O QUADRILÁTERO FORMADO PELOS PONTOS MÉDIOS DOS LADOS DE OUTRO QUADRILÁTERO QUALQUER: destacando a relação entre as áreas

Eberson Paulo Trevisan[1]

Temática do Artigo: Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: No artigo, partimos de um trabalho realizado com licenciandos e professores em formação, em que buscamos explorar uma propriedade geométrica envolvendo quadriláteros e os pontos médios sobre os lados deste, para mostrar que a forma como a proposição é apresentada aos alunos pode conduzir a investigações mais significativas e que exploram mais do que a propriedade solicitada explicitamente. Para tal, é necessário reconhecer a importância que tem a visualização de figuras geométricas para o ensino de geometria, especialmente amparado por um olhar que busque ver mais do que a figura impõe de imediato, buscando sempre fazer aparecer outras propriedades não explícitas a um primeiro olhar sobre a figura.

Palavras Chaves: Ensino de Geometria. Quadriláteros e pontos médios. Relação entre áreas.

Introdução

Buscamos no presente artigo, olhar para diferentes possibilidades de trabalho com a proposição geométrica que afirma que: os pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer são vértices de um paralelogramo. Quando tal proposição é apresentada aos alunos não de forma afirmativa como ocorre acima, mas de forma a convidar os alunos a investigarem sobre possíveis relações existentes, por exemplo, questionando: o que é possível afirmar sobre o quadrilátero formado pelos pontos médios dos lados de um quadrilátero qualquer? Outras relações, como a proporcionalidade entre as áreas dos quadriláteros, podem surgir entre os alunos possibilitando explorar outros elementos durante a aula.

Tal fato inicialmente foi evidenciado em uma experiência realizada por nós com alunos de Graduação em Matemática e professores de Matemática em um curso de extensão, em que a referida atividade foi explorada. Nela alguns grupos de trabalho partiram da afirmação de haver uma relação de proporcionalidade entre as áreas para posteriormente observarem que a figura geométrica em questão era um paralelogramo.

Esta primeira constatação da proporcionalidade pode ser justificada pela valorização da visualização de elementos 2D frente a figuras geométricas, como

---

1 Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Professor da Universidade Federal de Mato Grosso, Campus Universitário de Sinop. E-mail: eberson76@gmail.com

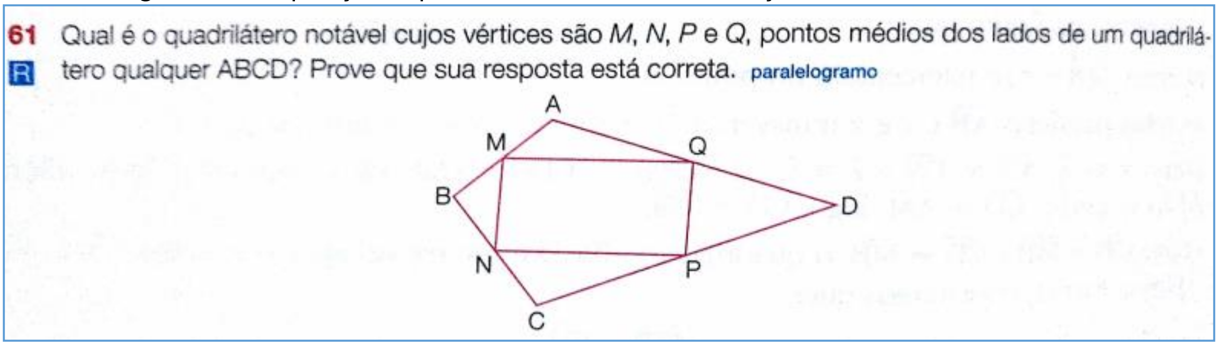
sugere a teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, apresentada em Duval (2011, 2014). Ao mesmo tempo abre possibilidade de validar esta relação de proporcionalidade também, tornando o trabalho com proposição mais significativo ao ensino, como tentaremos mostrar nas próximas seções.

Apesar do trabalho investigativo motivador do estudo, ter sido realizado por um grupo de graduandos e professores em formação, a proposição explorada e bom como os elementos que buscamos destacar, a nosso ver, se aproximam de interesses das temáticas da Educação Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental.

