A DETERMINAÇÃO DE ESPAÇOS AMOSTRAIS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS NA EJA

Ewellen Tenorio de Lima[1]
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[2]

Ensino de Estatística e Probabilidade e Educação Ambiental

Resumo: Apresenta-se um recorte de uma pesquisa de dissertação, em andamento, que visa investigar as contribuições que a exploração de situações-problema referentes à Combinatória traz para o raciocínio probabilístico na Educação de Jovens e Adultos e vice-versa. No presente texto, discutem-se as contribuições que o trabalho com uma das exigências cognitivas para o amplo entendimento da Probabilidade, apontadas por Bryant e Nunes (2012), *formar e categorizar espaços amostrais,* traz para o desempenho na resolução de problemas combinatórios. A Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986, 1996) embasa o destaque dado à necessidade do contato com diferentes situações que atribuam sentido à Combinatória. São considerados os tipos de problemas combinatórios apresentados por Pessoa e Borba (2009), que unificam classificações anteriores e, com base nos invariantes de *ordem* e de *escolha* desses problemas, os classificam em *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Os dados apresentados e discutidos dizem respeito a um estudo piloto realizado junto a oito estudantes da EJA, sendo esses estudantes dos Módulos II, III, IV e V (2º ao 9º ano do Ensino Fundamental). Os problemas de *produto cartesiano* obtiveram maior número de acertos, enquanto os de *combinação* obtiveram menor. A exploração dos espaços amostrais referentes aos problemas combinatórios propostos consistiu em um rico momento de descoberta de novas possibilidades, bem como proporcionou a reflexão acerca dos invariantes de ordem e de escolha desses problemas. Tal resultado indica a importância de um trabalho conjunto de Combinatória e Probabilidade para o desenvolvimento de ambos os raciocínios nessa modalidade de ensino.

Palavras Chaves: Raciocínio Combinatório. Probabilidade. EJA. Espaço Amostral.

INTRODUÇÃO

A Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (BRASIL, 1996) aponta a necessidade da oferta de Educação Básica a jovens e adultos que não completaram seus estudos na idade regular. É dado destaque à importância de que a Educação de Jovens e Adultos – EJA – seja pensada de forma a ser adequada ao público que atende, considerando suas especificidades.

Para que a educação direcionada aos estudantes da EJA seja adequada às suas necessidades, é importante que se investiguem os conhecimentos possuídos por esses estudantes. É necessário, também, que se busque determinar os conceitos que devem ser ensinados, reconhecendo o aprendizado adquirido por meio de práticas anteriores (escolares e sociais).

---

[1] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – EDUMATEC, UFPE.
[2] PhD pela Oxford Brookes University, UK; Professora Associada da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).

O presente estudo busca trazer contribuições nesse sentido, por meio do levantamento de conhecimentos referentes, especificamente, à Combinatória e à Probabilidade mobilizados durante a resolução de problemas. Busca-se evidenciar as relações que se estabelecem entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico de estudantes da EJA.

Além de permitirem o tratamento de situações reais, o raciocínio combinatório e o probabilístico proporcionam novas formas de relacionar conjuntos de elementos, de pensar sobre proporções e de compreender eventos do cotidiano. Constituem-se, assim, como modos de pensar úteis ao desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. Entretanto, o trabalho com tais raciocínios parece ganhar pouca atenção nas salas de aula da EJA, principalmente nos módulos equivalentes aos anos do Ensino Fundamental, embora sejam essenciais para a ampla compreensão das estruturas multiplicativas. No presente estudo, busca-se investigar as contribuições que podem surgir a partir do estabelecimento de relações entre esses raciocínios.

