CONCEITO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO EM LIVROS DE CÁLCULO: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Gabriel de Oliveira Soares[1]

Helena Noronha Cury[2]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Esse trabalho apresenta resultados iniciais de uma pesquisa maior, intitulada "O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: Um estudo à luz dos três mundos da matemática", que tem por objetivo analisar o conceito de limite de uma função apresentado por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática. Metodologicamente, elencaram-se três livros presentes nas ementas de diversos cursos de cálculo distribuídos pelo país. Foi proposto um quadro de questões para realizar a análise dos capítulos de introdução ao conceito de limite e das características que um aluno que estuda pelos livros pode desenvolver ao resolver os exercícios propostos nesses capítulos. A análise possibilitou verificar que a maioria das questões objetiva o desenvolvimento de características dos Mundos Simbólico e Corporificado, com poucas exigências do Mundo Formal. Nesse sentido, essa análise pode contribuir para verificar se as imagens conceituais dos alunos têm origem nos conteúdos apresentados nos livros didáticos e nas possibilidades de trabalhar o conceito de limite com apelo aos Três Mundos da Matemática.

Palavras Chaves: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Limite de uma função. Três Mundos da Matemática.

INTRODUÇÃO

As dificuldades relativas à aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral são objetos de estudo frequentes em trabalhos da área de Educação Matemática (TALL, 1980; ARTIGUE, 1995; BARUFI, 1999; TRALDI JÚNIOR, 2006; VIEIRA, 2013; MÜLLER, 2015).

Podem ser indicados inúmeros fatores para a ocorrência dessas dificuldades, tais como as que são intrínsecas aos conceitos do Cálculo, que exigem uma maior abstração matemática dos estudantes; aos elevados índices de reprovação nas disciplinas desses componentes curriculares em cursos de graduação; à forma com que estes conceitos são apresentados em sala de aula; entre outros.

Entretanto, o conceito de limite de uma função, geralmente apresentado logo nos primeiros contatos dos estudantes com as disciplinas de Cálculo, tem sido

[1]Licenciado em Matemática. Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Centro Universitário Franciscano. gsoares8@outlook.com.

[2] Doutora em Educação. Centro Universitário Franciscano. curyhn@gmail.com.

elencado como chave no desenvolvimento da aprendizagem dessas disciplinas, sendo que muitos trabalhos voltam-se as questões relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem deste conceito (TALL, VINNER, 1981; REZENDE, 1994; NASCIMENTO, 2003; SANTOS, 2013).

Nesse sentido, dois fatores principais relacionados à aprendizagem do conceito de limite são elencados como elementos que dificultam esse processo: um relacionado a sua natureza epistemológica complexa, apontado por Cornu (1983); e outro relacionado aos processos mentais necessários para a aquisição desse conhecimento (ARTIGUE, 1995).

Zuchi e Gonçalves (2003, p.4) constatam que,

> As dificuldades começam a aparecer desde o conceito intuitivo de limite, pois trabalha-se com números infinitesimais, com os quais o estudante não está acostumado. Também dependendo da situação utilizada, com a noção do infinito, por exemplo, aproximar a área de uma figura por n retângulos. As primeiras barreiras já começam a surgir neste contexto. Ao formalizar o conceito de limites, os obstáculos aumentam, pois neste momento, o aluno se depara com a formalização da linguagem matemática, a qual muitas vezes ele não entende. A falta de uma base em matemática básica torna-se evidente, ao lidar com conceitos de funções modulares.

Dessa forma, levando em consideração a extrema relevância desse tema nas pesquisas no ensino do Cálculo Diferencial e Integral, reflete-se: Qual é a influência dos livros didáticos na aprendizagem do conceito de limite de uma função? Como, nos livros didáticos, é introduzido o conceito de limite? Que tipo de linguagem é mais utilizada ao apresentar esse conceito?

Essas questões são norteadoras desse trabalho, em que se pretende averiguar quais características dos Três Mundos da Matemática estão presentes na abordagem do conceito de limite de uma função em livros didáticos de cálculo.

A Teoria dos Três Mundos da Matemática é uma teoria de aprendizagem de matemática proposta por David Tall (2008; 2013) que surge em uma perspectiva de analisar como se desenvolve o pensamento matemático sob três aspectos: um relacionado às características físicas dos objetos matemáticos, a que o autor se refere como corporificado; o segundo relacionado às características matemáticas dos objetos em uma maneira escrita, que o autor chama de simbólico; e um terceiro, relacionado ao formalismo matemático dos conceitos, que o autor denomina de axiomático-formal.

Nesse sentido, ao analisar a introdução do conceito de limite de uma função nos livros didáticos de Cálculo, buscou-se perceber quais características desses “mundos da matemática” estavam mais presentes na abordagem das bibliografias analisadas.

É valido ressaltar que este trabalho faz parte dos resultados iniciais de uma pesquisa maior, intitulada “O conceito de limite na formação inicial de professores de matemática: Um estudo à luz dos três mundos da matemática”, que tem por objetivo analisar o conceito de limite de uma função apresentado por estudantes de dois cursos de Licenciatura em Matemática, bem como suas estratégias de resolução de questões, à luz da Teoria dos Três Mundos da Matemática.

Nessa busca, pretende-se verificar se as características que os alunos apresentam em suas conceituações de limite de uma função se assemelham com as indicadas nos livros didáticos que os professores utilizam como referência para o trabalho das disciplinas de Cálculo I em sala de aula, identificando possíveis similaridades.

A TEORIA DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

“Como é que os seres humanos podem aprender a pensar matematicamente de uma maneira que é muito mais sutil do que as possibilidades disponíveis para outras espécies?” (TALL, 2013, p. 3). Influenciado por esta questão e por estudos como os de Jean Piaget, Jerome Bruner, Efraim Fischbein e Pierre Van Hiele, que descrevem modelos de como ocorre a aprendizagem da matemática, David Tall propõe a Teoria dos Três Mundos da Matemática, que tem por objetivo explicar como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático s, não pautado apenas no simbolismo, nem na visualização, mas em um conjunto de características que levem a um pensamento matemático avançado.