A proposição dos pontos médios de um quadrilátero

A proposição dos pontos médios de um quadrilátero, como enunciada na introdução do artigo, estabelece que: o quadrilátero cujos vértices são os pontos médios dos lados de outro quadrilátero é um paralelogramo. Esta proposição com frequência é encontrada em coleções de livros didáticos do ensino fundamental, especialmente nas seções de exercícios, como sugere a Figura 01.

Figura 01: Proposição explorada no livro didático Coleção Matemática e Realidade 8º ano.



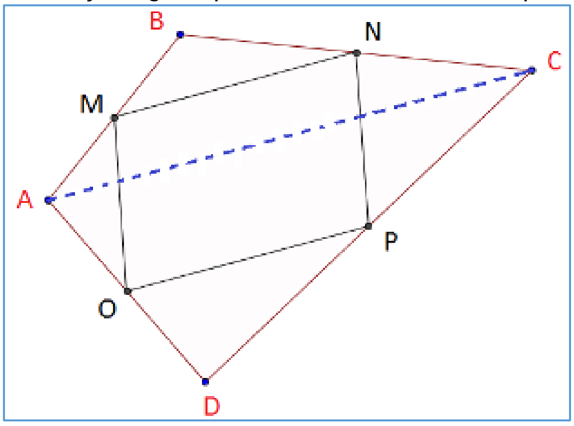
Fonte: Iezzi *et al* (2009, p. 238)

Tal proposição é consequência de uma aplicação direta do conhecido teorema da base média de um triângulo, por isto encontramos nos livros didáticos nas seções de exercícios que exploram o mesmo. A saber, o teorema da base média de um triângulo afirma que: Se um segmento tem extremidade nos pontos médios de dois lados de um triângulo então ele é paralelo ao terceiro lado e tem medida igual à metade deste terceiro lado. A prova para tal teorema será omitida aqui, mas a mesma pode ser encontrada em Trevisan (2016).

Para aplicação do teorema da base média de um triângulo, é necessário empregar sobre a representação figural o chamado na teoria dos Registros de Representação de Raymond Duval, de “olhar do inventor”. Neste um dado problema de geometria pode ser resolvido adicionando elementos não existentes inicialmente na figura, fazendo assim aparecer na figura elementos que permitam utilizar outras proposições e teoremas. Duval (2005, p. 07) destaca que esta forma de olhar para a figura se opera a partir de “uma DESCONSTRUÇÃO VISUAL das formas perceptíveis elementares que se impõem à primeira vista” (tradução nossa, grifo do autor).

Esta desconstrução visual destacada pelo autor se opera na prova da proposição, frente à representação do quadrilátero inicial, pela adição do segmento AC, como ilustra a Figura 02 apresentada na sequência.

Figura 02: Representação figural para encaminhamento da prova da proposição



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir dessa construção, ou seja, do sair da visão sobre a figura do quadrilátero bidimensional para adicionar o segmento AC, a argumentação se torna relativamente simples, pois será baseada na aplicação do teorema da base média de um triângulo, assim temos:

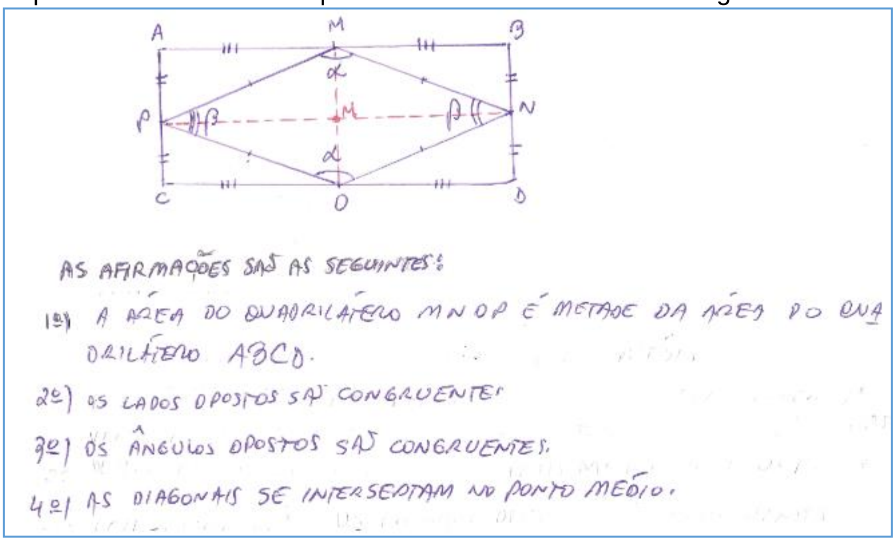
- M ponto médio de AB (hipótese do enunciado)
- N ponto médio de BC (hipótese do enunciado)
- Logo, pelo teorema da base média de um triângulo, considerando o ΔABC, temos que MN // AC.
- De modo análogo, olhando para ΔACD, temos que OP // AC. Logo, OP // MN.

Pelo mesmo raciocínio, a partir da construção de BD, mostra-se de OM // PN. Assim OMNP tem os lados opostos paralelos e, portanto, pela definição de paralelogramo este quadrilátero será um paralelogramo.

A relação entre as áreas

Posto este problema a um grupo de alunos de graduação em Licenciatura em Ciências Naturais e Matemática e professores de Matemática da educação básica participantes de um curso de extensão, de forma a não afirmar a propriedade, mas sim de deixar livre para investigarem as relações existentes, destacas-se a possibilidade levantada por eles da investigação da relação existente entre as áreas dos quadriláteros.

Figura 03: Relações destacadas por um trio de professores de Matemática ao investigarem o problema assumindo o quadrilátero como sendo um retângulo



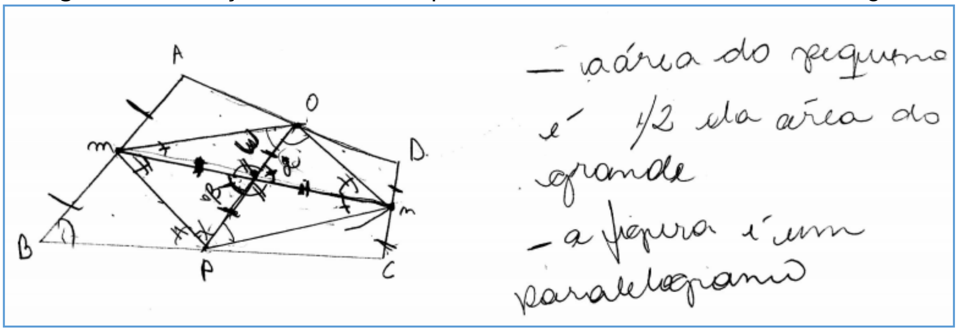
Fonte: Material elaborado por professores de Matemática de um curso de Extensão.

Neste grupo de professores (três professores) o problema é estudado em um caso particular de quadriláteros, o retângulo. Para validar as observações os professores se apoiam nos casos de congruência de triângulos. Mas não generalizam para um quadrilátero qualquer.

Contudo o primeiro elemento levantado por eles diz respeito justamente à relação entre as áreas. O restante das observações levantadas, itens 2, 3 e 4 na Figura 03, são elementos suficientes para caracterizar um paralelogramo. A representação figural neste caso é utilizada para dar suporte à investigação conduzida em que os resultados são sintetizados nos itens apontados pelo grupo.

Um grupo de alunos da graduação (também em trio) em sua investigação também levanta a possibilidade das áreas dos quadriláteros serem uma o dobro da outra, como ilustra a Figura 04. Este grupo também busca utilizar a figura para dar suporte a suas observações.

Figura 04: Relações destacadas por um trio de acadêmicos ao investigarem o problema



Fonte: Material elaborado por graduandos em Matemática em um curso de Extensão.

Nenhum dos grupos elaborou formalmente uma demonstração matemática para as afirmações realizadas. Mas destacamos que ambos os grupos investigam primeiro a relação entre as áreas das figuras.

