O ESBOÇO DE CURVAS DE FUNÇÕES MODULARES LINEARES A PARTIR DA TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Lucia Menoncini[1]

Méricles Thadeu Moretti[2]

Educação Matemática no Ensino Médio

RESUMO:

Partindo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, mais especificamente do procedimento de interpretação global figural, estudamos o esboço de curvas de funções modulares lineares. Tal procedimento busca um olhar mais amplo acerca das referidas curvas, em comparação com a abordagem ponto a ponto frequentemente utilizada no ensino, uma vez que o traçado é compreendido como representação de um objeto descrito por uma expressão algébrica. A interpretação global figural permite estabelecer correspondências entre os registros algébrico e gráfico, de modo que se perceba as articulações entre ambos, ao mesmo tempo que evidencia a dupla representação do mesmo objeto matemático. Para Duval, as múltiplas representações do objeto são pressupostos para a compreensão integral do conceito, que neste caso é a função modular linear.

PALAVRAS CHAVES: Propriedades figurais. Função modular linear. Abordagem ponto a ponto.

INTRODUÇÃO

O esboço de curvas por tempos foi considerado objeto de estudo predominante da geometria. A partir dos trabalhos de Descartes e Fermat (BOYER (2012) e EVES (2011)), que serviram de base para a criação da Geometria Analítica, o esboço de curvas ganhou uma nova forma de representação, a algébrica. A possibilidade de trabalhar com estas diferentes representações, sob olhares inicialmente distintos, mas complementares, abriu espaço para novas descobertas e permitiu uma maior articulação entre as áreas.

Hoje, o esboço de curvas é objeto de estudo em diferentes níveis de ensino e frequentemente está associado ao conceito de funções. É comum a introdução do conceito de

[1] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – PPGECT- DINTER-UFSC/UFFS. Bolsista do Programa UNIEDU. Apoio CAPES. Professora da UFFS. E-mail:lucia.menoncini@uffs.edu.br

[2] Doutor em Didática da Matemática/ULP. Professor permanente do PPGECT/UFSC. E-mail: mthmoretti@gmail.com

funções a partir da sua escrita algébrica, para somente depois apresentar a representação gráfica, via abordagem ponto a ponto. Pensando no sentido inverso, que parte do gráfico para encontrar a expressão algébrica, a abordagem ponto a ponto apresenta limitações, uma vez que trata de pontos particulares da curva e não fornece uma visão geral da mesma. Como consequência pode-se induzir ao entendimento de que as duas formas de representação não estão articuladas entre si e que não representam o mesmo objeto matemático, o que é um equívoco.

A necessidade de trabalhar as funções modulares lineares a partir da efetiva articulação entre as representações algébrica e gráfica e em sentido duplo, levou-nos a buscar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, mais especificamente a abordagem de interpretação global figural proposta por Raymond Duval. Partindo desta abordagem vamos estudar o esboço de curvas de funções modulares lineares, valorizando a visualização gráfica de modo que sejam identificadas as variáveis visuais pertinentes e sejam estabelecidas associações destas variáveis com as unidades algébricas. Queremos, assim, evidenciar e fortalecer a articulação entre os registros gráfico e algébrico, contribuindo para a compreensão do conceito de função modular linear.

ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE PROPRIEDADES FIGURAIS

No ensino é comum tratar o esboço de curvas a partir da abordagem ponto a ponto. Segundo Duval (2011) tal abordagem considera como referência os eixos graduados e sobre eles são marcados pontos que correspondem a pares ordenados. Há, portanto, uma forte associação entre pontos e pares ordenados. Esse procedimento é frequentemente utilizado para realizar conversões entre registros de representação semiótica, em que o registro de partida é o algébrico e o de chegada, o gráfico. Em sentido inverso, ele é praticamente inoperante, pois mesmo que haja “congruência semântica entre um par ordenado e a sua representação cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente” (CORRÊA e MORETTI, 2014, p. 43). Desta forma, a abordagem ponto a ponto dificulta a percepção da articulação entre os registros, especialmente quando a representação gráfica é o registro de partida.