Adota-se como referencial teórico base a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986, 1996), que destaca a importância do trabalho com diferentes *situações* que atribuem sentido aos conceitos para seu amplo entendimento. No que diz respeito à Combinatória, adota-se a classificação de Pessoa e Borba (2009), que classificam as situações combinatórias em problemas de *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação.* Quanto à Probabilidade, são consideradas as exigências cognitivas apontadas por Bryant e Nunes (2012). No presente texto, discute-se a relação entre o desempenho apresentado na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios e a exploração de uma exigência cognitiva da Probabilidade específica, relacionada à construção de *espaços amostrais.*

APORTE TEÓRICO

A Teoria dos Campos Conceituais "privilegia modelos que atribuem um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos" (VERGNAUD, 1996. p.167). Um campo conceitual é entendido como "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (p. 10). Para Vergnaud (1986), um conceito é formado pelo tripé dos conjuntos das *situações* que o atribuem sentido (S), das propriedades constantes nas diversas situações, isto é, seus *invariantes* (I) e das *representações* *simbólicas* utilizadas para representá-lo (R). Destaca-se a necessidade da exploração e classificação das diferentes situações que atribuem significados aos conceitos para que haja ampla compreensão dos mesmos, visto que “é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido” (VERGNAUD, 1996. p. 156).

Os conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade, focos do presente estudo, inserem-se no campo conceitual das estruturas multiplicativas que engloba “situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações” (VERGNAUD, 1986. p. 167).

Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto de Carvalho e Fernandez (1991) afirmam que “a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas” (p. 1). Esses autores indicam dois tipos de problema mais frequentes no estudo da mesma: “1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos deum conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; 2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas” (p. 2).

Morgado et. al. (1991) acreditam que “a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema” (p. 2). Dessa forma, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, é importante proporcionar o contato com *situações* e *representações simbólicas* diversas para que haja ampla compreensão dos conceitos relacionados à Combinatória.

Adota-se, aqui, a classificação de problemas combinatórios apresentada por Pessoa e Borba (2009), que integram classificações anteriores e, com base nos invariantes de *ordem* e de *escolha* desses problemas os classificam em: *produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Os problemas de *produto cartesiano* envolvem a escolha a partir de mais de um conjunto, nos quais existe uma relação de um-para-muitos entre seus elementos. Nesse tipo de problema a mudança de ordem dos elementos não constitui possibilidades distintas. Por sua vez, os problemas de *arranjo*, *permutação* e *combinação* lidam com situações nas quais a escolha acontece dentro de um único conjunto, podendo ser utilizados todos (caso dos problemas de *permutação*) ou alguns dos elementos do mesmo (problemas de *arranjo* e de *combinação*). No que diz respeito à ordem dos elementos, ela é determinante de possibilidades distintas nos problemas de *arranjo* e *permutação* e não determina novas possibilidades nos problemas de *combinação*.

A Probabilidade, por sua vez, é definida por Morgado et al. (1991) como “o ramo da Matemática que cria, desenvolve e, em geral, pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios” (p. 119). Lida, assim, com o estudo de eventos que ocorrem aleatoriamente, ou seja, “as pessoas sabem que eles podem acontecer, mas não têm certeza se e quando eles acontecerão” (BRYANT; NUNES, 2012. p.3, tradução nossa).

Bryant e Nunes (2012) destacam que, mesmo que a aleatoriedade e a Probabilidade estejam presentes no cotidiano, dificuldades em raciocinar probabilisticamente são comuns, pois a Probabilidade é um conceito complexo. Os autores destacam quatro demandas cognitivas necessárias ao raciocínio probabilístico, sendo essas: *compreender a noção de aleatoriedade, formar e categorizar espaços amostrais, comparar e quantificar probabilidades* e *entender correlações*. No presente artigo, trata-se, em especial, da segunda demanda cognitiva citada.

Morgado et al. (1991) destacam que determinar o *espaço amostral* é o primeiro passo para resolver qualquer problema probabilístico. Para Bryant e Nunes (2012) esse é um passo importante não só para o cálculo de probabilidades, mas também um elemento essencial para entender a natureza da Probabilidade, visto que “problemas em Probabilidade são sempre sobre uma gama de eventos possíveis, mas incertos, que ocorrem aleatoriamente, [...] nós temos que saber precisamente quais são todos os eventos possíveis” (p. 29, tradução nossa).

