



## INVESTIGANDO COM O GEOGEBRA 3D: O MÉTODO AXIOMÁTICO EM ATIVIDADES DE GEOMETRIA ESPACIAL

Lucas de Souza Barbosa<sup>1</sup>

Cinthy Maria Schneider Meneghetti<sup>2</sup>

Cristiana Andrade Poffal<sup>3</sup>

### Formação de Professores que Ensinam Matemática

**Resumo:** Este trabalho propõe uma atividade de Geometria Espacial usando o ambiente 3D do software GeoGebra. A proposta é fundamentada em algumas dificuldades do ensino e aprendizagem de Geometria levantados, entre eles os problemas de representação de entes geométricos e a dificuldade de validar as propriedades usando demonstrações. Uma metodologia proposta é a investigação Matemática, que mostra como alunos podem se envolver na produção do próprio conhecimento, ao gerar conjecturas e tentar justificá-las ou refutá-las. A atividade consiste na apresentação dos axiomas da Geometria Euclidiana Espacial e na exploração das posições relativas entre retas e planos no espaço. Para fundamentar a atividade foram estudados propriedades da Geometria Espacial de posição em bibliografias usadas, de modo geral, em cursos de graduação em Matemática. A atividade foi aplicada em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual. Usando um questionário de avaliação após a aplicação da atividade e uma tabela preenchida durante a sua realização, constatou-se que ela foi efetiva para o ensino aprendizagem de Geometria para aqueles alunos. De acordo com os resultados encontrados, foi possível uma reflexão e aprimoramento da atividade.

**Palavras Chaves:** Geometria Espacial. Ensino de Geometria. Investigação Matemática. GeoGebra.

### Introdução

O presente relato de experiência consiste na descrição da aplicação de uma atividade para o ensino de Geometria Espacial de Posição (aquela que envolve propriedades elementares dos pontos, retas e planos no espaço) usando recursos da Janela de Visualização 3D do software GeoGebra. Além disso, trata-se de uma atividade cujo objetivo principal é provocar uma reflexão do estudante sobre a Matemática como ciência pura, exemplificando a construção de novos conceitos a partir do sistema axiomático. Outro objetivo é levar os discentes a concluir axiomas e propriedades relativas a pontos, retas e planos, bem como escrever sobre as possíveis posições relativas entre esses elementos.

Esta proposta pode ser aplicada nos três níveis de ensino, e aqui é relatada a aplicação da atividade para uma turma do 3º Ano do Ensino Médio. Consiste em doze questões, divididas nas seções: Postulados, Posições relativas entre duas retas, uma reta e um plano e dois planos. Cada questão propõe uma construção, seguida de uma pergunta, que leva o aluno a extrair

---

<sup>1</sup> Mestre em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande. lucas.sbarbosa@live.com

<sup>2</sup> Doutora em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande. cinthiaschneider@furg.br

<sup>3</sup> Doutora em Matemática. Universidade Federal do Rio Grande. cristianapoffal@furg.br

conclusões usando a construção. A lista dessas questões é extensa e será apresentada no relato, podendo ser consultada em [http://sca.profnat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=150680354](http://sca.profnat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150680354), incluindo uma versão revisada e pronta para impressão, para professores interessados em aplicar a atividade.

Visando contribuir para preencher as lacunas encontradas no ensino de Geometria, a atividade apresenta a Geometria Espacial de posição através da Investigação Matemática, cuja proposta é mostrar aos alunos o trabalho de um matemático e como pode ser produzido o conhecimento em Matemática, além de desenvolver o raciocínio lógico. O objetivo é estimular os discentes a fazer conjecturas, exemplificar, dar contra-exemplos, generalizações e usar da lógica matemática para resolver problemas. Ao conjecturar e registrar suas conclusões por escrito, é desenvolvida e observada a escrita matemática dos alunos, permitindo avaliar e aprimorar o ensino desses tópicos.

### **O Ensino de Geometria e a Investigação Matemática**

O abandono da Geometria pela escola tem fundamento histórico, segundo a trajetória do ensino de Geometria no Brasil traçado por (SANTOS; NACARATO, 2014). Nos anos 1970 e 1980, sob influência do Movimento Matemática Moderna, os conteúdos de Geometria passaram aos capítulos finais e focados principalmente na linguagem, e não na compreensão dos conceitos, juntamente da visão de que esses tópicos eram irrelevantes para a formação do aluno. (SANTOS; NACARATO, 2014) ainda aponta que por ser essencialmente agrícola no século XX e por ter uma grande taxa de analfabetismo, o quase inexistente ensino de Geometria era basicamente utilitarista, limitando-se ao cálculo de áreas e de volumes. Muitos professores tiveram suas formações iniciais incompletas em Geometria devido a esses fatos, e reproduziram a Geometria que lhes foi ensinada em suas práticas, o que acabou caracterizando o ensino de Geometria encontrado hoje. Soma-se a isso a complexidade das relações entre retas, pontos e planos no espaço em comparação com as mesmas no plano, agravada pela dificuldade de realizar esses estudos com material concreto.