A teoria se difere de outras já criadas, levando em consideração que o autor acredita que novos níveis de pensamento matemático não são necessariamente fundados nas prévias experiências dos estudantes. Algumas experiências anteriores podem auxiliar no desenvolvimento de outras, entretanto, algumas acabam levando os estudantes a terem ideias erradas sobre os conceitos matemáticos e interferem na aprendizagem de novos conteúdos (TALL, 2013).

Essas experiências prévias, aliás, são um dos elementos-chave do quadro teórico proposto pelo autor, chamadas de *met-before*, ou já-encontrados. Como dito anteriormente, elas acabam influenciando nas novas experiências em matemática, nos *met-after*, ou a-encontrar.

Tall (2008, 2013) propõe, assim, a Teoria dos Três Mundos da Matemática, baseada em uma fundação sensório-motor-linguística, em que o reconhecimento de padrões, semelhanças e diferenças, a repetição de sequências de ações até que se tornem automáticas e a linguagem para descrever e aperfeiçoar a maneira como pensamos sobre as coisas, são essenciais no desenvolvimento do pensamento matemático.

Dessa forma, essas três características, comuns a todos os seres humanos, são fundamentais no desenvolvimento dos Três Mundos da Matemática, que são descritos de acordo com Tall (2013, p. 133):

> a) Um mundo (conceitual) corporificado, construído nas percepções e ações humanas, desenvolvendo imagens mentais verbalizadas de maneiras cada vez mais sofisticadas, para tornar-se perfeitos entes mentais na nossa imaginação;
> b) Um mundo (operacional) simbólico, desenvolvida através da transposição das ações corporificadas do homem em procedimentos simbólicos de manipulação e cálculo, que podem ser comprimidos em proceitos[3] para permitir um pensamento operacional flexível;
> c) Um mundo (axiomático) formal, construindo conhecimentos formais em sistemas axiomáticos especificados por definições teóricas, cujas propriedades são deduzidas por provas matemáticas.

A articulação entre esses mundos se dá conforme a Figura 1:

Figura 1 – Articulação entre os Três Mundos da Matemática

FORMAL

Matemática Formal	Formal Axiomático		
Matemática Teórica	Formal Corporificado	Provas combinando corporificação e simbolismo	Formal Simbólico
Matemática Prática	Espaço e Forma	Simbólico Corporificado	Aritmética generalizada Aritmética Números
			SIMBÓLICO

CORPORIFICADO

Fonte: Adaptação e tradução de TALL, 2013, p. 198

[3] Gray e Tall (1994) criaram a palavra “proceito” para indicar a dualidade entre processo e conceito.

Portanto, ao averiguar as características dos mundos da matemática presentes nos capítulos de introdução ao conceito de limite nos livros didáticos de Matemática, pretende-se compreender que caminhos um aluno que estuda por esse livro pode desenvolver e que aspectos teóricos poderiam ser melhor trabalhados em sala de aula para que o aluno consiga estabelecer um pensamento matemático mais avançado.

METODOLOGIA

A análise dos capítulos dos livros didáticos ocorreu em duas etapas: uma primeira, dedicada à análise da introdução e desenvolvimento do conceito de limite, em busca de compreender como se dá esta abordagem, quais "já-encontrados" fazem parte e são necessários para a compreensão destes conceitos e quais características dos Três Mundos da Matemática são evidenciadas a um aluno que estuda por esse capitulo; e uma segunda, dedicada a analisar os exercícios propostos nos livros, a fim de perceber que estratégias o aluno precisa desenvolver ao resolver esta questão e como estas estão relacionadas aos Três Mundos da Matemática.

Para tal análise, foram propostas as questões apresentadas no Quadro 1, baseadas em Mação (2014).

Quadro 1: Questões propostas para a análise dos livros didáticos.

Questões propostas para a análise do conceito	***Questões propostas para a análise dos exercícios***
• Como é feita a introdução do conceito de limite? • Como é desenvolvido o conceito de limite através dos exemplos apresentados? • Quais "já-encontrados" são necessários e utilizados para a compreensão do conceito de limite? • Quais características da Teoria dos Três Mundos da Matemática estão evidenciadas na abordagem do livro e que o aluno poderá desenvolver ao estudar por ele?	• Qual é o objetivo do exercício? • Quais "já-encontrados" são necessários e utilizados para a resolução deste exercício? •As estratégias de resolução do exercício possibilitam o desenvolvimento das características de quais mundos da Teoria dos Três Mundos da Matemática?

Fonte: Baseadas em Mação (2014, p 53-54).

Além disso, é importante destacar quais bibliografias são analisadas nesse trabalho. Levando em consideração o desenvolvimento do projeto de pesquisa maior, em que este trabalho está incluído, foram selecionadas três bibliografias básicas, apresentadas no Quadro 2, que estão presentes nas ementas das disciplinas de Cálculo I de cursos de graduação brasileiros, da área de Ciências Exatas.

Quadro 2: Bibliografias analisadas no trabalho

Bibliografias analisadas
• ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. Vol.1. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. • GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo. Vol.1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. • LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. Vol 1. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

Fonte: dados da pesquisa.