A determinação do espaço amostral, ou seja, o conjunto das diferentes possibilidades de eventos está intimamente ligado ao raciocínio combinatório, visto que segundo Piaget e Inhelder (1951, *apud* NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996), se o sujeito não é capaz de raciocinar à luz da Combinatória, não conseguirá compreender a ideia de Probabilidade, exceto em casos nos quais experimentos aleatórios muito elementares sejam tratados. Observa-se, assim, que o levantamento de espaços amostrais requer um processo de construção combinatória.

Por outro lado, a construção do *espaço amostral* se mostra uma importante ferramenta para a explicitação das possibilidades de um problema combinatório, sendo útil na resolução desses problemas através do uso de *representações* *simbólicas* específicas, tais como a listagem. A partir dos referenciais teóricos discutidos, o foco da presente investigação é a relação existente entre o raciocínio combinatório e o probabilístico, em especial, no que diz respeito à construção de *espaço amostral*, tendo como sujeitos estudantes da EJA.

OBJETIVOS

Geral

Analisar as contribuições que a exploração de situações referentes à construção de espaços amostrais traz para o raciocínio combinatório de estudantes da EJA e vice-versa.

Específicos

- Verificar o desempenho de estudantes dos Módulos da EJA equivalentes aos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, referente à resolução de problemas combinatórios e probabilísticos (construção de espaços amostrais);
- Examinar a influência da escolarização formal no desempenho apresentado pelos participantes;
- Investigar estratégias utilizadas, suas limitações e dificuldades apresentadas na resolução dos problemas propostos;
- Levantar possíveis contribuições que a exploração de espaços amostrais traz para a resolução de problemas de Combinatória e vice-versa.

MÉTODO

Participaram do presente estudo oito estudantes da EJA, cursando os Módulos II (equivalente ao 2º e 3º anos do Ensino Fundamental), III (4º e 5º anos), IV (6º e 7º anos) e V (8º e 9º anos). Os dois participantes de cada módulo foram escolhidos de maneira que um tivesse idade menor que 20 anos e o outro maior que 40 anos, buscando-se obter uma variedade do público presente nas salas de aula do campo de pesquisa.

Os estudantes participaram, individualmente, de entrevistas clínicas. A escolha por tal método de coleta se deu em função do interesse em investigar como os participantes chegam às respostas dadas aos problemas propostos, como reagem aos questionamentos da pesquisadora e como reavaliam suas soluções através das revisitações aos problemas combinatórios à luz da Probabilidade, por meio da exploração de espaços amostrais. Ou seja, optou-se pela realização de entrevistas clínicas, dado o interesse em acompanhar de perto o raciocínio combinatório e o probabilístico, que tendem “a refletir-se nas ações, nas escolhas que um sujeito faz, por exemplo, ao resolver um problema” (CARRAHER, 1998. p. 1).

Durante as entrevistas, os participantes resolveram um teste composto por quatro problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo, permutação* e *combinação*) e quatro revisitações que dizem respeito à construção de espaços amostrais desses problemas. Os problemas propostos são apresentados a seguir (Figuras 1, 2 e 3).

Figura 1: Problemas combinatórios propostos

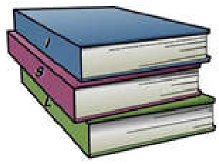
(PC) Carlos começou a trabalhar em uma rede de supermercados e acabou de receber o seu fardamento: 4 camisetas em cores diferentes com o logo da empresa e 2 calças. Quantos conjuntos de uniforme diferentes Carlos pode formar com as peças recebidas?