A importância da Investigação Matemática é reafirmada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, quando esses destacam que a Matemática não deve ter apenas caráter formativo e instrumental,

mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e

encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 2000, p. 40)

O mesmo texto destaca entre as competências e habilidades norteadoras para o ensino de Matemática, a habilidade de utilizar recursos tecnológicos como instrumentos de produção e comunicação e de reconhecer as limitações e potencialidades de instrumentos como a calculadora e o computador.

Espera-se que, assim como os alunos, o professor possa repensar sua prática a partir dessa proposta, seja aplicando ou estruturando atividades semelhantes. Dessa forma não somente as atividades são aprimoradas, mas também o ensino de Geometria Espacial. (LIMA et al., 2006) recomenda “evitar apresentar o assunto já de forma completamente arrumada para o aluno”, destacando que exemplos provocativos devem ser empregados para construir a classificação da posição relativa de retas e planos com a participação dos alunos.

### **Relato da Aplicação da Atividade**

A atividade proposta foi aplicada para uma turma de Terceiro Ano do Ensino Médio Politécnico na Escola Estadual de Educação Básica Osmar da Rocha Grafulha (conhecido anteriormente como CIEP). A escola está localizada no Bairro Fragata da cidade de Pelotas, Rio Grande do Sul e atende um público de poder econômico diversificado, com grande maioria dos alunos de classe média baixa, residentes de regiões adjacentes a escola. As atividades foram realizadas no período regular de aula, como parte inicial dos estudos de Geometria Espacial.

A turma é composta de 22 alunos (sem incluir matriculados que não comparecem às aulas) com idades de 16 a 18 anos, 5 deles com alguma reprovação em anos anteriores. Segundo relatos dos alunos, a maioria não estudou ou não recorda ter estudado Geometria no Ensino Fundamental ou anos anteriores do Ensino Médio. Isso foi constatado durante as aulas de Geometria Analítica ministradas pelo pesquisador, pois os alunos pareceram ter uma base pouco sólida em Geometria Plana, como por exemplo, propriedades e posições relativas entre retas, circunferências e pontos no plano. Isso se junta a dificuldades em Matemática Básica (operações básicas, resolução de equações de primeiro e segundo grau) e uma visão mecanizada e metodológica da Matemática.

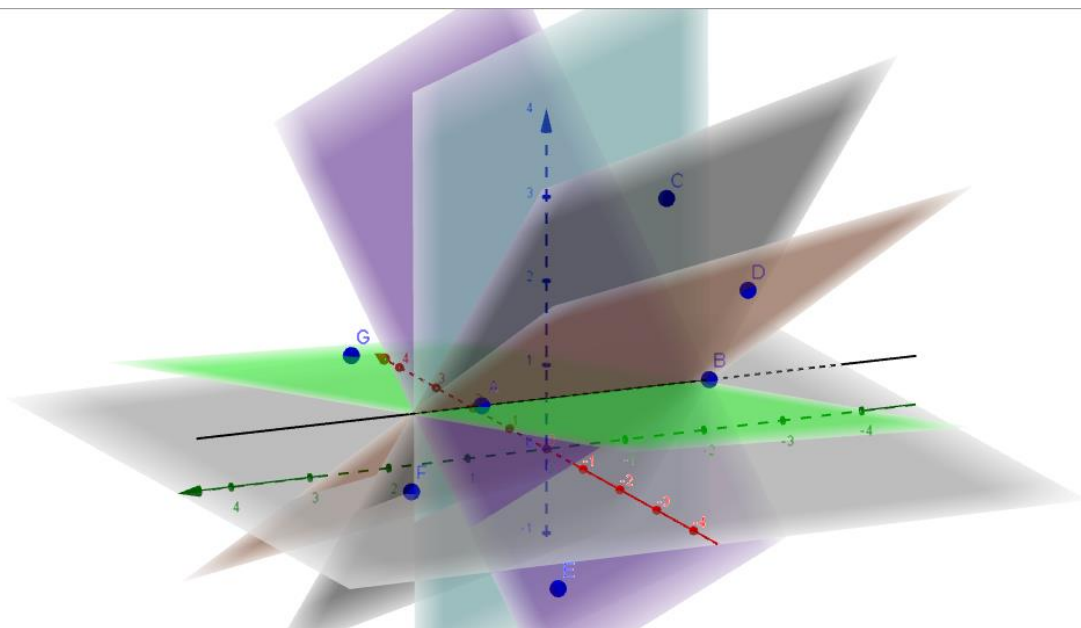
Antes da aplicação da atividade foi ministrada uma aula em que foram lembrados os entes primitivos da Geometria: ponto, reta e plano bem como suas notações. A partir daí, foi

exposto que esses elementos, junto de algumas proposições fundamentais (conhecidas como postulados), permitem o desenvolvimento de toda a Teoria da Geometria Euclidiana. Foram também lembradas as posições relativas estudadas na Geometria Analítica Plana. Durante a exposição, os alunos pareceram interessados e faziam perguntas pertinentes.

