A COMPLEMENTARIDADE NA CONSTRUÇÃO DO NÚMERO

Emerson Bastos Lomasso[1]

Sonia Barbosa Camargo Igliori[2]

TEMÁTICA DO ARTIGO

Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi investigar como acontece o debate a respeito da construção do conceito do número assim como, a relação dessa conceitualização com a assimilação desse objeto pela criança. Foi desenvolvida uma pesquisa teórica abordando questões epistemológicas sobre o número e também, a respeito da construção desse conhecimento pela criança. A discussão baseia-se, essencialmente, na ideia de complementaridade – particularizando o ponto de vista de Michael Friedrich Otte - e na teoria piagetiana. Os apontamentos de Otte e a construção do conhecimento de Piaget muito se assemelham quando se trata da conceituação do número, a relação desse com o ensino e aprendizagem, assim como também, como acontece a formação desse conceito na criança. Vê-se adequado conceituar, ensinar e aprender "números", tendo uma perspectiva de análise direcionada à dualidade *intensão* e *extensão* do conceito desse objeto matemático.

Palavaras-chaves: Número. Complementaridade. Ensino e aprendizagem. Formação de conceito

INTRODUÇÃO

Desde a Antiguidade o ser humano vem desenvolvendo a sua capacidade de perceber quantidades. Segundo Ferrari (2008), há muitos anos estão sendo realizados estudos para discutir o desenvolvimento do senso numérico do indivíduo e como essa faculdade permite ao ser humano perceber que a quantidade de objetos de um pequeno conjunto foi alterada, quando, sem seu conhecimento, são acrescentados ou retirados objetos, ou seja, define-se senso numérico como a capacidade independente da contagem. (FERRARI 2008, p. 16)

Com o passar dos tempos paralelo ao senso numérico foi sendo construída a ideia de número. Essa corresponde a um conceito constituído pelo pensamento do homem frente às necessidades que foram sendo impostas no embate com a sua subsistência, desenvolvendo assim a capacidade de contar. (SCHÖN 2006, p. 4)

O ato de contar requer na maioria das vezes o auxílio de símbolos, que são usados para denominar e/ou classificar uma quantidade de objetos reunidos ou a falta

[1]Doutorando em Educação Matemática. PUC-SP. elomasso@hotmail.com
[2]Doutora em Matemática. PUC-SP. sigliori@pucsp.br

deles. Logo o feito de enumerar pode ser considerado, segundo Fonseca (2010 p. 15), como algo intrínseco ao pensamento, algo intuitivo. Essa ideia perdura há tempos.

Estudar a epistemologia do conceito de número é relevante para a Matemática e, por consequência, à Educação Matemática, visto que a busca da sistematização desse conceito representou um avanço de muitos ramos da Matemática. (SERVIDONI 2006, p. 20).

Houve muitos contrapontos históricos a respeito do conceito de número inteiro positivo, Schön (2006) salienta o quão complexo e enriquecedor foi todo o contexto no qual ocorreu o desenvolvimento desse conceito. A autora começa abordando a ideia apresentada por Dedekind, tal que para ele os inteiros naturais constituem o conjunto N, que contém um elemento particular chamado zero e que é munido de uma aplicação S: N $\rightarrow$N, chamada sucessor ou função de sucessão que satisfaz aos axiomas:

- S é injetiva;
- 0 não pertence a S(N);
- N é a única parte de N contendo o zero e estável por S(N);

Essa conceituação de número natural contribui para com a definição de conjunto infinito, que pode ser expressa pelo teorema: “Existe um conjunto infinito se, e somente se, existe um conjunto N satisfazendo aos três axiomas de Dedekind.” (SCHÖN 2006, p. 12)

Ainda segundo Schön (2006, p. 12), Peano também apresentou sua definição para números naturais por meio de cinco axiomas. A interpretação desses axiomas em termos de conjuntos equivale à definição apresentada por Dedekind. Entretanto Peano buscou axiomatizar os inteiros numa linguagem formal e Dedekind, construir em termos de conjunto os números naturais. (SCHÖN 2006, p. 15)

Já para Russell número é o que é característico de números, assim como homem é característico de homens. Uma pluralidade não é uma instância de número, mas de um número determinado, ou seja, número não pode ser confundido com pluralidade, mas sim com algo que é característico de certas coleções ou classes. Em sua tese Russell (1974, p. 18):

> Um determinado número não é idêntico a qualquer coleção de termos que o contenha: o número 3 não é idêntico ao trio consistindo de Brown, Jones e Robinson. O número 3 é algo que todos os trios têm em comum e que o distingue de outras coleções. Um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número.