(A) 4 rapazes desejam participar de uma ‘pelada’ com seus amigos e querem definir 2 jogadores:um atacante e um goleiro. De quantas formas diferentes os rapazes podem se organizar para ocupar as posições citadas?

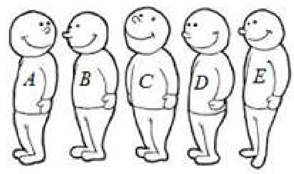
PC: produto cartesiano (resultado 8); A: arranjo (resultado 12).

Figura 2: Problemas combinatórios propostos (continuação)

(P) Maria gosta muito de literatura brasileira e seu autor favorito é José de Alencar. Ela ganhou 3 livros (*Iracema, Senhora* e *Lucíola*) de presente de aniversário e ainda não decidiu em que ordem irá lê-los. Quantas ordens de leitura diferentes são possíveis?



(C) Sara tem 5 primos (André, Bruno, César, Diogo e Eraldo) e quer escolher 3 deles para acompanhá-la no aniversário de uma amiga. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer essa escolha?



P: permutação (resultado 6);C: combinação (resultado 10).

Os problemas combinatórios propostos foram elaborados de maneira que seus resultados tivessem ordem de grandeza semelhante, com número total de possibilidades entre 6 e 12. Esses problemas foram apresentados aos participantes e, após suas resoluções, houve a revisitação aos mesmos sob o olhar da Probabilidade, através da exploração de construção de *espaço amostral* (Figura 3).

Figura 3: Revisitações aos problemas combinatórios

(EAPC) Liste todos os conjuntos de calça e camiseta que Carlos pode formar com as peças de roupa recebidas.

(EAA) Liste todas as formas pelas quais se pode escolher 2 jogadores (um goleiro e um atacante) a partir dos 4 amigos.

(EAP) Liste todas as ordens de leitura que Maria pode escolher.

(EAC) Liste todas as formas como Sara pode formar grupos de 3 primos para acompanhá-la no aniversário.

EAPC: espaço amostral de produto cartesiano; EAA: espaço amostral de arranjo;
EAP: espaço amostral de permutação; EAC: espaço amostral de combinação.

A partir dessas revisitações, os participantes puderam avaliar as respostas dadas aos problemas combinatórios, por intermédio da construção dos espaços amostrais a eles relacionados. Assim, fizeram uso da listagem (caso tal representação simbólica não houvesse sido utilizada espontaneamente de início) ou conferiram seus registros, para possíveis acréscimos/correções.

Para a realização de análises quantitativas, foi atribuído um (1) ponto para cada acerto, ou seja, o esgotamento do número de possibilidades e zero (0) nos casos nos quais o número total de possibilidades não foi alcançado. Dessa forma a pontuação máxima foi de oito (8) pontos. As análises (quantitativas e qualitativas) dos dados coletados são apresentadas na seção que segue.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Na Tabela 1 apresenta-se o desempenho obtido por cada um dos participantes da pesquisa na resolução dos problemas propostos. Os participantes adultos são identificados por numeração ímpar enquanto os jovens são identificados por numeração par, sendo os participantes P1 e P2 estudantes do Módulo II, P3 e P4 do Módulo III, P5 e P6 do Módulo IV e os participantes P7 e P8 do Módulo V.

Tabela 1: Desempenho por participante

Participante	PC	EAPC	A	EAA	P	EAP	C	EAC	Desempenho total
P1	1	1	1	1	0	0	0	0	**4**
P2	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
P3	0	1	0	0	0	1	0	0	**2**
P4	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
P5	1	1	0	1	1	1	0	0	**5**
P6	0	1	0	0	0	0	0	0	**1**
P7	0	1	0	0	1	1	0	0	**3**
P8	0	1	0	0	1	1	1	1	**5**

PC: produto cartesiano; EAPC: espaço amostral produto cartesiano; A: arranjo; EAA: espaço amostral arranjo; P: permutação; EAP: espaço amostral permutação; C: combinação; EAC: espaço amostral combinação.
FONTE: A pesquisa.