Ainda neste tipo de abordagem, a visualização do gráfico se restringe a visualização de determinados pontos particulares e o esboço da curva é entendido como uma simples junção de pontos, oriundos da aplicação de regras de codificação, o que impede uma leitura mais ampla e global acerca de suas propriedades. No entanto, ela é adequada ao estudo de funções (especialmente das funções do primeiro e segundo grau) em que se faz necessário uma leitura pontual, como encontrar pontos de intersecções, pontos de máximos e mínimos, conforme destaca Duval (2011).

Em contraste com a abordagem ponto a ponto, Duval (2011) enuncia a abordagem de interpretação global de propriedades figurais, na qual o conjunto traçado/eixos forma uma imagem que representa um objeto descrito pela expressão algébrica. Nela é possível compreender que o gráfico e a expressão algébrica estão articulados entre si, uma vez que as modificações feitas num registro podem ser visualizadas e reconhecidas no outro. O olhar pontual oriundo da abordagem ponto a ponto cede espaço para um olhar mais amplo e geral da curva. Neste sentido, Duval (2011, p. 99, grifos do autor) destaca que "**não estamos mais na presença da associação "um ponto – um par de números", mas na presença da associação "variável visual de representação – unidade significativa da expressão algébrica"** ". Isso implica que para além da observação de pontos específicos numa curva é preciso uma interpretação global, como o nome já sugere, onde as propriedades da curva sejam destacadas, analisadas e correlacionadas com a escrita algébrica. É preciso analisar a congruência entre os registros de representação, identificando alterações conjuntas do gráfico e da expressão algébrica e estabelecendo correspondências entre as variáveis visuais da representação gráfica e as unidades significativas da expressão algébrica.

Estabelecer correspondências entre registros e perceber como eles estão articulados depende da operação cognitiva denominada conversão. A conversão possibilita o trânsito entre os registros gráfico e algébrico de modo que a sua rapidez e espontaneidade implicará na coordenação dos registros, que por sua vez, conduzirá à compreensão integral do conceito de função modular, de acordo com Duval (2012).

No ensino, as conversões acontecem com maior intensidade num único sentido: partindo da expressão algébrica para chegar ao gráfico, dando a impressão de haver certa relação de dependência entre as representações, como se a segunda estivesse subordinada à primeira. As razões que levam a priorizar esse sentido de conversão estão atreladas à dificuldade da análise simultânea das propriedades visuais e algébricas das funções, visto que a maioria das funções possuem alto grau de complexidade. Para realizar a conversão em sentido inverso, tendo como ponto de partida o registro gráfico, é necessária a abordagem de interpretação global de propriedades figurais. Mais do que identificar as variáveis visuais gráficas e as unidades algébricas significativas, a interpretação global permite que as correspondências entre os registros gráfico e algébrico sejam estabelecidas e coordenadas.

CORRESPONDÊNCIAS ENTRE AS PROPRIEDADES DA CURVA E SUA EXPRESSÃO ALGÉBRICA

A partir dos estudos de Duval sobre o procedimento de interpretação global de propriedades figurais, muitas pesquisas têm direcionado o foco para o esboço de curvas. Trabalhos nesta perspectiva estão cada vez mais frequentes, como os propostos por Corrêa e Moretti (2014), Moretti e Luiz (2010), Luiz (2010), Silva (2008), Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) e Moretti (2003).

Em particular, Silva (2008) e Corrêa e Moretti (2014) nos chamam atenção. Os autores apresentam uma nova forma de traçar o esboço de curvas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, na qual conseguem correlacionar as variáveis visuais gráficas (amplitude e período) com as unidades significativas algébricas (coeficientes e termos constantes). É um tratamento diferenciado daquele comumente tratado no ensino, via abordagem ponto a ponto. Com base no trabalho destes autores e amparados pela proposta de Duval (2011) acerca da abordagem de interpretação global figural, vamos desenvolver estudos sobre o esboço de curvas de funções modulares lineares.