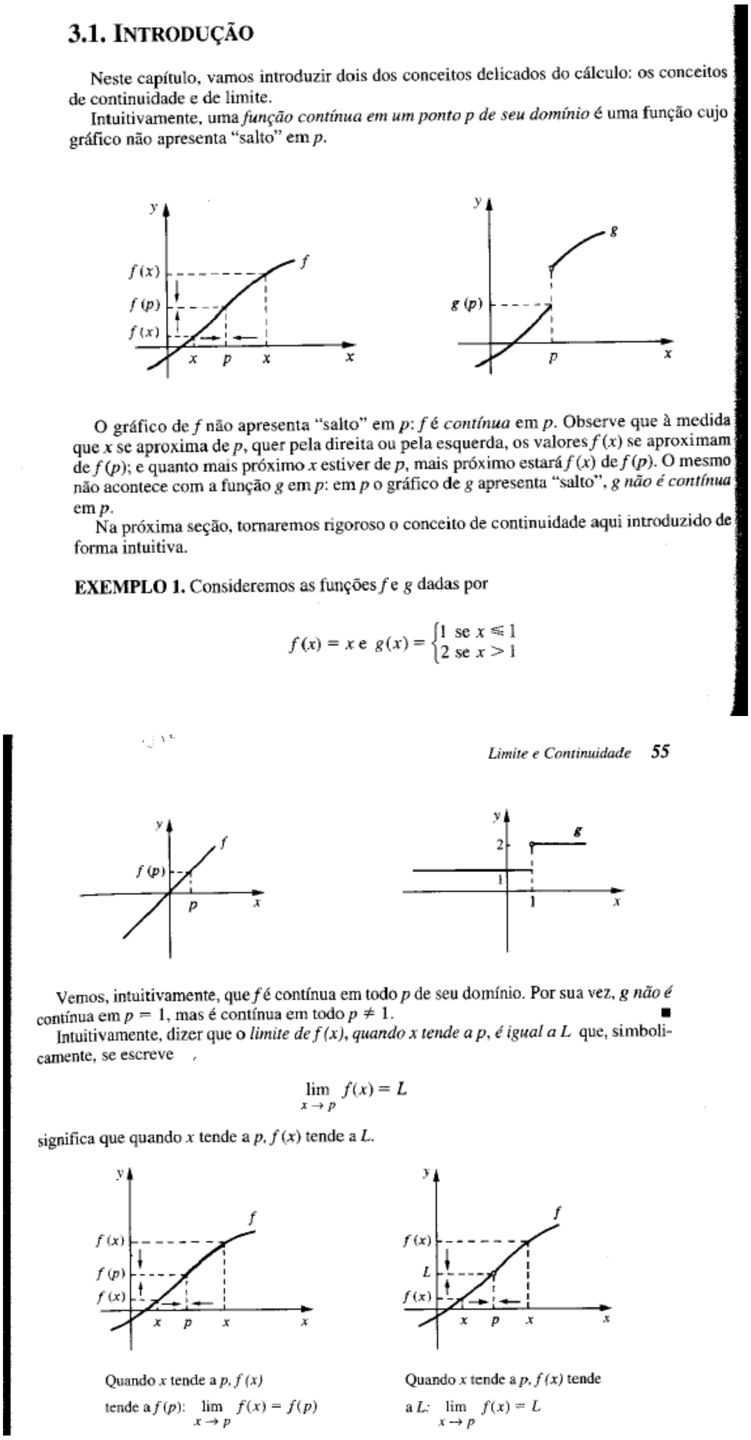
Dessa forma, crê-se que este apanhado conseguirá dar uma noção geral de como se desenvolve a aprendizagem do conceito de limite através do livro estudado.

ANÁLISE DAS BIBLIOGRAFIAS CONSULTADAS

Para analisar cada um dos livros, inicialmente são destacadas figuras, retiradas dos respectivos volumes, que apresentam alguma característica dos Mundos da Matemática.

Análise do livro de Guidorizzi (2010)

Figura 2 – Introdução do conceito de Limite no livro de Guidorizzi (2010)



3.1. Introdução

Neste capítulo, vamos introduzir dois dos conceitos delicados do cálculo: os conceitos de continuidade e de limite.

Intuitivamente, uma *função contínua em um ponto p de seu domínio* é uma função cujo gráfico não apresenta "salto" em p.

O gráfico de f não apresenta "salto" em p: f é *contínua* em p. Observe que à medida que x se aproxima de p, quer pela direita ou pela esquerda, os valores $f(x)$ se aproximam de $f(p)$; e quanto mais próximo x estiver de p, mais próximo estará $f(x)$ de $f(p)$. O mesmo não acontece com a função g em p: em p o gráfico de g apresenta "salto", *g não é contínua* em p.

Na próxima seção, tornaremos rigoroso o conceito de continuidade aqui introduzido de forma intuitiva.

EXEMPLO 1. Consideremos as funções f e g dadas por

$$f(x) = x \text{ e } g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2 \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Limite e Continuidade **55**

Vemos, intuitivamente, que f é contínua em todo p de seu domínio. Por sua vez, *g não é* contínua em $p = 1$, mas é contínua em todo $p \neq 1$. ■

Intuitivamente, dizer que o *limite de f (x), quando x tende a p, é igual a L* que, simbolicamente, se escreve

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

significa que quando x tende a p, $f(x)$ tende a L.

Quando x tende a p, $f(x)$ tende a $f(p)$: $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

Quando x tende a p, $f(x)$ tende a L: $\lim_{x \to p} f(x) = L$

Fonte: GUIDORIZZI, 2010, p. 54-55

Ao analisar a introdução do conceito de limite, é possível verificar que este já está intrinsecamente ligado ao conceito de continuidade, que é desenvolvido no desenrolar do capítulo, conforme a Figura 2. Percebe-se também que a introdução do conceito de limite é feita de maneira intuitiva, relacionando a visualização gráfica através da aproximação em torno do limite da função.

Quantos aos já-encontrados necessários para o entendimento do conceito de limite, estes são necessários para a compreensão do conceito de função, especialmente da sua notação. Ainda, o livro apresenta, na Figura 2, a noção de continuidade da função, que é, nesse processo, um "já-encontrado" necessário para compreender o conceito de limite. Entretanto, o livro aborda a continuidade da função de maneira mais clara após o trabalho com as noções intuitivas de limite, caracterizando este conceito como um "a-encontrar" em um momento *a posteriori*.

Sobre as características dos Mundos da Matemática que um aluno que estuda por esse livro pode desenvolver, destacam-se as ligadas aos Mundos Conceitual Corporificado e Operacional Simbólico, levando em conta que o autor apresenta a construção gráfica das funções e especialmente, a noção do limite para dois casos; e ainda, apresenta a notação do limite da função $f(x)$ como sendo $\lim_{x \to p} f(x) = L$.

