

OFICINA DE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS: POSSIBILIDADES PARA APRENDER MATEMÁTICA

João Francisco Staffa da Costa¹

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar a viabilidade e contribuição do uso de materiais manipulativos para a aprendizagem de números positivos e negativos com alunos de sextas e sétimas séries do Ensino Fundamental. Inicialmente, fez-se uma retrospectiva histórica da utilização de números negativos e abordaram-se algumas dificuldades dos alunos quando tal conteúdo é apresentado de forma a contextualizar o estudo. O aporte teórico contou com as contribuições de Fagundes (1977) para defender a utilização de materiais manipulativos no ensino de matemática e Vergnaud (1986, 1991) com a Teoria dos Campos Conceituais para justificar a elaboração de cada material. A parte empírica contou com a colaboração de alunos de sexta e sétima séries do Ensino Fundamental de uma Escola Pública em Porto Alegre/RS ocorrendo no formato de oficinas, fazendo-se uso dos materiais elaborados. Procurou-se responder a questão de pesquisa: utilizar materiais manipulativos pode contribuir para a aprendizagem de números positivos e negativos, fazendo com que o aluno atribua a eles significado concreto? Pode-se concluir que os materiais, ainda que precisem ser aprimorados, contribuíram para que os alunos apreendessem números positivos e negativos em diferentes contextos.

PALAVRAS-CHAVE: Materiais manipulativos. Operações com números positivos e negativos. Método clínico. Teoria dos campos conceituais.

Contexto

Alguns estudantes de Ensino Fundamental apresentam dificuldades com números negativos. Tais constrangimentos podem ter raízes históricas: os números inteiros surgiram de uma necessidade interna da matemática e não por necessidade prática. Este é um fator que pode contribuir para a dificuldade de entendimento; historicamente, a ideia da “regra de sinais” surge como algo artificial, sem um substrato concreto. A ideia de contextualização surge somente na idade média. Nota-se que as dificuldades em operar com os números inteiros são históricas e, conseqüentemente, os alunos podem apresentar dificuldades. (SÁ; ANJOS, 2011).

Além disso, pode-se apontar dificuldades relacionadas à própria compreensão de operações com números inteiros: professores não buscam novas estratégias para ensinar tal conteúdo; números negativos vistos como uma operação e não como o número menor que zero; problemas de contextualização dos conteúdos, na medida em que a contextualização coerente depende do cotidiano e realidade dos alunos; há também a questão da assimilação deformante, denominada por Piaget, que consiste compreender um conceito de forma equivocada e utilizá-lo tomando-o como correto. (MEGID, 2001).

1. Licenciado em Matemática (UFRGS). Mestre em Educação em Ciências e Matemática (PUCRS). Professor da Rede Municipal de Porto Alegre e do Centro Universitário Ritter dos Reis (UniRitter).
e-mail: eng.staffa@gmail.com

Tendo como pano de fundo as raízes históricas de como os números negativos eram abordados e algumas dificuldades apontadas por estudantes, buscou-se criar uma sequência didática, composta por materiais manipulativos a fim de diminuir tais dificuldades relacionadas à compreensão e operação com números positivos e negativos. Para tanto, apresenta-se breve justificativa da utilização de materiais manipulativos para o ensino de matemática e a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud que embasou a elaboração desta sequência de atividades.

Aporte Teórico

Acredita-se que a aprendizagem de matemática não se resume ao aprendizado de algum algoritmo ou conceito isolado. A matemática, embora bastante abstrata em alguns aspectos, traduz fenômenos da realidade e a aprendizagem desta deve estar conectada a situações reais para que o aluno possa compreendê-la e aplicá-la.

De acordo com Fagundes (1977, p. 2) “por aprendizado de matemática deve-se, portanto, entender a apreensão de tais conexões, bem como suas simbologias, e a aquisição da capacidade de aplicar os conceitos formados a situações reais que ocorrem no mundo”.

Tal compreensão de conceitos não é adquirida quando o sujeito assiste uma aula expositiva, mas quando age sobre determinado objeto, criando hipóteses sobre a sua ação sobre esse objeto, levantando suas conclusões sobre o que foi observado. Explica-se, assim, a importância da utilização de materiais manipulativos para a aprendizagem de matemática.