Nossa proposta é explicitar as articulações entre as representações gráfica e algébrica de modo a reconhecer e compreender que elas são formas diferentes de representar o mesmo objeto matemático, que é a função modular linear. Para tal, vamos associar as variáveis visuais do gráfico às unidades algébricas significativas e descrever as características gerais das curvas de funções modulares lineares, estabelecendo correspondências entre as unidades significativas algébricas e as unidades visuais gráficas.

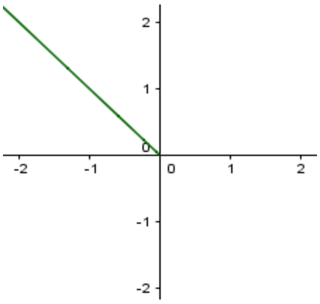
Antes de associarmos as variáveis visuais às unidades algébricas, vamos relembrar algumas informações sobre o conceito de função modular linear:

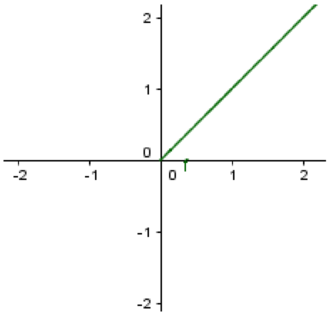
i) Sua expressão algébrica é dada por $f(x) = \pm a + b|kx - (\pm c)|$ e a forma canônica é $f(x) - (\pm a) = b|x - (\pm c)/k|$, com a, b, c, k constantes reais.

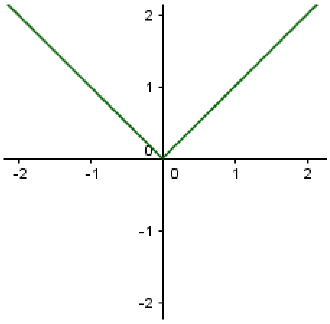
ii) A função real $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^+$ associa cada x real a um único $f(x)$ positivo que corresponde a $|x|$. Esta função é a base das funções modulares, ou seja, nela são aplicadas as translações que originarão as demais funções modulares. Cada sentença de $f(x)$ determina graficamente uma semirreta a partir da origem, que são simétricas em relação ao eixo Y.

iii) Para esboçar a curva de $f(x) = |x|$, uma maneira é construir as semirretas (Figura 1, Figura 2) via atribuição de valores à variável x e em seguida uni-las, formando o traçado conforme Figura 3.

Figura 1: $f(x) = -x,\ x < 0$ **Figura 2**: $f(x) = x,\ x > 0$ **Figura 3**: $f(x) = |x|$





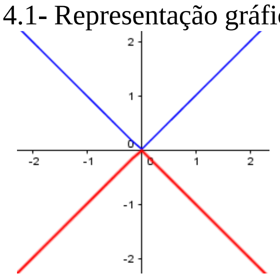


Fonte: Elaborada pelos autores

Agora que conhecemos a representação gráfica da função base e a representação algébrica das funções modulares lineares, vamos estabelecer as associações entre estas duas formas de representação, conforme propõe Duval. Vejamos a Figura 4.

Figura 4: Associação das variáveis visuais às unidades algébricas significativas para $f(x) - (\pm a) = b|kx - (\pm c)|$

4.1- Representação gráfica



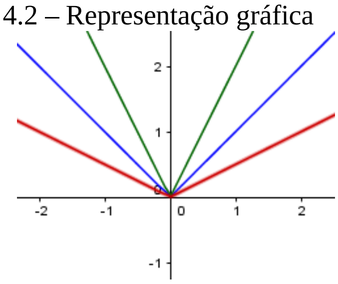
Representação algébrica

A - $\boldsymbol{f(x) = |x|}$

B - $\boldsymbol{f(x) = -|x|}$

Variáveis visuais	**Valores das variáveis visuais**	**Unidade algébrica significativa**
Sentido do traçado	A - O traçado está voltado para **cima** B - O traçado está voltado para **baixo**	A - Valor de $\boldsymbol{b > 0}$ B - Valor de $\boldsymbol{b < 0}$