Os exemplos que são apresentados após esse primeiro contato, antes da resolução dos exercícios, também apresentam características que se relacionam aos Mundo Conceitual Corporificado e Mundo Proceitual Simbólico, ao trabalhar com interpretações e análises gráficas e efetuar as operações necessárias para o cálculo do limite. Nessa bibliografia, nenhum aspecto do Mundo Axiomático Formal é ressaltado.

Em se tratando dos exercícios, percebe-se que três dos quatro exercícios trabalham com o desenvolvimento do Mundo Proceitual Simbólico, dos quais dois são vistos na Figura 3.

Figura 3 – Exercícios 1 e 2, propostos no capítulo de introdução ao conceito de limite no livro de Guidorizzi (2010)

1. Esboce o gráfico da função dada e, utilizando a idéia intuitiva de função contínua, determine os pontos em que a função deverá ser contínua.

a) $f(x) = 2$ *b)* $f(x) = x + 1$

c) $f(x) = x^2$ *d)* $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{se } |x| \geq 1 \\ 2 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$ *f)* $f(x) = x^2 + 2$

2. Utilizando a idéia intuitiva de limite, calcule

a) $\lim_{x \to 1} (x + 2)$ *b)* $\lim_{x \to 1} (2x + 1)$

c) $\lim_{x \to 0} (3x + 1)$ *d)* $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)$

e) $\lim_{x \to 1} \sqrt{x}$ *f)* $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x}{x + 3}$

g) $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x}$ *h)* $\lim_{x \to 0} (\sqrt{x} + x)$

Fonte: GUIDORIZZI, 2010, p. 59

Percebe-se que objetivo do exercício é calcular, através da noção intuitiva, o valor do limite de cada uma das funções nos pontos indicados. Para sua resolução, são necessários os “já-encontrados” acerca do trato com as equações e fatoração polinomial, além do uso de fatorações nas funções para chegar ao resultado final.

Além disso, um aluno que resolve esta questão desenvolve apenas Mundo Proceitual Simbólico, ao calcular os limites nos pontos indicados. Aliás, apenas um exercício apresentado neste livro traz aspectos de desenvolvimento do Mundo Conceitual Corporificado, sendo que todos os outros apenas trabalham no Mundo Proceitual Simbólico.

Análise do livro de Anton; Bivens e Davis (2007)

Figura 4 – Introdução ao conceito de limite do livro de Anton; Bivens e Davis (2007)

LIMITES

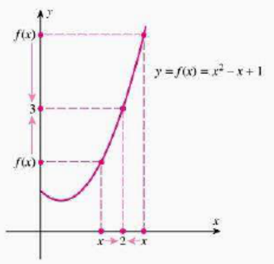
Agora que já vimos como os limites aparecem em várias situações, vamos nos concentrar no conceito de limite.

O uso mais básico de limites é descrever como uma função se comporta quando a variável independente tende a um dado valor. Por exemplo, examinemos o comportamento da função

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

quando x está cada vez mais próximo de 2. Fica evidente, a partir do gráfico e da tabela na Figura 2.1.8, que os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de 3 à medida que escolhermos os valores de x cada vez mais próximos de 2, por qualquer um dos lados, esquerdo ou direito. Descrevemos isso dizendo que o “limite de $x^2 - x + 1$ é 3 quando x tende a 2 por qualquer um dos lados”, e escrevemos

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3 \qquad (5)$$



x	1,0	1,5	1,9	1,95	1,99	1,995	1,999	2	2,001	2,005	2,01	2,05	2,1	2,5	3,0
$f(x)$	1,000000	1,750000	2,710000	2,852500	2,970100	2,985025	2,997001		3,003001	3,015025	3,030100	3,152500	3,310000	4,750000	7,000000

Lado esquerdo → ← Lado direito

Figura 2.1.8

Isso nos leva à idéia geral seguinte.

Já que estamos exigindo que x seja diferente de a em (6), o valor de f em a não tem relação alguma com o limite L, tampouco se f está ou não definida em a. O limite descreve o comportamento de f perto de a, mas não em a.

2.1.1 LIMITES (DE UM PONTO DE VISTA INFORMAL) Se os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto queiramos de L, desde que tomemos os valores de x suficientemente próximos de a (mas não iguais a a), então escreveremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad (6)$$

que deve ser lido como “o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L”, ou “$f(x)$ tende a L quando x tende a a”. A expressão (6) também pode ser escrita como

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a \qquad (7)$$

Fonte: ANTON; BIVENS; DAVIS,2007, p. 104

Assim como no primeiro livro analisado, o livro de Anton, Bivens e Davis aborda a introdução do conceito de limite por meio da resolução de um exemplo. Entretanto, traz alguns elementos a mais, que não foram vistos na abordagem do livro de Guidorizzi.