A análise da Tabela 1 permite perceber que os participantes dos Módulos II e III apresentaram desempenhos médios semelhantes, da mesma maneira que os participantes dos Módulos IV e V. O primeiro grupo apresentou média de acertos de aproximadamente 1,5 pontos, enquanto o segundo obteve uma média de 3,5 pontos. Logo, parece haver influência, no desempenho dos participantes, do módulo da EJA do qual fazem parte, principalmente no que diz respeito à equivalência desses aos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental regular.

Esse resultado corrobora com o estudo de Lima (2010), que investigou o raciocínio combinatório na EJA e constatou desempenhos superiores dos estudantes dos módulos equivalentes aos Anos Finais quando comparados aos desempenhos obtidos pelos estudantes dos módulos equivalentes aos Anos Iniciais.

A autora destacou que, à medida que avançavam nos anos escolares, os alunos percebiam mais as relações presentes em cada um dos tipos de problemas combinatórios. Assim, o tempo de escolarização promoveu a obtenção de melhores desempenhos, independentemente de instrução escolar específica.

O desempenho apresentado pelos participantes dos Módulos IV e V apresenta-se ainda insatisfatório, visto que a proposta curricular para o 2º segmento da EJA (BRASIL, 2002) apresenta expectativas de aprendizagem referentes à capacidade de construir espaços amostrais e de resolver problemas relacionados ao raciocínio combinatório. O desempenho obtido, abaixo da metade da pontuação máxima do teste, evidencia uma defasagem no conhecimento acerca da Combinatória e da Probabilidade.

Chama-se atenção para o fato de que os participantes adultos obtiveram um desempenho superior aos participantes jovens do mesmo módulo, com exceção do Módulo V. Tal resultado reflete um maior empenho dos participantes adultos, observado ao decorrer das entrevistas clínicas. Percebeu-se que esses participantes se esforçaram mais na resolução dos problemas, tendo empregado mais tempo em busca do esgotamento de possibilidades do que os jovens.

É importante destacar que mesmo quando do não esgotamento das possibilidades, todos os participantes apresentaram (fazendo ou não uso de listagem) várias dessas possibilidades e, por vezes, chegaram bem próximo ao número total. Na Tabela 2 são apresentadas as respostas dos participantes após a resolução e revisitação aos problemas combinatórios propostos, sendo possível compará-las com a solução correta.

Tabela 2: Número de possibilidades explicitado após a revisitação dos problemas combinatórios

Problema	nº total de possibilidades	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	Acertos
Produto Cartesiano	8	8	4	8	4	8	8	8	8	**6**
Arranjo	12	12	4	6	3	12	10	8	5	**2**
Permutação	6	5	4	6	4	6	3	6	6	**4**
Combinação	10	8	4	5	4	6	15	20	10	**1**

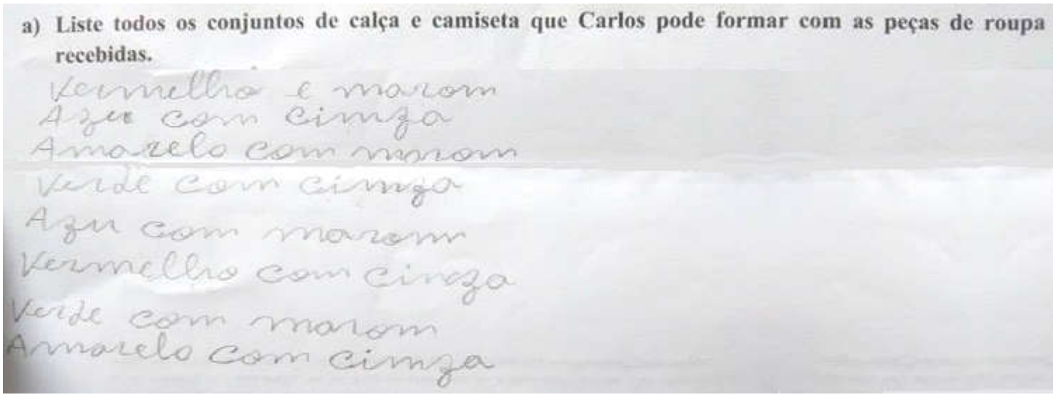
P: participante.
FONTE: A pesquisa.

