizada anteriormente e, dado o caráter dinâmico do *GeoGebra*, foi possível alterar os valores de a,b,c,d,e,f,g,e h e observar o ajuste simultâneo nas representações matricial e gráfico. Foi proposta a troca de ordem das transformações, isto é, inicialmente foi sugerida a construção da reflexão em relação ao eixo x seguida do cisalhamento horizontal de fator 2 e, na tarefa 8, foi proposta a construção da composição contrária. Todas as duplas constataram que os resultados matricial e gráfico eram diferentes, conforme ilustrado pela Figura 3, referente à produção da Dupla 1.

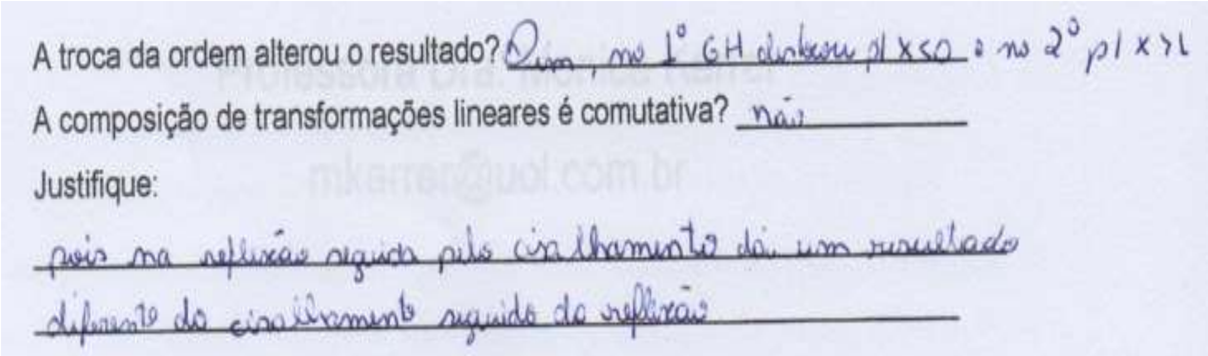
Figura 3. Composição de Transformações Lineares – Dupla 1



Fonte: Acervo próprio

A justificativa dada por esta dupla para essa tarefa é apresentada na Figura 4.

Figura 4. Justificativa para a não comutatividade das transformações – Dupla 1



A troca da ordem alterou o resultado? Sim, no 1° GH deslocou p/ x<0 e no 2° p/ x>0

A composição de transformações lineares é comutativa? não

Justifique:

pois na reflexão seguida pelo cisalhamento dá um resultado diferente do cisalhamento seguido da reflexão

Fonte: Acervo próprio

A dupla 2 não justificou o resultado e as demais forneceram as seguintes justificativas no final: “A ordem dos fatores pode alterar a matriz desejada” (Dupla 3), “Não, pois o cisalhamento seguido da reflexão é diferente da reflexão seguida do cisalhamento” (Dupla 4), “Não, pois os cisalhamentos ocorreram em sentidos opostos” (Dupla 5), “Não é comutativa pois cisalha em sentidos diferentes” (Dupla 6) e “Não pois a reflexão passou de negativo para positivo” (Dupla 7). Nota-se que, apesar das duplas observarem que as matrizes das duas composições eram diferentes, o que foi constatado pela produção oral dos sujeitos, a maioria das justificativas apresentadas na língua natural enfatizaram o resultado gráfico, ou seja, a maior parte dos estudantes se fixou na conversão no sentido do gráfico para a língua natural.

Por fim, foi solicitado que efetuassem as composições na representação algébrica. A despeito de algumas dificuldades nos tratamentos algébricos, os estudantes conseguiram constatar que algebricamente as composições também forneciam resultados diferentes. Salienta-se que, para obterem a lei algébrica das transformações, as duplas demonstraram facilidade em estabelecer a conversão da representação matricial para a algébrica, provavelmente porque este tipo de conversão foi realizado de forma frequente nas atividades do experimento anteriores à da composição.

Após isso, os sujeitos puderam explorar a construção realizada no *software* atribuindo outros valores para a, b, c, d, e, f e g, analisando os efeitos dessas alterações nos registros matricial e gráfico.

Os alunos demonstraram entusiasmo em “enxergar” o que estavam construindo e relataram que nunca haviam pensado na composição das transformações de maneira gráfica. O caráter dinâmico do *software* auxiliou na análise, uma vez que bastava realizar alterações nos valores de a,b,c,d,e, f e g para que houvesse uma adaptação simultânea nas representações gráfica e matricial.

Conclusões

Um experimento sobre o conceito de transformação linear plana foi elaborado com a preocupação de integrar representações de registros mono e multifuncionais, discursivos e não discursivos, explorando, assim, conversões entre representações dos registros gráfico, matricial, algébrico e da língua natural.

O estabelecimento de conjecturas sobre relações entre as representações matricial, gráfica e algébrica foram favorecidas pelo dinamismo do ambiente computacional. Ainda, a análise da não comutatividade das transformações, normalmente realizada exclusivamente no registro algébrico, foi desenvolvida com sucesso por todas as duplas, que puderam constatar tal situação nas representações matriciais, gráficas e algébricas.

Considerando a proposta de integração de diferentes registros, foi observado que os alunos trataram o objeto matemático estabelecendo uma efetiva coordenação entre eles. O trabalho integrado com representações matriciais e gráficas, pouco exploradas no ensino de Álgebra Linear e tão importantes para a área computacional, conforme apontado na revisão de literatura, foi realizado com sucesso pelos estudantes que participaram do *design*, e eles se mostraram entusiasmados por poderem visualizar um objeto matemático que normalmente é tratado em registros exclusivamente monofuncionais discursivos.

Referências

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 99 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

COBB, Paul; CONFREY, Jere; DISESSA, Andrea; LEHRER, Richard; SCHAUBLE, Leona. Design Experiments in Education Research. **Educational Researcher**, Washington, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

DALLEMOLE, Joseide Justin; Groenwald, Cláudia Lisete Oliveira; Ruiz, Lorenzo Moreno. Os registros de representação semiótica no estudo da reta com enfoque na geometria analítica. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Santa Catarina, Brasil. v.4, n.2, p. 149-178, 2011.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et Pensée Humaine**. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer, v.1, n. 61, p. 103-131, 2006.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no mundo matemático de pensar os registros de representações semióticas.** Organização Tânia M.M. Campos; [tradução Marlene Alves Dias]. São Paulo: PROEM, 2011.

KARRER, Monica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

NOSS, Richard; HOYLES, Celia. The technological mediation of Mathematics and its learning. Human Development: giving meaning to Mathematical signs: **Psychological, Pedagogical and Cultural Processes**, Basel, v. 52, n. 2, p. 129-147, 2009.

SANTOS, Adriana Tiago Castro. **Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico.** I CEMACYC - I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo, República Dominicana, 2013.