Tal investigação pode ser justificada, pela forma como os alunos muitas vezes olham para as figuras em geometria e a forma como nosso olhar tende a privilegiar a visualização de elementos bidimensionais (2D). A forma de olhar para as figuras, que como Duval (2014) destaca em sua teoria, necessita ser superada pelos alunos para um trabalho em matemática mais significativo.

> Ensinar os alunos a verem figuras como os matemáticos as veem, pois esta condição é essencial para a aquisição de conhecimentos em Geometria e para torná-los capazes de utilizá-los em outra situação. Concretamente isso significa que é necessário, primeiramente, fazer com que os alunos passem da maneira natural de ver as figuras, que consiste em um reconhecimento perceptivo imediato de contornos fechados em 2D, à maneira matemática de olhá-las que, ao contrário, focaliza retas e segmentos 1D e pontos de intersecção 0D. Isso leva a ver uma rede de retas subjacentes às diferentes formas 2D reconhecidas em primeiro olhar (DUVAL, 2014, p. 15).

O emprego de um olhar que vai além do reconhecimento dos contornos fechados e que são impostos a ver de imediato, nos leva a operar uma desconstrução das formas, desconstrução esta muitas vezes necessária para modificar a figura a fim de possibilitar a utilização de outros elementos matemáticos.

A indicação dada pela figura que acompanha as observações dos trios indica que eles trabalharam com os lados dos quadriláteros também, especialmente pelas marcações de congruências que as figuras apresentam. No entanto, este trabalho não os levou à empregar um olhar inventor nos termos de Duval (2005), para poder fazer uso de outras propriedades, como é o caso do teorema da base média de um triângulo. Pois como vemos nas Figuras 03 e 04, nenhuma contém a inserção de segmentos, para fazer uso de tal propriedade.

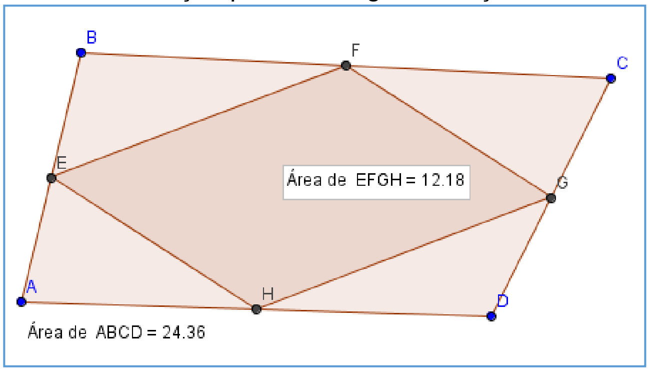
No entanto a observação da relação existente entre as áreas, nos proporcionou encaminhar alternativas para provarmos tal relação, tanto de uma forma experimental, com o uso do software GeoGebra, quanto encaminhar a demonstração desta relação como consequência do teorema da base média de um triângulo. Como mostraremos na próxima seção do trabalho.

Constatando as relações observadas

Todas estas relações levantadas podem ser facilmente verificadas de maneira experimental com a utilização de um software de geometria dinâmica, por exemplo, o GeoGebra. Ele pode inclusive ser utilizado primeiro para conjecturar sobre tais relações. Focaremos aqui nossa atenção na relação existente entre as áreas dos quadriláteros.

Para tal investigação, podemos utilizar a construção de um quadrilátero qualquer e dos pontos médios sobre os lados, podemos então formar outro quadrilátero ligando estes pontos médios. Utilizando o recurso do software de cálculo da área do quadrilátero podemos exibir na tela do computador a área de cada um destes quadriláteros, como ilustra a Figura 05 a seguir.