O problema de *produto cartesiano* foi aquele no qual foi constatado maior número de acertos, enquanto o problema de *combinação* teve suas possibilidades esgotadas por apenas um participante do Módulo V. Tal resultado corrobora com estudos anteriores, nos quais o *produto cartesiano* é apontado como o tipo de problema combinatório que apresenta maior índice de acertos em diferentes níveis e modalidades de ensino, enquanto os problemas de *permutação* e *combinação* são aqueles que apresentam maiores dificuldades, em função de incompreensões do invariante de ordem (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015).

A Tabela 2 permite, ainda, observar que os participantes, quanto não chegam ao número total de possibilidades, aproximam-se dele. Essa aproximação se deu principalmente após a revisitação dos problemas combinatórios, que se mostrou um rico momento de reflexões sobre os *invariantes* dos problemas combinatórios e de avaliação e adequação dos *teoremas-em-ação* utilizados para solucioná-los.

Na Figura 4 e na Transcrição 1 é possível observar como a construção do espaço amostral do problema de *produto cartesiano* contribuiu para o esgotamento de possibilidades referente a tal problema. O participante P3 havia indicado que o número máximo de possibilidades era quatro, entretanto, após a revisitação ao problema chega ao número total de possibilidades (oito).

Figura 4: Problema de *espaço amostral de produto cartesiano* (resultado 8) resolvido por P3



a) Liste todos os conjuntos de calça e camiseta que Carlos pode formar com as peças de roupa recebidas.

Vermelho e marom
Azu com cimza
Amarelo com marom
Verde com cimza
Azu com marom
Vermelho com cimza
Verde com marom
Amarelo com cimza

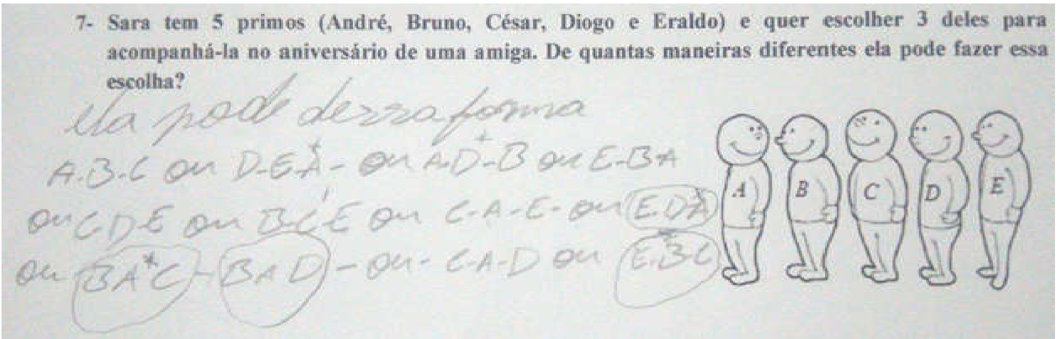
Transcrição 1: Problema de *espaço amostral de produto cartesiano* (resultado 8) resolvido por P3

Pesq.: "São essas 4 *[possibilidades]* ou tem mais alguma?"
P3: "Eu também posso colocar a blusa azul com a *[calça]* marrom".
Pesq.: "Ainda não tem, não é? Então o senhor descobriu mais uma?"
[Lista essa e mais 3 possibilidades, esgotando-as]
Pesq.: "Antes o senhor tinha dito que a resposta é 4. Quantas formas o senhor acha que são, no total?"
P3: "8. Pode trocar as calças, aí dá 8".