4.2 – Representação gráfica



Representação algébrica

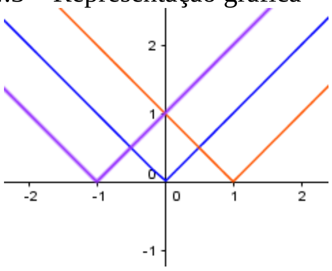
A - $\boldsymbol{f(x) = |x|}$

B - $\boldsymbol{f(x) = |2x|}$

C - $\boldsymbol{f(x) = |\frac{1}{2}x|}$

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais	Unidade algébrica significativa
Os **ângulos** do traçado com os eixos	A- Repartição **simétrica** dos quadrantes percorridos B- O ângulo com o eixo horizontal é **maior** que o ângulo com o eixo vertical C- O ângulo com o eixo horizontal é **menor** que o ângulo com o eixo vertical	A – Coeficiente angular $\boldsymbol{k = 1}$ B - Coeficiente angular $\boldsymbol{k > 1}$ C – Coeficiente angular $\boldsymbol{k < 1}$

4.3 – Representação gráfica



Representação algébrica

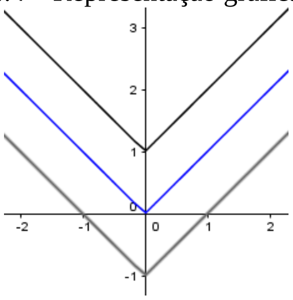
A - $\boldsymbol{f(x) = |x|}$

B - $\boldsymbol{f(x) = |x - (-1)|}$

C - $\boldsymbol{f(x) = |x - (1)|}$

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais	Unidade algébrica significativa
Posição do traçado em relação à origem do **eixo horizontal**	A- O traçado passa pela **origem** B- O traçado se desloca para a **esquerda** em relação à origem C- O traçado se desloca para a **direita** em relação à origem	A – **Ausência** da constante ***c*** B – Acrescenta-se constante **negativa *c*** C – Acrescenta-se a constante **positiva *c***

4.4 – Representação gráfica



Representação algébrica

A - $\boldsymbol{f(x) = |x|}$

B - $\boldsymbol{f(x) - (1) = |x|}$

C - $\boldsymbol{f(x) - (-1) = |x|}$

Variáveis visuais	Valores das variáveis visuais	Unidade algébrica significativa
Posição do traçado em relação à origem do **eixo vertical**	A - O traçado passa pela **origem** B - O traçado se desloca para **cima** C -O traçado se desloca para baixo	A – **Ausência** da constante ***a*** B – Acrescenta-se a constante **positiva *a*** C – Acrescenta-se a constante **negativa *a***

Fonte: Elaborada pelos autores

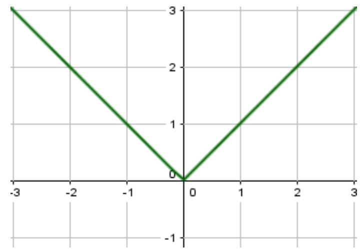
Com base no estudo desenvolvido na Figura 4 construiremos a curva cuja expressão algébrica é dada por $f(x) - (-2) = 3|x - (+1)|$. Para isso, vamos partir da função base $f(x) = |x|$ que possui os termos algébricos $a = 0$, $b = 1$, $k = 1$ e $c = 0$ e alterar os valores destes termos para identificar o resultado destas alterações no gráfico, de modo que se perceba a articulação entre os registros de representação, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5: Construção do traçado da curva relativo à função $f(x) - (-2) = 3|x - (+1)|$. (sequência iniciada em 5.1)