Figura 05: Construção para investigar a relação entre as áreas



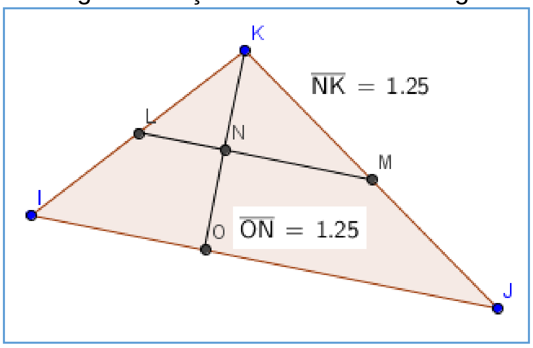
Fonte: Construção em GeoGebra realizada pelo autor

Realizada a construção, podemos movimentar o quadrilátero ABCD de forma a obter outras configurações, mas ao mesmo tempo, tais movimentos permitem observar que a área do quadrilátero interno será sempre metade da área do quadrilátero externo.

Uma das formas de se constatar formalmente que esta relação entre as áreas é verdadeira pode ser dada a partir do próprio teorema da base média de um triângulo. Porém para tal, devemos observar que o segmento médio do triângulo divide a altura do triângulo em dois segmentos de igual tamanho.

Esta observação pode ser também feita inicialmente no GeoGebra e posteriormente validada. No GeoGebra o procedimento de investigação pode ser igual ao utilizado no quadrilátero anterior, como ilustra a Figura 06. Para validação matemática desta constatação, basta observar que os triângulos KML e KJI são triângulos semelhantes e kO=2KN, logo KN=NO.

Figura 06: Construção para investigar a relação entre altura e o segmento médio no triângulo.

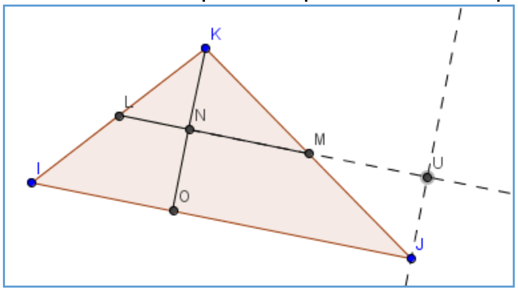


Fonte: Construção em GeoGebra realizada pelo autor

Outra prova utilizando elementos geométricos diferentes, também poderia ser explorada seguindo a mesma linha de raciocínio empregada para provar o teorema da base média de um triângulo. Para tal poderíamos:

- A partir de J construir paralela a KO (construção ilustrada na Figura 07);
- Construir a semirreta que contém NM;
- Marcar o ponto U no encontro da paralela construída a partir de J com a semirreta por NM;
- Dessa forma, se KN // UJ (construção), então $M\hat{K}N \equiv M\hat{J}U$ (Teorema das paralelas cortadas por uma transversal[2]), como $N\hat{M}K \equiv U\hat{M}J$ (opostos pelo vértice) temos que, pelo caso de congruência de triângulos ALA, os $\Delta KMN \equiv \Delta JMU$, logo KN ≡ JU;
- Como IJ // LU (base média do triângulo) e KO // UJ (construção) temos que NUJO é um paralelogramo, logo UJ é congruente a NO, então pelo item anterior, NO é também congruente a KN.
- Outra alternativa ao argumento contido neste último item seria observar que $J\hat{O}N \equiv O\hat{N}M \equiv O\hat{J}U \equiv 90º$, logo $J\hat{U}N \equiv 90º$ também, pois a soma dos ângulos internos de um quadrilátero equivale sempre a 360º e assim o quadrilátero NUJO é um retângulo, logo UJ é congruente a NO, então NO é também congruente a KN.

Figura 07: Construção para encaminhamento da prova explorando outras propriedades geométricas.

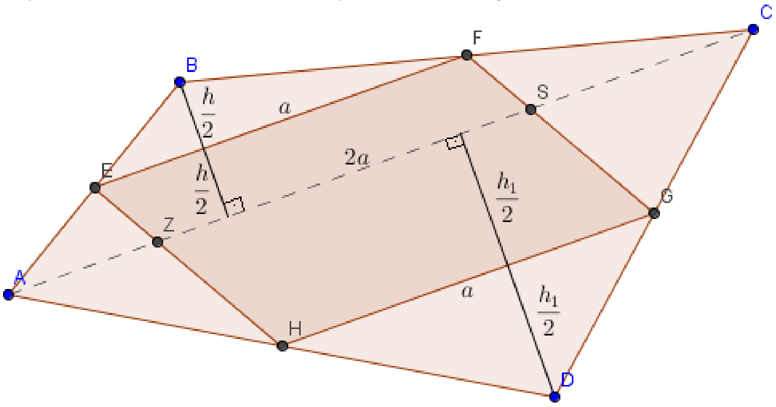


Fonte: Construção em GeoGebra realizada pelo autor

[2] Teorema: Se duas retas distintas interceptam uma transversal, então os ângulos alternos (ou os ângulos correspondentes) são congruentes.