Inicialmente, ao resolver o problema de *produto cartesiano,* P3 enumerou oralmente quatro possibilidades, sem registro, usando cada camisa uma única vez e repetindo o uso das calças. Durante a revisitação ao problema, listou quatro possibilidades e, posteriormente, ao considerar que cada camisa poderia ser usada com qualquer uma das calças, listou mais quatro possibilidades, chegando ao resultado correto. O registro por meio da listagem permitiu que o participante acompanhasse as possibilidades já consideradas. Além disso, P3 demonstrou compreender o invariante da escolha do problema proposto, ao considerar a relação um-para-muitos, combinando todos os elementos dos dois conjuntos (camisas e calças), dois a dois.

A revisitação aos problemas combinatórios por meio da construção do espaço amostral se mostrou também um momento de reflexão sobre os invariantes dos diferentes tipos de problemas trabalhados (Figura 5 e Transcrição 2).

Figura 5: Problema de *espaço amostral* de *combinação* (resultado 10) resolvido por P1



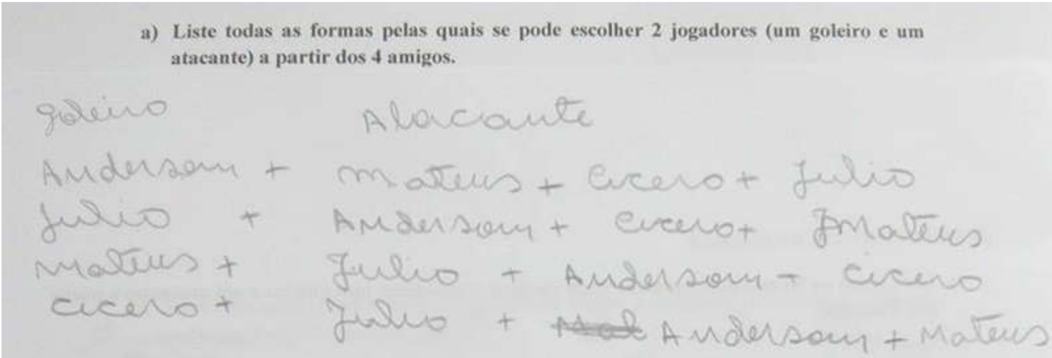
Transcrição 2: Problema de *espaço amostral* de *combinação* (resultado 10) resolvido por P1

> **Pesq.:** "Aqui, por exemplo, você escreveu André, Bruno e César e aqui Bruno, André e César. É diferente?"
>
> **P1:** "Eita, não! Só mudou a ordem. Ela vai escolher 3, né? São personalidades, então não faz diferença. Tá igual aqui! Só mudou a ordem, mas são as mesmas pessoas. Tá igual, eu mudei só a ordem das letras".
>
> *[retoma a listagem e elimina alguns trios que identifica como repetidos, ficando assim com oito possibilidades]*

Para resolver o problema de *combinação*, o participante P1 utilizou, espontaneamente, a listagem. Ao fazer uso de tal *representação simbólica*, não apresentou sistematização (o que dificultou a visualização dos casos já considerados) e demonstrou incompreensões do invariante de ordem do tipo de problema em questão, considerando trios repetidos. A partir da revisitação, na qual optou por rever a listagem já feita, e do questionamento da pesquisadora, o participante pode avaliar a solução dada ao problema, chegando à conclusão de que a ordem de apresentação dos primos não constitui novas possibilidades. Com isso, eliminou casos repetidos, aproximando-se da resposta correta.

A sistematização da listagem foi um determinante do sucesso na resolução dos problemas propostos. Os participantes que apresentaram maior número de acertos conseguiram esgotar as possibilidades por apresentar organização na listagem (Figura 6).