Azevedo (*apud* MIORIM e FIORENTINI, 1990), defende esta ideia:

Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí a mergulhar na abstração. (Azevedo *apud* Miorim & Fiorentini, 1990, p. 4).

Entretanto, deve-se tomar cuidado para não utilizar materiais manipulativos simplesmente para “expor uma ideia” aos alunos, conforme apontado por Costa (2011):

Deve-se utilizar materiais manipulativos não somente para expor o que está no livro didático, mas para que o aluno possa manipulá-lo, construir relações, analisar, formular hipóteses, testar e chegar às conclusões. (p. 23).

1. Licenciado em Matemática (UFRGS). Mestre em Educação em Ciências e Matemática (PUCRS). Professor da Rede Municipal de Porto Alegre e do Centro Universitário Ritter dos Reis (UniRitter).
e-mail: eng.staffa@gmail.com

Neste estudo, elaborou-se uma sequência de sete materiais manipulativos. Tal construção baseou-se na Teoria de Campos Conceituais, proposta por Gerard Vergnaud.

De acordo com o autor:

um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. (Vergnaud, 1986, p. 84)

Um campo conceitual é formado por um tripé (S,I,R), onde:

S (situações): significam diferentes situações nas quais um conceito pode estar envolvido;

I (invariantes): significa o que não varia, independente do sistema analisado. O reconhecimento de invariantes é a chave para a generalização de um novo esquema de ação; os sete materiais manipulativos da sequência didática possuem um invariante: todos exploram números positivos e negativos.

R (representações): são as diferentes representações de um determinado conceito.

A partir desta definição expressa por Vergnaud, acredita-se que a sequência didática proposta configura-se em um campo conceitual na medida em que apresenta os três elementos: um conjunto de situações para trabalhar números positivos e negativos que requerem a utilização de diversos conceitos matemáticos, possui invariantes de forma a definir as propriedades que queremos explorar e que oferece diversas formas de representação das atividades. (Costa, 2011).

Corroborando com Vergnaud (1991):

um conceito não pode ser reduzido a sua definição, pelo menos quando nos interessamos pela sua aprendizagem e pelo seu ensino. É através de situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. (Vergnaud, 1991, p.156).

Além disso:

é um objeto prioritário, na investigação em didática, investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações problema que conferem significado e função a um conceito. (Vergnaud, 1986, p.76)

Em resumo, a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada através de situações variadas e o investigador deve analisar uma variedade de condutas e de esquemas para compreender em que consiste, do ponto de vista cognitivo, este ou aquele conceito. (Verghnaud, 1991, p.165).

Metodologia

Tomando como substrato tal teoria, a parte empírica deste estudo ocorreu no formato de oficinas com alunos de sexta e sétima série do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Porto Alegre. Ocorreram dois encontros de 45 minutos com cada turma, em outubro de 2011.

Para a realização desta oficina, foram produzidos sete materiais manipulativos: nível do mar, quadrado mágico, saldo de gols, elevador, cidade (plano cartesiano), jogo do zoológico e temperaturas, produzidos na disciplina de Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática II, disciplina integrante do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. (UFRGS).

Reunidos em grupos de 4 alunos, os estudantes, em um esquema semelhante a um rodízio, passaram por cada um dos materiais, permanecendo 15 minutos em cada estação, respondendo as perguntas propostas em questionários e as perguntas realizadas pelo pesquisador. No primeiro encontro foram explorados 4 materiais e, no segundo, os três restantes, justamente para que se conseguisse coletar a maior quantidade possível de informações relevantes.

A seguir, apresentam-se as atividades constituintes da oficina:

A) Nível do mar

Trata-se de uma haste de madeira graduada apoiada sobre a mesa, tomando-se o nível da mesa como zero (referência). Os valores positivos estão acima da referência e os valores negativos, abaixo da referência. Utilizando este material os alunos deveriam responder as seguintes perguntas:

- 1) A que distância está o container com relação ao nível do mar?
 - 2) Que distância falta para que o submarino chegue até o container?
 - 3) Qual a distância da torre de controle do navio em relação ao convés do mesmo?
 - 4) Qual a altura do convés do navio em relação ao nível do mar?
 - 5) Supondo que o guindaste esteja no convés do navio e que contenha três saídas de cabos de aço, posso dizer que 1650 metros de cabo das três saídas seriam o suficiente para chegar até o container? Caso contrário, qual seria a quantidade mínima de cabo? (as três saídas têm cabos de aço do mesmo tamanho).
 - 6) A que distância o submarino está da torre de controle do navio?
 - 7) Qual a distância do submarino em relação ao guindaste?
- B) Quadrado mágico

Esta atividade é composta por um tabuleiro quadriculado com três linhas e três colunas e 18 fichas, numeradas da seguinte forma: naturais de 1 a 9 e inteiros negativos de -1 a -9. A atividade consiste em preencher os nove campos do tabuleiro com as fichas disponíveis, sem repetir nenhum número de forma que a soma de todas as linhas e colunas seja zero.

- C) Saldo de gols

Utilizando a tabela de pontos de determinado campeonato, os alunos deveriam responder as seguintes perguntas:

- 1) Qual a diferença de gols marcados entre o primeiro e o décimo quarto colocados na tabela?
- 2) Quem sofreu mais gols?
- 3) Quem tem o maior saldo de gols?
- 4) Quantos gols marcaram os quatro primeiros colocados juntos?
- 5) Qual o saldo de gols dos quatro últimos colocados no campeonato?

6) Se o Grêmio tivesse sua situação mudada para 22 vitórias, 10 empates e 6 derrotas, o time tricolor passaria para a primeira colocação?

D) Elevador

Utilizando um protótipo de elevador, confeccionado com canos de PCV e roldana, os alunos foram convidados a responder as seguintes perguntas:

A tarefa de Carlinhos é entregar os documentos na sala de cada andar, vamos ver quanto ele se desloca de elevador para executar o seu trabalho:

1) Carlinhos chega ao π -tower, no andar térreo e sobe até o quinto andar para conversar com seu chefe, pegar documentos e depois segue para o sexto andar no subsolo onde toma café. Quantos andares ele percorreu desde o momento em que chegou até a hora do café?

2) Depois de tomar café, sobe até o oitavo andar para entregar os documentos que pegou com seu chefe à senhora Arminda, secretária do vice-presidente. Quantos andares Carlinhos percorreu nesse trajeto?

3) Ao entregar os documentos para senhora Arminda, recebeu uma ligação para comparecer ao segundo andar na secretaria da empresa para buscar mais documentos e entregá-los nos seguintes andares: os documentos verdes devem ser entregues no sétimo andar do subsolo; os azuis devem ser entregues no quinto andar do subsolo e os amarelos devem ser entregues no sexto andar. Quantos andares Carlinhos percorreu nesse trajeto?

4) Após esse serviço, Carlinhos foi até o terceiro andar. Partindo daí, recebeu um envelope que deveria ser entregue ao presidente que trabalha no oitavo andar. Quantos andares ele percorreu?

5) Para ir embora, Carlinhos vai de carona com Marcelo. Carlinhos precisa encontrar Marcelo no primeiro andar do subsolo, onde fica o estacionamento. Quantos andares Marcelo e Carlinhos andaram para sair do π -tower?

E) Plano cartesiano

Este plano representa o bairro onde mora Maria, uma personagem criada para esta atividade. Maria tem uma mania peculiar: contar os seus passos. A atividade narra algumas ações executadas por Maria ao longo do dia. Nesta atividade os alunos deverão ajudá-la na tarefa de contar seus passos.

Mathemápolis é uma cidade no interior de Pitágoras, onde as pessoas são amigáveis, o clima é agradável e tranquilo. Nesta cidade temos uma amiga que se chama Maria.

Maria é uma menina simpática, gosta de conversar e tem uma mania muito engraçada: adora contar passos! Conta quantos passos há da cozinha até o banheiro, da sala até o quarto, da sua casa até a de sua amiga Luiza. E, no final, soma todos os seus passos.

Qual a quantidade de passos que Maria caminha:

- a) da sua casa até o Centro da praça;
- b) do Centro da praça até a escola;
- c) da sua casa até a escola;
- d) Então, podemos dizer que a distância da casa de Maria até a escola é o triplo da distância do Centro da praça até a escola?
- e) do Centro da praça ao museu;
- f) do clube ao shopping;
- g) a quantos passos o shopping está da sorveteria?
- h) da sorveteria até o Centro da praça;
- i) para Maria ir do clube até a sua casa, essa distância é de
- j) Quantos passos Maria faz no trajeto: do shopping até a sorveteria, da sorveteria até a praça e da praça até o museu?