Tratamento algébrico na função base $f(x) = \|x\|$ que origina as demais funções até obter a expressão desejada $f(x) - (-2) = 3\|x - (+1)\|$.	Tratamento no esboço da curva base, conforme modificações nos termos algébricos da função base

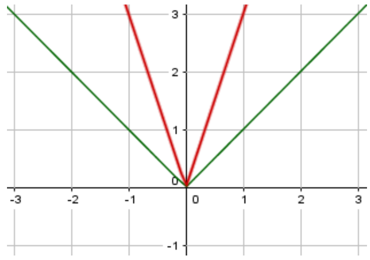
5.1 Função base

$$f(x) = |x|$$



5.2 Atribuição do valor 3 para o coeficiente *k*

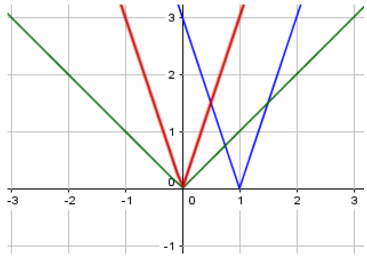
$$f(x) = |3x|$$



5.3 Atribuição do valor positivo 3 para a constante *c*

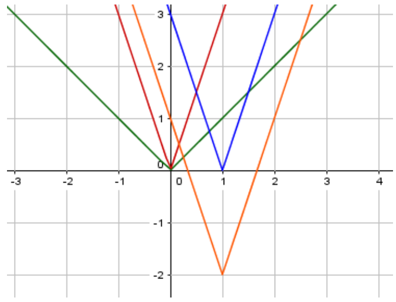
$$f(x) = |3x - (+3)| = |3(x - \frac{+3}{3})|$$

$$f(x) = 3|x - (+1)|$$



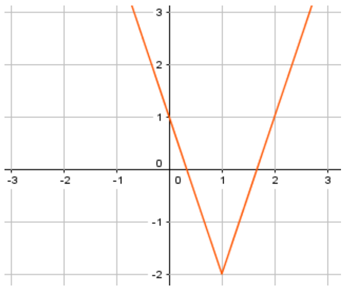
5.4 Atribuição do valor negativo 2 para a constante *a*

$$f(x) - (-2) = 3|x - (+1)|$$



5.5 Forma canônica

$$f(x) - (-2) = 3|x - (+1)|$$



Fonte: Elaborado pelos autores

Observando a sequência iniciada em 5.1 na Figura 5 percebemos as alterações que ocorrem na representação gráfica quando são modificados os valores na representação algébrica. Em 5.2 visualizamos graficamente a mudança do ângulo do traçado com o eixo horizontal (em relação ao ângulo do traçado da função base). Em 5.3 visualizamos o deslocamento da curva uma unidade para a direita da origem. No passo seguinte há o deslocamento da curva duas unidades para baixo. Por fim, 5.5 apresenta o esboço final da curva após as modificações nos termos algébricos. Da mesma forma, poderíamos alterar graficamente o esboço da curva e perceber as alterações correspondentes na escrita algébrica.

Com base nas análises das Figuras 4 e 5 vamos descrever as características gerais das curvas de funções modulares lineares de modo a estabelecer as correspondências entre as unidades algébricas e as variáveis visuais gráficas. Vejamos o Quadro 1.