Figura 6: Problema de *espaço amostral* de *arranjo* (resultado 12) resolvido por P5


a) Liste todas as formas pelas quais se pode escolher 2 jogadores (um goleiro e um atacante) a partir dos 4 amigos.

goleiro Alacante
Andersom + mateus + Cicero + Julio
Julio + Andersom + Cicero + Mateus
Mateus + Julio + Andersom + Cicero
Cicero + Julio + ~~Mat~~ Andersom + Mateus

Ao explicitar o *espaço amostral* do problema de *arranjo*, P5 fixou cada rapaz como goleiro e considerou a possibilidade de qualquer um dos rapazes restantes serem o atacante escolhido. Assim, listou 12 possibilidades distintas (três com cada rapaz como goleiro), esgotando as possibilidades do problema. Esse tipo de sistematização se mostra importante para o esgotamento, principalmente quando há um grande número de possibilidades relativo a dado problema.

A listagem proporcionada pela revisitação aos problemas combinatórios por meio da construção de *espaços amostrais* se mostrou importante para o esgotamento das possibilidades e para a compreensão dos invariantes desses problemas. É importante que a escola proporcione o aperfeiçoamento do uso dessa *representação simbólica*, bem como o contato com representações mais eficazes para a resolução de problemas com número de possibilidades elevado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da análise de dados coletados junto a oito estudantes da EJA, por intermédio da resolução de problemas combinatórios, constatou-se um melhor desempenho nos problemas combinatórios de *produto cartesiano* e menor percentual de acertos nos de *combinação*. Além disso, a partir de revisitações a esses problemas, por meio da construção de *espaços amostrais,* foi possível perceber contribuições das revisitações sob o olhar da Probabilidade para o desempenho na resolução dos problemas combinatórios. A explicitação dos *espaços amostrais* se mostrou como um momento rico de avaliação dos procedimentos utilizados para a solução dos problemas combinatórios, ajudando no esgotamento e/aproximação do número total de possibilidades, bem como de reflexão sobre os invariantes de ordem e de escolha desses problemas.

A escolarização formal demonstrou influenciar o desempenho apresentado: os estudantes dos Módulos IV e V apresentaram maior sistematização nas listagens, obtendo mais sucesso em esgotar possibilidades e respeitaramos invariantes de ordem e de escolha dos diferentes problemas.

Foi possível perceber contribuições interessantes que surgem entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade por meio da resolução de problemas que permitem uma relação entre ambos os raciocínios. Desse modo, acredita-se que a articulação do raciocínio combinatório e do probabilístico pode beneficiar o desenvolvimento de ambos na EJA, sendo interessante que a instrução escolar proporcione o desenvolvimento desses raciocínios de maneira articulada, visando à ampliação do repertório de estratégias (como o princípio fundamental da contagem, fórmulas, etc.) e sistematização das já utilizadas, visto que "as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas" (VERGNAUD, 1996. p. 184).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORBA, Rute; ROCHA, Cristiane; AZEVEDO, Juliana. Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei n. 9394/96.** Brasília, DF: MEC, 1996.

BRASIL. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos**: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série. v. 3. MEC: Secretaria de Educação Fundamental, 2002.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. **Children's understanding of probability**: a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em: http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf.

CARRAHER, Terezinha Nunes. **O método clínico usando os exames de Piaget**. 5. ed. – São Paulo: Cortez, 1998.

FONSECA, Maria da Conceição. **Educação matemática de jovens e adultos**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

LIMA, Rita de Cássia. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos:** do início da escolarização até o ensino médio**.** (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

MORGADO, Augusto César; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO DE CARVALHO, Paulo César; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade***.* Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAVARRO-PELAYO, Virginia; BATANERO, Maria Carmen; GODINO, Juan Díaz. Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. **Educación Matemática,** v.8(1), p. 26-39, 1996.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, Campinas, SP, v. 17, n. 31, p.105-150, 2009.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p.75-90, 1986.