Conhecendo então a relação apresentada acima sobre a altura do triângulo dividida pela base média, ou seja, que a base média divide esta altura em duas partes congruentes, podemos mostrar a relação entre as áreas pelo cálculo das áreas dos triângulos ABC e CDA e o cálculo da área do paralelogramo EFGH. Para tal podemos nos apoiar na ilustração apresentada na Figura 08.

Figura 08: Construção para encaminhamento da prova da relação entre as áreas dos quadriláteros.



Fonte: Construção em GeoGebra realizada pelo autor

Área do quadrilátero ABCD é igual à soma das áreas dos triângulos ABC com CDA. Logo:

$$A_{(ABCD)} = A_{(ABC)} + A_{(CDA)}$$

$$A_{(ABCD)} = \frac{2ah}{2} + \frac{2ah_1}{2} = \frac{2a(h+h_1)}{2} = a(h+h_1)$$

Já a área do quadrilátero EFGH pode ser dada por:

$$A_{(EFGH)} = A_{(EZSF)} + A_{(HZSG)}$$

$$A_{(EFGH)} = a\frac{h}{2} + a\frac{h_1}{2} = \frac{a(h+h_1)}{2} = \frac{1}{2}A_{(ABCD)}$$

Ficando assim estabelecida a relação existente entre as áreas destes dois quadriláteros.

Conclusões

Cremos que o trabalho apresenta dois elementos importantes para serem refletidos durante os encaminhamentos das aulas, ao explorarmos conteúdos geométricos. Primeiramente a importância dada a forma como olhamos as figuras geométricas, especialmente a necessidade de se fazer uso de um olhar que permita desconstruir as formas presentes nas figuras para utilização de outras propriedades que não estão disponíveis a uma primeira vista. Este olhar se torna essencial no trabalho em geometria, pois a todo o momento estamos buscando articular elementos teóricos matemáticos a partir de manipulação figural.

O segundo ponto que destacamos diz respeito a forma como apresentamos os enunciados das atividades. Quando estes enunciados são “fechados” demais, direcionados ao que se quer encontrar enquanto propriedade, eles podem deixar de oportunizar aos alunos percorrerem caminhos investigativos que os levem a outras descobertas. Estas descobertas quando é fruto de um trabalho investigativo, possivelmente podem levar os alunos a estudarem muitos outros elementos matemáticos além dos que a própria propriedade solicita.

Para estes dois elementos, pensamos que o trabalho apresentado possa servir para refletirmos tais necessidades e assim elaborarmos e encaminharmos para estudos atividades cada vez mais significativas na construção dos conhecimentos matemáticos.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson *et al*. **Matemática e realidade: 8º ano**. 6ª ed. São Paulo. Editora Atual, 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar Matemática de outra forma, entrar no modo matemático de pensar:** os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Tradução: Marlene Alves dias. Editora PROEM, 1ª Ed. São Paulo, 2011.

______. Rupturas e Omissões entre manipular, ver, dizer e escrever: história de uma sequência de atividades em Geometria. In BRANDT, C. F. e MORETTI, M. T. (Org.) **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática**. Ed. Unijuí, p. 15 – 38. Ijuí, RS, 2014.

______. Les conditions conitives de l’aprentissage de La geometrie: développement de La visualisation, différenciation dês raisonnements et coordination de leus fonctionnements. **Annales de Didactique e de Sciences Cognitives**, nº 10 p. 5 a 53, 2005.

TREVISAN, E. P. Um estudo sobre a Articulação entre validações empíricas e teóricas no ensino de Geometria com professores da rede pública. 2016. 257 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso, 2016.