F) Temperatura

Nesta atividade os alunos utilizaram um globo escolar para localizar países e então, com base em uma tabela que fornece a temperatura máxima e mínima, calcular a temperatura média em cada um desses locais. Além dos países

localizáveis no globo, também foram fornecidos os dados para que eles pudessem calcular a temperatura média na Lua e em Marte.

Temperaturas em Maio			
Cidade – país	Mínima (°C)	Máxima (°C)	Média (°C)
Porto Alegre – Brasil	13	22	
Berlim – Alemanha	9	19	
Montreal – Canadá	-8	1,5	
Pequim – China	13	26	
Toliara – Madagascar	17	29	
Tóquio – Japão	15	23	
Auckland – Nova Zelândia	10	17	
Deserto do Saara – África/Ásia	-5	50	
Antártida – Polo Sul	-65	-30	
Lua	-233	123	
Marte	-140	20	

G) Zoológico

Neste jogo, cada aluno terá a possibilidade de administrar seu próprio zoológico. O dinheiro azul representa meio de pagamento, como o dinheiro de verdade. O dinheiro vermelho representa dívida. Se um jogador possui x reais em dinheiro vermelho, isso significa que ele deve x reais ao banco e deve pagar essa dívida logo que tiver x reais em dinheiro azul. Quatro jogadores serão administradores do zoológico e outro será responsável por cuidar do banco.

Inicialmente, cada jogador recebe R\$ 10,00 em dinheiro azul. No início, todos os animais são propriedades do banco. Se o jogador parar com seu peão em um animal, de número x , que ainda seja de propriedade do banco, poderá optá-lo por comprar ou ir adiante. Se optar por ir adiante, o terreno permanece de propriedade do banco, até que algum jogador caia com seu peão ali e decida comprá-lo. O valor de compra e aluguel está indicado na casa de cada animal. Se o terreno x já tiver sido vendido a outro participante, o jogador que cair nele deverá pagar x reais de aluguel ao proprietário. O número do terreno é igual ao valor do aluguel. Toda vez que você passar pelo início do jogo o banco lhe pagará R\$ 10,00 e terá que sortear um cartão de sorteio. Se um jogador quiser vender seu animal ao banco o valor será a metade do valor pago pelo jogador na compra deste animal. O vencedor será

aquele que acabar o jogo com mais dinheiro. O jogo termina quando todos os animais forem vendidos.

Para a coleta de dados da presente pesquisa utilizou-se a essência do Método Clínico de Jean Piaget, a partir do contato direto com os colaboradores da pesquisa, questionando-os com o propósito de compreender como pensam ao operar com números positivos e negativos.

Os dados foram coletados *in loco*, por meio dos registros dos sujeitos e do pesquisador, que tem o papel de intervir com os educandos, de maneira a fazer com que as suas respostas demonstrem o que a criança pensa sobre a atividade que está realizando.

O método não se trata de um conjunto pronto de procedimentos. É através do contato com os sujeitos e dos questionamentos oriundos destes é que o examinador vai elaborando novas perguntas com o intuito de ter subsídios para responder a pergunta que se propõe.

Segundo Delval (2002), o Método Clínico:

consiste em uma forma de obter dados em interação direta com o sujeito. Porém ao utilizar o método clínico, podem-se adotar procedimentos de trabalho muito distintos, que necessariamente serão adaptados ao problema que se quer estudar". (DELVAL, 2002, p. 35).

O método, segundo o autor, tem como finalidade "[...] descobrir algo sobre os processos de raciocínio, que estavam por trás de suas respostas corretas, com um interesse particular pelo que ocultavam as respostas falsas (incorretas)" (DELVAL, 2002, p. 55)

Assim, respostas incorretas, mas justificadas, oferecem rico subsídio de análise, ao passo que, respostas corretas sem justificativa limitam a análise do pesquisador, na medida em que, justamente, quer se analisar o raciocínio e as estratégias de resolução dos alunos. A neutralidade do pesquisador para não influenciar nas respostas dos entrevistados é primordial.