Para Panizza (2006 p. 82) a ideia de número comunga em parte, com a concepção de Russell. Conforme a autora:

> Contar os elementos de um conjunto supõe distinguir o conjunto como tal e ter a ideia de elemento. Esta ideia de elemento se relaciona com a de unidade, a qual nasce quando o sujeito pode distinguir ou individualizar um objeto do resto que o rodeia, prescindindo de todas as qualidades que não são pertinentes ao problema. A ideia de unidade tem implícita, por oposição, a ideia de pluralidade ou conjunto de elementos. (PANIZZA 2006, p. 82)

A concepção de número inteiro positivo e sua complexa conceituação implica na possibilidade de o quão esse objeto matemático é relevante. Segundo Fonseca (2005 p. 3):

> Quando analisamos processos matemáticos, descobrimos que na maioria das vezes eles se apóiam em dois conceitos fundamentais, o número e a função e que, o próprio conceito de função pode ser reduzido ao conceito de número. (FONSECA 2005, p. 3)

Diante desse complexo cenário relacionado às inúmeras conceituações para número, a relação desse objeto com o seu ensino e aprendizagem não poderia ser diferente. Pesquisas mostram as dificuldades dos estudantes nos diversos níveis de ensino em relação ao conceito de número real (FONSECA 2010, apud IGLIORI; SILVA, 2001; TALL; PINTO, 1996)

Para Otte (2003a), há que se buscar uma nova perspectiva para a conceituação de número. Para ele as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem do conceito de número são consequências da introdução tradicional dos números, que é geralmente apresentada nos diversos níveis de ensino (básico ou superior). Isso porque tal introdução apresenta algumas “desvantagens” para a aprendizagem, por exemplo, não possibilitar uma construção de maneira uniforme ou geral dos números (dos naturais aos reais).

Como já supracitado, o ser humano apresenta uma capacidade de perceber variações de quantidades, ou seja, o senso numérico. Essa aptidão lhe é intrínseca e vem sendo analisada há tempos pela psicologia e neurociência. Tomando como referencial a tese de Ferrari (2008) tal que a mesma aborda como teóricos norteadores de sua pesquisa, Jean Piaget (1975) e Stanislas Dehaene (1997), este trabalho abordará a formação da aprendizagem do número seguindo em particular, a linha piagetiana, como também sua epistemologia.

Para Ferrari (2008, p. 42), os estudos piagetianos sobre a construção do número, partem da hipótese que esse é decorrente do desenvolvimento da própria lógica e que ao nível pré-lógico corresponde um período pré-numérico. Ainda segundo esses estudos, esse conceito se organiza gradativamente e de acordo com os sistemas de inclusões (a hierarquia das classes lógicas) e relações assimétricas (as seriações qualitativas). Ainda segundo Ferrari (2008 p. 44):

> Estudos piagetianos levam a crer que a estrutura operatória da série dos inteiros 1, 2, 3, ... se constrói de um único sistema com o grupamento da inclusão de classes e da seriação ou das relações de ordem. Não existe a construção separada do número cardinal nem do número ordinal, pois os números se constroem através da reunião das classes e das relações de ordem. (FERRARI 2008, p. 44)

A noção de número inteiro positivo e a forma com que esse objeto matemático é assimilado pela criança diante da relação ensino e aprendizagem será aqui compartilhada, tendo como outro foco norteador os estudos realizados por Michael Otte sobre a complementaridade. De acordo com Schön (2008 p. 34), para Otte, a noção de complementaridade é relevante para todo o estudo da fundamentação epistemológica da Educação Matemática. Ainda segundo Ferrari (2008, p. 33):