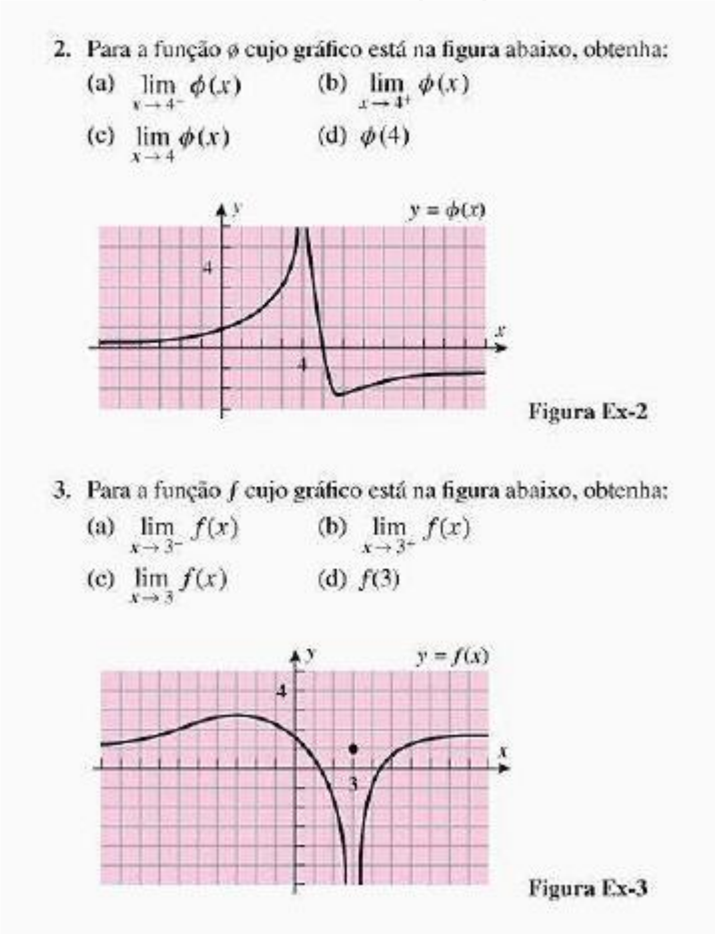
A introdução do conceito de limite é feita por meio do desenvolvimento de um exemplo específico, trazendo aspectos visuais (gráfico e tabela) para a exemplificação da aproximação do valor da função no ponto escolhido.

Em se tratando dos já-encontrados, assim como no livro anterior, é necessária a compreensão do conceito de função, especialmente da notação e cálculo do valor da função em um determinado ponto. Também é necessário que o aluno consiga relacionar o comportamento da função a partir da visualização do seu gráfico e da tabela, sendo esperado, então, que seja capaz de compreender estas duas maneiras diferentes de representar a função.

Entretanto, o aluno que estuda por este livro poderá desenvolver características dos Mundos Conceitual Corporificado, Proceitual Simbólico e ainda, algumas características iniciais do Mundo Axiomático Formal, levando em consideração que o livro apresenta a construção gráfica e tabular da função, compreendendo que, quando o valor da função se aproxima de $x = 2,$ o limite vai se aproximando de $y = 3.$; faz a transição da ideia do que é o limite, de uma linguagem natural para a simbólica, como visto no trecho "descrevemos isso dizendo que o ´limite de $x^2 - x + 1$ é 3 quando x tende a 2 por qualquer um dos lados` e escrevemos $\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 1) = 3$" (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 104); e ainda, embora não apresente nenhuma característica com extremo rigor matemático para definir o limite, o livro já traz no primeiro texto uma tentativa de generalização desta ideia, como visto na Figura 4.

Em relação aos exercícios, os autores propõem 25 questões, sendo que a metade delas prioriza a construção gráfica da função e a obtenção do limite através desse gráfico. Por exemplo, a Figura 5 traz os exercícios de números 2 e 3 para esta análise.

Figura 5 – Exercícios 2 e 3 do capítulo de introdução ao conceito de limite do livro de Anton; Bivens e Davis (2007).



2. Para a função ϕ cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

(a) $\lim_{x \to 4^-} \phi(x)$ (b) $\lim_{x \to 4^+} \phi(x)$

(c) $\lim_{x \to 4} \phi(x)$ (d) $\phi(4)$

Figura Ex-2

3. Para a função f cujo gráfico está na figura abaixo, obtenha:

(a) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (d) $f(3)$

Figura Ex-3

Fonte: ANTON; BIVENS; DAVIS, 2007, p. 111

Exercícios como este desenvolvem características do Mundo Conceitual Corporificado, ao objetivar a visualização do valor do limite no gráfico nos pontos determinados. Já os exercícios de 13 a 25 trabalham com o desenvolvimento de características dos mundos Conceitual Corporificado e Proceitual Simbólico.

Análise do livro de Leithold (1994)

Figura 6 – Introdução do conceito de limite no livro de Leithold (1994)

2.1 O LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Para iniciar nosso estudo de limites, vamos considerar uma dada função:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} \qquad (1)$$

Observe que $f(x)$ existe para todo x, exceto $x = 1$. Investigaremos os valores da função quando x está próximo de 1, porém excluindo o 1. A ilustração seguinte mostra como a função definida por (1) pode surgir e por que estaríamos interessados em considerar tais valores funcionais.

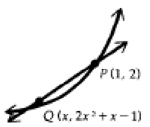


FIGURA 1

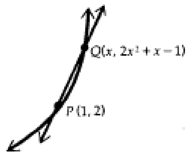


FIGURA 2

► **ILUSTRAÇÃO 1** O ponto $P(1, 2)$ está sobre a curva de equação

$$y = 2x^2 + x - 1$$

Seja $Q(x, 2x^2 + x - 1)$ um outro ponto sobre essa curva, distinto de P. Veja as Figuras 1 e 2, cada uma mostrando parte do gráfico da equação e a reta secante passando pelos pontos P e Q, onde Q está próximo de P. Na Figura 1, a coordenada x de Q é menor do que 1 e na Figura 2 ela é maior do que 1. Suponhamos que $f(x)$ seja a inclinação da reta PQ. Então

$$f(x) = \frac{(2x^2 + x - 1) - 2}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

que é a Igualdade (1). Além disso, $x \neq 1$, pois P e Q são pontos distintos. À medida que x fica cada vez mais próximo de 1, os valores de $f(x)$ tornam-se cada vez mais próximos do valor que iremos definir na Secção 3.1 como a inclinação da reta tangente à curva no ponto P. ◄

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

Para a função f definida por (1), vamos atribuir a x os valores 0, 0,25, 0,50, 0,75, 0,9, 0,99, 0,999, 0,9999, e assim por diante. Estamos tomando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém menores do que 1; em outras palavras, a variável x está aproximando-se de 1 através de valores menores do que 1. Isso está ilustrado na Tabela 1. Por outro lado, vamos deixar que a variável x aproxime-se de 1, através de valores maiores do que 1, isto é, vamos atribuir a x os valores 2, 1,75, 1,5, 1,25, 1,1, 1,01, 1,001, 1,0001, 1,00001, e assim por diante. Os valores funcionais desses números também são obtidos com uma calculadora e aparecem na Tabela 2.