Análise

Fazendo a análise do material, verificou-se que os alunos da sexta série conseguiram resolver o quadrado mágico mesmo sem ter tido este conteúdo de maneira formal, encarando os números negativos como uma "subtração".

Verificou-se que o esquema de rodízio nas atividades a cada 15 minutos pode ter prejudicado o desempenho dos alunos em função do tempo escasso para responder a todas as perguntas. Algumas atividades acabaram ficando sem resposta. A hipótese, na maioria das vezes, foi a falta de tempo e não, necessariamente, desconhecimento com relação aos números negativos.

A ausência de um professor colaborador desde o primeiro encontro pode ter dificultado uma coleta de dados mais detalhada, uma vez que o método utilizado foi o Método Clínico, que pressupõe a presença do pesquisador para questionar os alunos na medida em que desenvolvem as atividades.

Verificou-se que um fator que pode ter dificultado a realização das atividades com sucesso por parte dos alunos foi a falta de entendimento deles com relação a algumas atividades, como a do nível do mar e a de saldo de gols. Tais atividades precisam ser aprimoradas de maneira que não provoquem ambiguidades na sua interpretação.

No jogo do quadrado mágico, caso as fichas pudessem ser repetidas, certamente os alunos teriam conseguido mais configurações. Esta pode ser uma sugestão para deixar este jogo mais fácil, podendo ser utilizado em uma primeira etapa com os alunos ao aprenderem operações com números positivos e negativos.

No caso da atividade do elevador, observou-se que o material manipulativo auxiliou fortemente os alunos na resolução das atividades, pois a maioria dos alunos efetuou os cálculos mentalmente, utilizando o material como suporte de resolução.

No segundo encontro com os alunos, como havia a presença de mais um professor acompanhando a experiência, a quantidade e a qualidade dos dados coletados foi melhorada, com relação ao primeiro encontro.

Um fator importante, que os professores devem ficar atentos, é o que Piaget chamou de “Assimilação deformante”, em que o estudante cria uma regra matemática de maneira equivocada, como por exemplo: dizer que sinais diferentes resultam em algo negativo. Ora, sabemos que não são em todos os casos que isso é verdadeiro.

A linguagem é um fator de extrema importância para o desenvolvimento de quaisquer atividades. Em diversos momentos da oficina, observou-se que os alunos sentiam dificuldade na resolução das atividades propostas não por desconhecimento

do conteúdo, mas porque os materiais apresentados apresentavam ambiguidades, dificultando a compreensão do que estava sendo solicitado, como na atividade do nível do mar e do saldo de gols.

Observou-se que em muitas questões, considerando todas as atividades propostas, não só os conhecimentos de matemática precisariam ser mobilizados para que estas fossem respondidas corretamente, o que pode ter dificultado as respostas dos alunos.

Analisando a atividade do elevador observou-se que as questões que exigiam maior coordenação de operações como o item c, por exemplo, foi um fator de dificuldade para os alunos. Apenas 21% das respostas estavam corretas. Questões mais simples, que não exigiam tantas operações e transformações foram respondidas rapidamente pelos alunos, apenas com o uso do material manipulativo, sem o registro escrito.

Analisando-se a atividade do plano cartesiano, observou-se que, fazendo o uso do material disponibilizado, de maneira geral, os alunos conseguiram responder a respeito da quantidade de passos de Maria na maioria das atividades. Houve poucos casos em que os alunos não conseguiram coordenar esquemas para resolução. Algumas respostas evidenciaram que as crianças, muitas vezes, não atribuem o significado físico para os valores, quando escrevem -300 passos, por exemplo. Apenas no caso em que os alunos precisaram coordenar mais de uma ação para resolver é que o percentual de respostas corretas diminuiu.

Considerando a atividade da temperatura, verificou-se que os alunos encontraram dificuldade por se tratarem de operações com números decimais.