> Em Matemática e em outros campos da Ciência, a noção de complementaridade tem sido muito usada. Vários autores têm feito uso dessa noção, objetivando capturar os aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos e matemáticos. Uma postura complementarista é induzida pela impossibilidade de definir a realidade matemática independente da atividade de conhecimento em si. (FERRARI 2008, p. 33)

Este trabalho entende o conceito de número, assim como a relação dessa concepção com o ensino e a aprendizagem, como um objeto matemático que requer uma visão particular e detalhada. Compreende também esse contexto como um campo muito amplo e relevante para ser investigado e que independente da abordagem, contribuirá bastante com os estudos em Educação Matemática. Para Servidoni (2006, p. 20):

> O estudo do conceito número pode ser comparado ao de uma árvore, que tem partes, tais como: copa, tronco e a raiz. Podemos então estudar a copa, o tronco ou a raiz. (SERVIDONI 2006, p. 20)

A COMPLEMENTARIDADE

O termo complementaridade tem sido usado por diversos autores para caracterizar aspectos cognitivos e epistemológicos do desenvolvimento da ciência e de conceitos matemáticos. (FONSECA 2005, p. 15)

A ideia de complementaridade foi formulada pelo físico Niels Bohr em 1930, para explicar fenômenos atômicos motivado pela independência entre a observação dos fenômenos e a realidade sensível. Direcionando essa ideia para a matemática, Michael Otte (2003b), aponta que esse termo é utilizado para analisar e explicar o desenvolvimento epistemológico e cognitivo de conceitos matemáticos, em especial as noções de conjuntos e números.

A complementaridade é concebida segundo a noção dual de *extensão* e *intensão* de termos matemáticos. (OTTE 2003b, p. 205). Essa complementaridade se torna visível e distinguível da dualidade apenas sobre uma perspectiva genética, na qual se concentra o caráter matemático do nosso conhecimento. (FONSECA, 2005 p. 15) Ela é concebida segundo os aspectos *intensional* e *extesional*, que não devem ser vistos apenas como uma dualidade, mas sim complementares no desenvolvimento do conceito desse objeto matemático. (FONSECA 2010, p.77)

A visão *intensional* que implica ordinalidade e descrições axiomáticas aparece em primeiro lugar e sofre severas críticas daqueles que privilegiam as aplicações matemáticas. Já a ideia de *extensão* caracteriza-se por fornecer a descrição dos objetos matemáticos, assim como a interpretação e as possíveis aplicações dos sistemas axiomáticos. (FONSECA 2005, p. 16)

O CONCEITO DE NÚMERO NA TEORIA PIAGETIANA

Desde o nascimento o ser humano já começa a assimilar informações capazes de ajudar o seu desenvolvimento. Ele participa da formação do seu próprio conhecimento ao interagir-se com o outro. Segundo Ferrari (2008, p. 41):

> Tomando como ponto de partida o entendimento do ser humano como um ser complexo, no qual é sujeito ativo nas atividades com os outros e que participa da sua própria constituição cognitiva, consideramos importante destacar a reunião dos conhecimentos específicos com as características próprias para formar o conhecimento global. (FERRARI 2008, p. 41)

Esse processo de conhecimento global elencado acima retrata três estágios considerados por Piaget como a base da constituição de todo o cognitivo da criança. Para Piaget a primeira etapa, que vai dos dezoito meses a dois anos, corresponde a um processo em que a criança, através da imitação e aquisição de linguagens, consegue agir de forma a encontrar significado para as coisas e objetos.

O segundo estágio é denominado por Piaget como o início das operações concretas. Nessa fase, a criança começa a lidar com conceitos como os números e relações. É caracterizado por uma lógica interna consistente e pela habilidade de solucionar problemas concretos. Outro aspecto importante neste estágio refere-se ao aparecimento da capacidade da criança de interiorizar as ações. Embora a criança consiga raciocinar de forma coerente, tanto os esquemas conceituais quanto as ações executadas mentalmente se referem, nessa fase, a objetos ou situações passíveis de serem manipulados ou imaginados de forma concreta. Para acontecer a compreensão, são necessárias comparações do que é aprendido com o que já é conhecido ou está sendo fisicamente visualizado.