Observe, de ambas as tabelas, que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 5 e quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo de 5 estará $f(x)$. Por exemplo, na Tabela 1, quando $x = 0,9$, $f(x) = 4,8$, isto é, quando x for 0,1 inferior a 1, $f(x)$ será 0,2 inferior a 5. Quando $x = 0,999$, $f(x) = 4,998$, isto é, quando x for 0,001 inferior a

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

1, $f(x)$ será 0,002 inferior a 5. Mais ainda, quando $x = 0,9999$, $f(x) = 0,49998$, isto é, quando x for 0,0001 inferior a 1, $f(x)$ será 0,0002 inferior a 5.

A Tabela 2 mostra que quando $x = 1,1$, $f(x) = 5,2$, isto é, quando x for 0,1 superior a 1, $f(x)$ será 0,2 superior a 5. Quando $x = 1,001$, $f(x) = 5,002$, isto é, quando x for 0,001 superior a 1, $f(x)$ será 0,002 superior a 5. Quando $x = 1,0001$, $f(x) = 5,0002$, isto é, quando x for 0,0001 superior a 1, $f(x)$ será 0,0002 superior a 5.

Logo, vemos que quando x difere de 1 de $\pm$ 0,001 (isto é, $x = 0,999$ ou $x = 1,001$), $f(x)$ difere de 5 de $\pm$ 0,002, isto é, $f(x) = 4,998$ ou $f(x) = 5,002$). E quando x difere de 1 de $\pm$ 0,0001, $f(x)$ difere de 5 de $\pm$ 0,0002.

Agora, analisando a situação de outra maneira, consideraremos os valores de $f(x)$ primeiro. Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Outra maneira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $|f(x) - 5|$ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que $f(x)$ nunca assume o valor 5.

Uma maneira mais precisa de notar isso é através do uso de dois símbolos para essas pequenas diferenças. Os símbolos comumente usados são as letras gregas ϵ (epsilon) e δ (delta). Assim, enunciamos que para todo número ϵ dado positivo existe um número δ escolhido apropriadamente, tal que se $|x - 1|$ for menor do que δ e $|x - 1| \neq 0$ (isto é, $x \neq 1$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ϵ. É importante observar que o tamanho de δ depende do de ϵ. Ainda outra maneira de expressar isso é: dado um número ϵ positivo qualquer, podemos tornar $|f(x) - 5| < \epsilon$ tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 1| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < \epsilon \qquad (2)$$

Observe que o numerador da fração em (1) pode ser fatorado de forma que

$$f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1}$$

Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$ para obter

$$f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1 \qquad (3)$$

A fórmula (3), com a estipulação de que $x \neq 1$, é tão adequada quanto (1) para uma definição de $f(x)$. De (3) e das duas tabelas, note que se $|x - 1| < 0,1$, então $|f(x) - 5| < 0,2$. Assim, dado $\epsilon = 0,2$, tomamos $\delta = 0,1$ e afirmamos:

$$\text{se} \quad 0 < |x - 1| < 0,1 \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0,2$$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}2$ e $\delta = 0{,}1$.

Também, se $|x - 1| < 0{,}001$, então $|f(x) - 5| < 0{,}002$. Logo, se $\epsilon = 0{,}002$, tomamos $\delta = 0{,}001$ e afirmamos que

se $0 < |x - 1| < 0{,}001$ então $|f(x) - 5| < 0{,}002$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}002$ e $\delta = 0{,}001$.

Da mesma forma, se $\epsilon = 0{,}0002$, tomamos $\delta = 0{,}0001$ e afirmamos que

se $0 < |x - 1| < 0{,}0001$ então $|f(x) - 5| < 0{,}0002$

Essa é a afirmativa (2), com $\epsilon = 0{,}0002$ e $\delta = 0{,}0001$.

Poderíamos prosseguir e atribuir a ϵ qualquer valor positivo, a fim de encontrar um valor adequado para δ, de tal forma que se $|x - 1|$ for menor do que

58 Limites e Continuidade

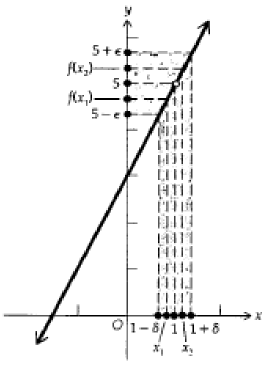


FIGURA 3

δ e $x \neq 1$ (ou $|x - 1| > 0$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ϵ. Agora, como para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$, então $|f(x) - 5| < \epsilon$, afirmamos que o limite de $f(x)$ quando x tende a 1 é igual a 5 ou, em símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

Observe que nessa equação temos um novo uso do símbolo "igual". Aqui, $f(x)$ não assume o valor 5 para nenhum valor de x. O símbolo "igual" é apropriado, pois o primeiro membro está escrito como $\lim_{x \to 1} f(x)$.

De (3) é evidente que $f(x)$ pode se tornar tão próximo de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1 e essa propriedade da função f não depende do fato de f estar definida em $x = 1$. Esse fato permite-nos distinguir entre $\lim_{x \to 1} f(x)$ e o valor da função 1, isto é, $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, mas $f(1)$ não existe. Conseqüentemente, na afirmativa (2), $0 < |x - 1|$, pois estamos interessados somente nos valores de $f(x)$ para x próximo de 1, mas não para $x = 1$.

Vamos ver qual o significado geométrico disso tudo para a função definida em (1) ou (3). A Figura 3 ilustra o significado geométrico de ϵ e δ. Observe que se x (no eixo horizontal) estiver entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$, então $f(x)$ (no eixo vertical) estará entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, ou

se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 5| < \epsilon$

Outra maneira de estabelecer isso é que $f(x)$ (no eixo vertical) pode ser restrita a ficar entre $5 - \epsilon$ e $5 + \epsilon$, se restringirmos x (no eixo horizontal) a ficar entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$.