Verificou-se também que os alunos da sétima série fizeram o uso, mesmo que de forma intuitiva, da propriedade comutativa na adição de inteiros, uma vez que se deram conta que, para ter uma configuração diferente da original, bastava mudar a ordem das fichas no quadro. Observando-se de forma geral, as soluções dadas pelos alunos, podemos verificar que houve diversidade na formação de soluções e alguns alunos utilizaram mais de um modo de representação de suas respostas. Verificou-se que houve poucas dúvidas e equívocos com relação às operações com os números positivos e negativos nessa atividade.

Considerando a atividade do saldo de gols, verificou-se que, aproximadamente, 20% dos estudantes confundiram-se ao consultar a tabela, pois a mesma não apresentava legenda, porém, na maioria dos casos, os alunos operaram corretamente. Talvez, a presença de uma reta numérica nesta atividade poderia auxiliar os alunos na compreensão de números inteiros (item 2). Dificuldades maiores foram encontradas somente quando a questão exigia um esquema de raciocínio mais complexo (a transformação exige 4 passos – item 5). Na atividade do saldo de gols também observou-se que, em alguns casos, os alunos apresentaram dificuldades, pois precisavam dominar conhecimento de outras áreas (futebol) além da matemática.

Considerando a atividade do plano cartesiano os alunos notaram que, para chegar aos locais solicitados, não havia somente uma resposta correta, na medida em que poderiam utilizar diversos caminhos distintos. Novamente encontrou-se dificuldade em operar com esquemas que necessitavam da coordenação de diversas ações.

Conclusões

Ao concluir essa oficina e posterior análise de dados percebe-se: em alguns casos os alunos não necessitaram mais do material manipulativo para a resolução das atividades, tendo assim um ponto positivo. Acredita-se que o material deve servir de apoio, entretanto, em um segundo momento, o aluno deve conseguir resolver problemas sem o auxílio de material; desmistificou-se a ideia de que a utilização de materiais manipulativos fosse um fator para desordenar a aula e não pudessem servir à aprendizagem dos alunos; ao conceber algum material manipulativo é importante observar a facilidade de manuseio do material de forma a contribuir com a rápida construção de hipóteses (caso do jogo do quadrado mágico); percebeu-se a importância de abordar as raízes históricas de determinado conteúdo, tanto para a contextualização do conteúdo abordado, como para o entendimento de constrangimentos relacionados ao conteúdo; ficou evidente a necessidade da utilização de linguagem adequada para o bom entendimento da atividade.

Durante a oficina, percebeu-se que alguns materiais precisam ser melhorados do ponto de vista da linguagem; verificou-se que os alunos da sexta série apresentaram desenvolvimento satisfatório mesmo não tendo contato formal com os números negativos. Conclui-se que o uso de materiais manipulativos, de maneira geral, contribuiu para melhoria do entendimento das operações envolvidas.

Referências

DELVAL, Juan. **Introdução à prática do Método Clínico: descobrindo o pensamento das crianças**. Porto Alegre: Artmed, 2002

FAGUNDES, L. C. **Materiais manipulativos no ensino de matemática a crianças de 7 a 14 anos – período das operações concretas**, 1977. Palestra proferida no Seminário Nacional sobre recursos audiovisuais no ensino de de 1º grau. Departamento de Ensino Fundamental – MEC, Brasília, junho de 1977.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino de matemática**. Boletim da SBEM-SP, n. 7, p. 1-7, julho/agosto, 1990

MEGID, Maria Auxiliadora B. A. **Construindo matemática na sala de aula: uma experiência com números relativos**. In: FIORENTINI, Dario e MIORIM, Maria Ângela (orgs.). Por trás da porta que matemática acontece? Campinas, SP: FE/Unicamp – Cempem 2001

SÁ, P. F.; ANJOS, I. J. S. **Números negativos: uma trajetória histórica**. Trabalho apresentado no IX Seminário Nacional de história da matemática, Aracajú, 2011.

VERGNAUD, G. **A teoria dos Campos Conceituais**. In: Recherches em didactique des mathematiques, vol. 10/23, 133-170, Grenoble, Lá Pensée Sauvage editions, 1991.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**. Análise psicológica, v. 1, p 75-90, 1986.

COSTA, João F. S. **Oficinas de números positivos e negativos: possibilidades para aprender matemática**. Trabalho de conclusão da graduação. 2011 – Porto Alegre. Disponível em <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/37109/000819652.pdf?sequence=1> ultimo acesso em 09/05/17.