O terceiro estágio é marcado pelas operações formais, tal que a criança começa a lidar com as hipóteses. Segundo Piaget uma das consequências de se adquirir pensamento operatório formal é a capacidade de construir provas lógicas em que a conclusão segue a necessidade lógica. Essa habilidade constitui o raciocínio dedutivo. A capacidade de construir teorias evidencia-se nesse estágio, consequência da relação dual entre a capacidade de refletir e se desvencilhar do concreto existente, indo ao encontro do possível e do abstrato. Conforme Ferrari (2008) Piaget parte do princípio de que a construção do número é decorrente do desenvolvimento da própria lógica. Ainda de acordo com Ferrari (2008 p. 42):

> [...] Piaget afirma que o número se organiza gradativamente e de acordo com os sistemas de inclusões, (a hierarquia das classes lógicas), e de relações assimétricas (as seriações qualitativas). (FERRARI 2008, p. 42)

A COMPLEMENTARIDADE NA TEORIA PIAGETIANA

O debate sobre a relação entre o aspecto *intensional* e as visões *extensionais* da Matemática foi particularizado e direcionado para o conceito de número. (FONSECA 2010, p. 92). Tentar-se-á nesse escopo, correlacionar a complementaridade, em especial usada por Otte (2003a) e a visão Piagetiana sobre o ensino e a aprendizagem do número.

A linha piagetiana sobre o ensino e a aprendizagem do número predomina em muitos currículos de cursos de formação em pedagogia. Para Burgo (2007) as referências a Piaget encontram-se nos currículos pré-escolares públicos e privados por todo o país. Leis e diretrizes educacionais incorporam em suas doutrinas pressupostos retirados de sua teoria. As Universidades, as Faculdades de Psicologia e Educação, não só ministram disciplinas que incluem o estudo de Piaget, como produzem pesquisas com enfoque piagetiano nos seus cursos de pós-graduação. (BURGO 2007, p 40).

Na teoria Piagetiana a construção do conceito de número pela criança se faz necessariamente por intermédio do processo de classificação e seriação. As operações lógicas e aritméticas aparecem como sistema único e psicologicamente natural, associando os resultados de inclusão das classes com os da seriação das relações. (FERRARI 2008, p. 42). Além disso, Piaget e Szeminska (1975) afirmam que em vez de entender o número como derivado da classe, ou considerá-los como independentes, pode-se concebê-los como complementares a se desenvolver reciprocamente, embora em duas direções diferentes. Constata-se então que a lógica se refere à qualidade e a aritmética à quantidade e que, é necessário estabelecer um relacionamento entre essa dualidade.

No que tange à epistemologia do conceito de número, Servidoni (2006, p. 27) salienta que a percepção de regularidade e a constatação das características comuns aos objetos nos possibilitam chegar à abstração e à generalização. Isso mostra que a noção dual *extensional* (lógica e qualidade) e *intensional* (aritmética e quantidade) dos objetos matemáticos, definidos pelo termo complementaridade é uma exigência implícita aos conceitos para que eles sejam apreendidos de forma plena.

Para Burgo (2007, p. 16), Piaget demonstrou em suas investigações que para haver compreensão dos números a criança precisa estabelecer a relação qualitativa entre determinados elementos e o número correspondente a essa quantidade. Em suma, Piaget elenca o que a complementaridade aponta como dualidade entre a *intensão* e *extensão*, relacionando a quantidade (cardinalidade) e a qualidade (ordinalidade), respectivamente.