Note que os valores de ϵ são escolhidos arbitrariamente e podem ser tão pequenos quanto desejarmos, e que o valor de δ depende do ϵ escolhido. Devemos ressaltar que quanto menor for o valor de ϵ, menor será o valor correspondente de δ.

Resumindo esse exemplo, afirmamos que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, pois para qualquer $\epsilon > 0$, não importa o quão pequeno ele seja, existe um $\delta > 0$, tal que

se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 5| < \epsilon$

Fonte: LEITHOLD, 1994, p. 56-58

A introdução do conceito de limite é feita através do desenvolvimento de um exemplo específico, trazendo a obtenção deste limite de forma intuitiva, priorizando o trato com aspectos visuais (gráfico e tabela), para a exemplificação da aproximação do valor da função no ponto escolhido, e também da inserção das letras gregas ε e δ para denominar os infinitésimos.

O aluno que estuda por este livro poderá desenvolver características dos Mundos Conceitual Corporificado, Proceitual Simbólico e ainda, algumas características do Mundo Axiomático Formal:

Mundo Conceitual Corporificado – ao apresentar a construção gráfica e tabular da função, compreendendo que, quando o valor da função aproxima-se de

$x = 1$, o valor do limite vai se aproximando de $y = 5$. Além disso, já traz uma ideia intuitiva de limites laterais, com a aproximação dos valores pela esquerda e pela direita.

Mundo Proceitual Simbólico – o trato com o Mundo Proceitual Simbólico é pautado especificamente na resolução das questões e na inserção da notação de limite.

Mundo Axiomático Formal – introduz o trabalho com os infinitésimos ε e δ, as discussões acerca do módulo das funções e as distâncias, que se pode perceber como uma introdução à própria definição formal de limite.

O próximo passo do livro é apresentar a definição formal do conceito de limite, como vemos na Figura 7.

Figura 7 – Definição formal do conceito de limite do livro de Leithold (1994)

2.1.1 DEFINIÇÃO Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente no próprio número a. O **limite de $f(x)$ quando x tende a a será L**, escrito como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se a seguinte afirmativa for verdadeira:

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \text{ então } |f(x) - L| < \epsilon \qquad \textbf{(4)}$$

Fonte: LEITHOLD, 1994, p. 58

Nesse sentido, desenvolvem-se mais características do Mundo Axiomático Formal, ao apresentar, logo no início, a definição formal do conceito. Além do que, o desenvolvimento dos exemplos já traz aspectos formais para sua resolução. Por exemplo, a Figura 8 mostra o primeiro exemplo resolvido trabalhado no livro.

Figura 8 – Primeiro exemplo resolvido acerca do conceito de limite no livro de Leithold (1994)

FIGURA 5

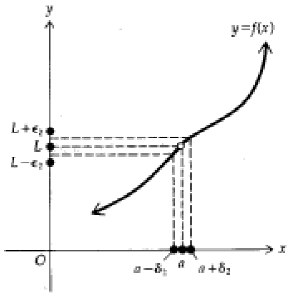


FIGURA 6

EXEMPLO 1 Seja f a função definida por

$$f(x) = 4x - 7$$

e suponha que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5$$

(a) Usando uma figura similar à Figura 3, para $\epsilon = 0{,}01$, determine um $\delta > 0$, tal que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

(b) Usando as propriedades das desigualdades, determine $\delta > 0$, tal que a afirmativa na parte (a) seja verdadeira.

Solução

(a) Veja a Figura 7 e observe que os valores funcionais aumentam à medida que x cresce. Assim, a figura indica que precisamos de um valor de x_1, tal que $f(x_1) = 4{,}99$ e um valor de x_2, tal que $f(x_2) = 5{,}01$, isto é, precisamos de x_1 e x_2 tais que

$$4x_1 - 7 = 4{,}99 \qquad 4x_2 - 7 = 5{,}01$$

$$x_1 = \frac{11{,}99}{4} \qquad x_2 = \frac{12{,}01}{4}$$

$$x_1 = 2{,}9975 \qquad x_2 = 3{,}0025$$

60 Limites e Continuidade

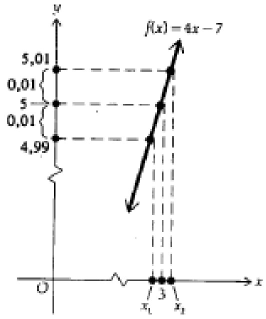


FIGURA 7

Como $3 - 2{,}9975 = 0{,}0025$ e $3{,}0025 - 3 = 0{,}0025$, escolhemos $\delta = 0{,}0025$ de tal forma que que temos a afirmativa

$$\text{se } 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

(b) Como $f(x) = 4x - 7$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 5| &= |(4x - 7) - 5| \\ &= |4x - 12| \\ &= 4|x - 3| \end{aligned}$$

Queremos determinar um $\delta > 0$, tal que

$$\begin{aligned} & \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } 4|x - 3| < 0{,}01 \\ \Leftrightarrow\ & \text{se } 0 < |x - 3| < \delta \text{ então } |x - 3| < 0{,}0025 \end{aligned}$$

Essa afirmativa indica que uma escolha adequada para δ é 0,0025. Então, temos o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} & 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \\ \Rightarrow\ & 4|x - 3| < 4(0{,}0025) \\ \Rightarrow\ & |4x - 12| < 0{,}01 \\ \Rightarrow\ & |(4x - 7) - 5| < 0{,}01 \\ \Rightarrow\ & |f(x) - 5| < 0{,}01 \end{aligned}$$

Mostramos que

$$\text{se } 0 < |x - 3| < 0{,}0025 \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01 \qquad (5)$$

Nesse exemplo, qualquer número positivo menor do que 0,0025 pode ser usado em lugar de 0,0025 como sendo o δ requerido. Observe esse fato na Figura 7. Além disso, se $0 < \gamma < 0{,}0025$ e a afirmativa (5) for verdadeira, temos

$$\text{se } 0 < |x - 3| < \gamma \text{ então } |f(x) - 5| < 0{,}01$$

pois todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x - 3| < \gamma$ satisfará também a desigualdade $0 < |x - 3| < 0{,}0025$.