A primeira parte da atividade foi realizada no dia 5 de dezembro de dois mil e dezesseis durante uma hora-aula de 50 minutos. Dezenove alunos compareceram nesse dia e nos seguintes. Os onze computadores disponíveis já se encontravam equipados com a última versão do GeoGebra para Windows. Como havia mais alunos que computadores, foi solicitado que eles se organizassem em duplas. Devido ao número ímpar de alunos, uma das duplas foi transformada num trio.

Depois que os alunos abriram o GeoGebra, foi-lhes explicado que este se trata de um software de Geometria Dinâmica, que permite a criação e modificação de objetos matemáticos de acordo com o objetivo de estudo do usuário. A seguir, foram apresentadas as janelas de visualização e de álgebra, lembrando-os da relação entre retas e circunferências com determinados tipos de equações. Em seguida, as duplas foram instruídas a abrir a Janela de Visualização 3D, onde foram apresentados o plano  $z = 0$  que serve como base para o traçado de pontos e os três eixos coordenados. A Figura 1 mostra a construção final de uma questão. O plano  $z = 0$  exibido nessa figura é identificado na totalidade desse trabalho como “Plano Cinza”. Também foram apresentados os botões de ferramentas e suas respectivas descrições/ajudas, para que eles fossem acionados com maior facilidade quando mencionados no texto da atividade.

Figura 1: Por uma reta passam infinitos planos.



Neste primeiro encontro foi realizada apenas a introdução da atividade proposta. As duplas realizavam as atividades independentemente, com a ajuda e supervisão do docente. Em um primeiro momento, alguns alunos apresentaram dificuldade para criar pontos no espaço, criando pontos apenas no plano base, ou mesmo somente nos eixos coordenados. Foi solicitado que a janela de visualização fosse girada, para que essa peculiaridade fosse observada e posteriormente contornada, com todos os discentes construindo pontos de maneira correta. Notou-se que a observação de colegas realizando a atividade também foi de grande ajuda, já que alguns apresentavam uma naturalidade maior para lidar com o software (possivelmente por maior contato com informática em geral).

Os alunos notaram que, sob alguns ângulos, as figuras parecem ter propriedades diferentes, como nas visualizações na direção dos planos coordenados, onde a figura parecia pertencer toda a um mesmo plano. Também notaram que partes pontilhadas em retas e pontos opacos indicaram que estes estavam sobrepostos pelo plano base ou outro objeto. Também tiveram interesse em deixar detalhes estéticos, perguntando se era possível esconder “as letras” dos elementos e mudar sua cor. Foi-lhes explicado como ocultar rótulos e mudar cores usando a janela de propriedade de cada objeto. Essas perguntas apareceram naturalmente, imediatamente depois do primeiro contato com o software.

Devido a limitações do hardware de alguns computadores, algumas dificuldades técnicas foram encontradas. Em alguns, ao girar a janela de visualização havia travamentos ou a animação de giro era omitida (só era exibida e figura na posição inicial e na posição final).

Um outro computador (que operava com Windows XP) apenas plotava um plano por vez, isto é, para que cada plano fosse visualizado, todos os outros deviam ser ocultados. Em 2 computadores o traçado dos planos não era completo, apresentando apenas algumas partes “desbotadas” e seccionadas em quadrados. No entanto, ainda era possível visualizar propriedades desses planos. Os alunos que ficaram nesses computadores não foram afetados por essas dificuldades, uma vez que interagiam com demais colegas e debatiam as diferenças de resultados encontrados.

A aula que deu seguimento a realização da atividade foi dia 10 de dezembro, em mais um período de 50 minutos. Foram estudadas as questões 1 a 4 da atividade, que tratavam os axiomas da Geometria Espacial propostos por (DOLCE; POMPEO, 1993). As mesmas duplas ocuparam seus lugares e receberam uma folha com as atividades de Introdução e questões referentes aos postulados. O procedimento de aplicação dessa atividade foi diferente: o docente pesquisador lia a questão e aguardava a construção de todas as duplas, enquanto ajudava alguns alunos em eventuais dificuldades referentes a questão recém lida. Após uma breve discussão a respeito da questão, os alunos eram convidados a escrever, com suas palavras, a propriedade que poderia ser generalizada a partir dela, na Tabela de avaliação da atividade (Figura 2).