Ainda de acordo com Piaget, em seu debate acerca do número, o mesmo cita Russell como um dos logísticos que buscavam conduzir o número cardinal à noção de classe de classes e o ordinal à classe de relações. Piaget afirma também que se o número é classe e relação assimétrica ao mesmo temo, ele não deriva de uma ou de outra, mas sim da reunião entre elas. (FERRARI 2008, p. 43) Já para Schön (2008, p. 100), tem-se de um lado a abordagem axiomática no sentido de Hilbert-Peano e, de outro, a abordagem fundamentada na Teoria dos Conjuntos e Lógica. Logo percebe-se que nenhuma delas oferecem de forma isolada, a possibilidade de conhecer o objeto de maneira completa. Portanto as duas linhas de raciocínio supracitadas se assemelham quanto ao ensino/aprendizagem e epistemologia, respectivamente, relativas ao número.

Fonseca (2010, p. 70) reitera que a noção de *extensão* de termos matemáticos concerne à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracteriza modelos da teoria. Ainda segundo Fonseca (2010 apud ABBAGNANO 1982, p. 549):

> [...] Neste sentido a *intensão* (ou conotação) é delimitada por toda definição correta do termo e representa a *intenção* de quem o emprega por isso o significado primeiro de "significado". A *extensão*, entretanto, ou denotação de

> um termo é a classe das coisas reais às quais o termo se aplica. (FONSECA 2010, *apud* ABBAGNANO 1982, p. 549)

Para Fonseca (2010 p. 97), a genética epistemológica de Piaget legitima a hipótese de que a Matemática está baseada em pelo menos duas intuições básicas, as intuições de discreto e contínuo, e que cada uma corresponde a um tipo particular de existência, ou seja, existência no sentido de número natural e discreto e existência no sentido de contínuo e espacialização (geométrico).

Associando a ideia de discreto e contínuo elencadas no último parágrafo com a complementaridade, Fonseca (2010) enfatiza:

> Ressalta-se aqui a necessidade da complementaridade em relação à existência do discreto e do contínuo nas “entidades” básicas. Para Kuyk (1977, p. 137), elas são qualidades do mundo em que vivemos. Ele ressalta que não se trata de dizer que elas são qualidades sensoriais de um tipo ou de outro, tampouco existem num mundo platônico de entidades perfeitas. (FONSECA 2010, p. 97)

Ainda segundo Fonseca (2010 apud KUYK, 1977, p. 148), uma abordagem complementar para a Matemática é concebida conforme o desejo de respeitar o conjunto de teorias que estão no bojo da Matemática Clássica e seu desenvolvimento epistemológico, considerando a unidade original de uma ciência aplicada. Indo de encontro ao pensamento Piagetiano, Ferrari (2008, p. 22) aponta:

> Dessa interação dialética surgem duas classes de conhecimento: o conhecimento da realidade que só é possível por meio da ação do sujeito sobre os objetos, e o das estruturas lógico-matemáticas que nascem da coordenação das ações do sujeito que formarão instrumentos indispensáveis para assimilação da realidade. Assim, além da construção do conhecimento físico é necessário entender como ocorre o entrelaçamento com a construção das estruturas lógico-matemáticas,e dessa forma compreender como o ser humano adquire conhecimento. (FERRARI 2008, p. 22)

Acompanhando essa concepção, Fonseca (2010 apud KUYK, 1977, p. 155) ressalta ainda que na complementaridade uma parte constituinte da atividade matemática é o procedimento construtivo a partir de qualidades básicas como “material de construção”, e que a segunda parte dessa atividade é o conhecimento sobre as construções matemáticas (incluindo as qualidades básicas), assim como conhecimentos sobre o mundo. Essas constatações convergem com a teoria Piagetiana, tal que o conhecimento é construído a partir da interação entre o sujeito e o meio em que vive tendo como base as estruturas existentes no sujeito. Nessa perspectiva a obtenção de conhecimentos depende tanto das estruturas cognitivas do sujeito, como da relação dos objetos com o meio. (FERRARI 2008, p. 22)

Piaget afirma que há distinção e interação entre o conhecimento físico, exógeno e o conhecimento lógico-matemático, endógeno e ainda, que não se trata de dois tipos de conhecimentos que se desenvolvem independente com origens distintas. A teoria Piagetiana aponta uma origem comum, que corresponde à ação do sujeito sobre o objeto, surgindo paralelamente, o entrelaçamento entre os conhecimentos do sujeito e do objeto. (FERRARI 2008, p. 22).