Fonte: LEITHOLD, 1994, p. 59-60

O exemplo da Figura 8 apresenta o trabalho com a noção de limite, a partir da interpretação gráfica, trazendo aspectos referentes aos infinitésimos e o cálculo de valores de ε e δ para o valor de limite estabelecido. E, por este exemplo, o aluno conseguirá desenvolver características do Mundo Proceitual Simbólico e do

Axiomático Formal, relacionando as construções com os valores de $\varepsilon\, e\, \delta$ e desenvolvendo aspectos mais formais do que a repetição do algoritmo do cálculo de limite.

Em relação aos exercícios, o autor propõe 44 questões, algumas das quais são analisadas nas páginas seguintes. Os exercícios de 1 a 22 trabalham da mesma maneira que o Exemplo 1 apresentado na Figura 8. O objetivo desses é calcular o valor de δ para cada um dos limites propostos, além de ser necessário argumentar sobre a descoberta deste valor. Um aluno que resolve esses exercícios pode desenvolver características do Mundo Proceitual Simbólico e do Axiomático Formal, relacionando as construções com os valores de $\varepsilon\, e\, \delta$ e desenvolvendo aspectos mais formais do que a aplicação do algoritmo para o calculo do limite.

Já os exercícios de 23 a 44 priorizam a demonstração do valor do limite através da demonstração formal. Os exercícios 43 e 44 também propõem a demonstração para valores quaisquer, generalizando o $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, se a for qualquer número positivo ou negativo.

Nesse sentido, ao realizar essas tarefas, o aluno conseguirá desenvolver características do Mundo Proceitual Simbólico e Axiomático Formal, ao se utilizar das ferramentas matemáticas com o objetivo de demonstrar o valor do limite através da definição.

CONSIDERAÇÕES SOBRE A ANÁLISE DOS LIVROS

Realizada a etapa da análise inicial dos livros didáticos, é relevante para esse trabalho discutir alguns aspectos percebidos na introdução do conceito de limite: dois dos três livros analisados priorizam, tanto na abordagem do conceito como dos exercícios, o desenvolvimento de características dos Mundos Proceitual Simbólico e Conceitual Corporificado.

Percebeu-se que, do total dos exercícios presentes no livro de Guidorizzi, 75% desses tinha por objetivo calcular o limite da função no ponto dado, sendo que apenas um dos exercícios trazia características do Mundo Conceitual Corporificado. Já em se tratando do livro de Anton, Bivens e Davis, a porcentagem de questões que trabalha com o Mundo Proceitual Simbólico cai para 52%, sendo que se destaca um grande trabalho com as características do Mundo Conceitual Corporificado (92%).

Ainda visualizou-se que, numa grande maioria dos exercícios analisados, há a intenção de reproduzir mecanicamente o algoritmo de resolução de determinado limite. Neste sentido, pergunta-se: qual será a influência desta abordagem na compreensão dos conceitos pelos alunos? Será que os alunos trazem características do Mundo Axiomático Formal em sua apropriação do conceito ou apenas trabalham com o Mundo Operacional Simbólico, desenvolvendo a resolução de exercícios simples, pautados na mera reprodução do modelo de resolução?

Questões como estas são pertinentes neste estudo, levando em consideração que se pretende compreender como as propostas apresentadas nos livros didáticos influenciam na aprendizagem dos conceitos do Cálculo Diferencial e Integral. Neste sentido, um aprofundamento nessas discussões pode contribuir para que a disciplina de Cálculo seja mais eficaz nos cursos superiores, gerando um melhor aproveitamento por parte dos alunos e professores, possibilitando um ambiente onde a aprendizagem é o principal foco.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

ARTIGUE, M. La enseñanza de los princípios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M. et. al. **Ingeniería Didáctica em Educación Matemática**. Bogotá: Grupo Editorial IberoAmérica, 1995. p. 97-140.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

CORNU, Bernard. **Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles**. 1983. Tese (Doutorado em Matemática) - Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, 1983

GRAY, E. M.; TALL, D. Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, v. 26, n. 2, p. 115-141, 1994.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2010.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

MAÇÃO, D. P. **Uma proposta de ensino para o conceito de derivada.** 2014. 149f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

MÜLLER, T. J. **Objetos de aprendizagem multimodais e ensino de cálculo**: uma proposta baseada em análise de erros. 2015. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

NASCIMENTO, J. C. **O conceito de limite em cálculo:** Obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática. 2003. 337f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003.

REZENDE, W. M. **Uma análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite**. 1994. Dissertação. (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade de Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1994.

SANTOS, M. B. S. **Um olhar para o conceito de limite**: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu aprendizado. 2013. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

TALL, D. Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. In: Proceedings of the Fourth International Conference of the Psychology of Mathematical Education, 4., 1980, Berkeley, California. **Proceedings…** Berkeley: 1980. p. 170-176.

TALL, D. The Transition to Formal Thinking in Mathematics. **Mathematics Education Research Journal,** v. 20, n. 2, p. 5-24, 2008.

TALL, D. **How humans learn to think mathematically.** Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematical with particular reference in Limits and Continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

TRALDI JÚNIOR, A. **Formação de formadores de professores de matemática: identificação de possibilidades e limites da estratégia de organização de grupos colaborativos.** 2006. 188f. Tese (Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

VIEIRA, A. F. **Ensino do Cálculo Diferencial e Integral**: das técnicas ao *humans-with-media.* 2013. 203f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.

ZUCHI, I; GONÇALVES, M. B. Investigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de limite. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., , 2003, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: ABENGE, 2003. p. 2-11.