Figura 2: Questões e Propriedades associadas, segundo uma dupla de alunos.

Questão	Axioma/Propriedade
Questão 1)	Levamos que tanto na reta quanto fora dela $\infty$ tem infinitos pontos.
Questão 2)	No plano existe infinitos pontos e fora dele também.
Questão 3)	Por dois pontos pode passar uma reta, e por três <del>na</del> sempre.
Questão 4)	Três pontos só pode plotar um plano
Questão 5)	Para a reta estar no plano precisa de dois pontos no plano
Questão 6)	Para serem paralelas, devem estar no plano
Questão 7)	Retas reversas: não tem interseção, não existe plano que as contém
Questão 8)	Sim, no espaço existe retas concorrentes, perpendiculares e ângulos
Questão 9)	A reta não tem planos definidos, tendo em conta infinitos planos.
Questão 10)	Não existe uma interseção entre um plano e uma reta
Questão 11)	A interseção de duas retas sempre vai dar uma reta
Questão 12)	Têm planos que não se interseção, sendo paralelos.

Durante a realização da atividade alguns alunos precisaram ser lembrados de como fazer algumas construções básicas, principalmente pontos. Geralmente os discentes só notavam que haviam construído todos os pontos sob o plano  $z = 0$  ao plotar um plano que acabava coincidindo com o plano cinza. No dia 12 de dezembro foi realizada a última parte da atividade, consistindo das questões 5 a 12 e a entrega do questionário de avaliação. O procedimento adotado foi o mesmo da aula anterior, os alunos realizavam a atividade ao mesmo tempo, sob instrução do professor e após a discussão de cada questão, escreviam conclusões na tabela apropriada.

Uma questão solicitava a exibição das janelas de visualização 2D e 3D juntas e alguns alunos não seguiram as instruções corretamente, construindo pontos na Janela 3D, ao invés da Janela de Visualização 2D. Em uma das questões, que trata de retas reversas, ao digitar a

equação do plano, os alunos perguntaram se era possível usar o GeoGebra para obter a equação de qualquer figura por eles conhecida, tanto no plano quanto no espaço, e a resposta foi deixada em aberto, para que tentassem respondê-la sozinhos. Em outra questão onde eram necessários cinco planos, alguns computadores que não haviam apresentado qualquer problema citado anteriormente travaram não para visualizar a figura, mas para girá-la. Algumas duplas escolheram também pontos muito próximos, dificultando a visualização da propriedade requerida. O restante das atividades ocorreu tranquilamente, sem episódios a destacar.

Ao final do preenchimento da tabela foi entregue um o questionário de avaliação da atividade, de onde serão aferidos resultados referentes a recepção da mesma pelos alunos e sua efetividade no ensino de Geometria Espacial de Posição. Os arquivos com as atividades realizadas foram salvos nos computadores de cada dupla, conforme elas realizavam cada questão. Esses arquivos foram posteriormente recolhidos para análise. A discussão desses questionários será apresentada em outro trabalho.

### **Considerações Finais**

A atividade foi realizada em 4 períodos de 50 minutos para a realização da atividade proposta, para uma turma de terceiro ano do Ensino Médio. Observou-se que os objetivos principais da atividade foram alcançados, uma vez que os alunos fizeram uma maioria de conjecturas corretas a respeito das figuras construídas no software. Os alunos conseguiram desenvolvê-las sem maiores dificuldades, salvo as dificuldades técnicas causadas pelos computadores disponibilizados. Alguns alunos foram além das construções propostas enquanto aguardavam os demais colegas realizarem suas construções, explorando recursos do GeoGebra para construção principalmente de sólidos e polígonos. A atividade transcorreu sem maiores complicações e os momentos de discussão entre as questões foram produtivos, pois permitiam a cada dupla observar o trabalho dos colegas para argumentar as propriedades aferidas. Isso mostrou como a investigação matemática pode ser benéfica para os alunos, bem como lhes fornece um novo significado para o trabalho em Matemática, mais próximo dos profissionais da área e onde eles puderam desenvolver suas habilidades de levantar hipóteses e conjecturar.



## Referências

- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio - Parte III*. Brasília, 2000. 58 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 28.04.2017.
- CARVALHO, P. C. P. *Introdução à Geometria Espacial*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar Volume 10 - Geometria Espacial*. São Paulo: Atual Editora, 1993.
- LIMA, E. L. et al. *A Matemática do Ensino Médio , Volume 2*. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- NETO, A. C. M. *Geometria*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- PONTE, J. P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. de. *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.
- SANTOS, C. A. dos; NACARATO, A. M. *Aprendizagem em Geometria na educação básica: A fotografia e a escrita na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