Corroborando com essa teoria Piagetiana, Fonseca (2010, p. 117), salienta que:

> Para Frege, as verdades como as da Matemática devem fundamentar-se em seus princípios, e as provas não devem depender de fatos particulares ou experiências, entretanto considera que tais princípios de um ponto de vista psicológico não podem ser aprendidos sem a experiência interna ou externa (novamente se faz necessária uma abordagem *complementar*) (FONSECA 2010, p. 117)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As ideias aqui confrontadas sobre complementaridade e a teoria Piagetina envolvendo o Número, tiveram o propósito de contribuir para com a Educação Matemática, seja no campo de pesquisa ou como metodologia de trabalho em sala de aula.

Foi mostrado que a questão conceitual do número desde o século XIX está inserida em um debate riquíssimo e que só contribui para com o desenvolvimento da Matemática, epistemologicamente e como consequência, metodologicamente.

Segundo Fonseca (2005, p. 5), Otte afirma que, há que se buscar uma nova perspectiva para a conceituação de número e que, as dificuldades no processo de ensino e aprendizagem desse conceito são consequências da introdução tradicional dos números. Assim sendo, Otte tenta unir sob o ângulo da complementaridade, a epistemologia do número com o seu ensino/aprendizagem.

Consideravelmente os princípios piagetianos desempenham um papel relevante na formação cognitiva da criança. Foi elencado nesse escopo, o quão a teoria Piagetiana versa, intrinsecamente, sobre a dualidade *intensional* e *extensional* acerca da assimilação do número. Entretanto seu ensino e aprendizagem continuam sendo alvo de pesquisas visando a busca de metodologias mais eficazes.

Portanto, entende-se que esse artigo possa auxiliar aqueles que se envolvem com o ensino, aprendizagem e a epistemologia do número, partindo do princípio que a conceituação desse objeto focando a complementaridade, possa ser um ponto de partida muito relevante.

REFERÊNCIAS

BURGO, Ozilia Geraldini. **O Ensino e a Aprendizagem do Conceito de Número na Perspectiva Piagetiana: Uma Análise da Concepção de Professores da Educação Infantil.** Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2007.

DEHAENE, Stanislas. ***The number sense: How the mind creates mathematics.*** New York: Oxford University Press, 1997. 24p.

FERRARI, Alessandra Hissa**. O Senso Numérico da Criança: formação e características.** Tese de Doutorado. PUC-SP. São Paulo 2008.

FONSECA, Rogério Ferreira da. Número: **O conceito a partir de Jogos**. Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo 2005.

FONSECA, Rogério Ferreira da**. A Complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John HortonConway.** Tese de Doutorado. PUC/SP. São Paulo 2010.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo; FONSECA, Rogério Ferreira da. **O Conceito Matemático número real como objeto de ensino.** In: Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – IV SIPEM. Taguatinga, DF, 2009.

SCHÖN, Michaela Costa**. Número: reflexões sobre as conceituações de Russell e Peano**. Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo 2006.

OTTE, Michael Friedrich. **Complementarity, Sets and Numbers. Educational Studies in Mathematics.** Printed in the Netherlands: Kluwer Acadmic Publishers. Vol. 53, 2003b. p. 203 – 228.

____________________. **Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico.** Educação Matemática Pesquisa, São Paulo: EDUC, v. 5, n. 1, p. 13-55, 2003a.

PANIZZA, Mabel**. Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais. Análises e Proposta**. Artmed Editora S.A. Porto Alegre 2006.

PIAGET, Jean. Szeminska, Alina. **A Gênese do Número na Criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975. 331p.

SERVIDONI, Maria do Carmo Pereira. **A Axiomatização da Aritmética: E a Contribuição Hermann Günther Grabmann.** Dissertação de Mestrado. PUC/SP. São Paulo 2006.

TALL, D.; PINTO, M. ***Stundent teacher's conceptions of the rational numbers***. Published in Proceedings of PME 20, Valencia, v. 4, p. 139-146, 1996.