Quadro 1- Características das curvas da forma $f(x) - (\pm)a = b|kx - (\pm c)|$

<table>
<tr><th>Coeficiente</th><th>Unidades significativas (expressão algébrica)</th><th>Variáveis visuais (curva)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">a</td><td>Para $a = 0$:
Ausência de valor numérico</td><td>Traçado corta o eixo Y na origem</td></tr>
<tr><td>Para $a > 0$:
Ausência do sinal (+);
Presença de valor numérico (+)</td><td>Translação no eixo Y de $\boldsymbol{a}$ unidades para cima em comparação com a função base</td></tr>
<tr><td>Para $a < 0$:
Presença de valor numérico (-)</td><td>Translação no eixo Y de $\boldsymbol{a}$ unidades para baixo em comparação com a função base</td></tr>
<tr><td rowspan="2">b</td><td>Para $b > 0$:
Ausência do sinal (+);
Presença de valor numérico sempre que $b \neq 1$</td><td>Traçado voltado para cima</td></tr>
<tr><td>Para $b < 0$:
Presença do sinal (–);
Presença de valor numérico sempre que $b \neq -1$</td><td>Traçado voltado para baixo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">k</td><td>Para $k = 1$ ou $k = -1$:
Presença de valor numérico sempre que $k \neq \pm 1$;
Ausência do sinal (+) ou presença de sinal (-)</td><td>O traçado forma ângulos simétricos com os eixos X e Y (45°)</td></tr>
<tr><td>Para $k > 1$ ou $k < -1$:
Presença de valor numérico;
Ausência do sinal (+) ou presença de sinal (-)</td><td>O ângulo formado com o eixo X é maior que o ângulo formado com o eixo Y</td></tr>
<tr><td>Para $-1 < k < 1$:
Presença de valor numérico;
Ausência do sinal (+) ou presença de sinal (-)</td><td>O ângulo formado com o eixo X é menor que o ângulo formado com o eixo Y</td></tr>
<tr><td></td><td>Para $c = 0$:</td><td>Traçado corta o eixo Y na origem</td></tr>
</table>

c	Ausência de valor para a constante c	
	Para $c > 0$: Ausência do sinal (+); Presença de valor numérico (+)	Translação no eixo X de $\frac{c}{k}$ unidades para a direita em comparação com a função base
	Para $c < 0$: Presença de valor numérico (-)	Translação no eixo X de $\frac{c}{k}$ unidades para a esquerda em comparação com a função base

Fonte: Elaborado pelos autores

De acordo com o Quadro 1, a expressão algébrica escrita na forma canônica $f(x) - (\pm)a = b|x - (\pm c/k)|$ fornece informações relevantes acerca do comportamento da curva. Os coeficientes ***b*** e ***k*** estão relacionados, respectivamente, à concavidade e ao ângulo do traçado, enquanto que os termos constantes ***a*** e ***c*** indicam as direções e sentidos das translações. Os valores de ***c*** e ***k*** estão interligados de forma que o quociente entre eles determina a coordenada abscissa do vértice. Resumidamente, temos:

a) Coeficiente ***b*** (indica a concavidade do traçado): o traçado está voltado para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$);
b) Coeficiente ***k*** (indica o ângulo de abertura do traçado): ângulo simétrico (se $k = 1$), ângulo com o eixo horizontal é maior (se $k > 1$), ângulo com o eixo horizontal é menor (se $k < 1$);
c) Termo constante ***a*** (indica a translação do traçado no eixo Y): o traçado se desloca ***a*** unidades para cima (se $a > 0$) ou para baixo (se $a < 0$);
d) Termo constante ***c*** (indica a translação no eixo X): o traçado se desloca $\frac{c}{k}$ unidades para à direita (se $\frac{c}{k} > 0$) ou para à esquerda (se $\frac{c}{k} < 0$);
e) O vértice do traçado $V = (x_v, y_v)$ possui coordenadas $x_v = \frac{c}{k}$ e $y_v = \pm a$.

O Quadro 1 explicita as correspondências possíveis, em duplo sentido, entre os registros gráfico e algébrico das funções modulares lineares. Ao mesmo tempo que é possível associar as alterações na expressão algébrica aos resultados gráficos, é também possível, a partir da visualização e das mudanças realizadas no gráfico, reconhecer as mudanças nos termos algébricos correspondentes. É esta correspondência biunívoca que fortalece a relação existente entre as duas formas de representação, explicitando que ambas se complementam e representam o mesmo objeto matemático, a saber, a função modular linear.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscando uma forma mais ampla de visualizar e tratar o esboço de curvas, Duval (2011) apresenta a abordagem de interpretação global figural que permite realizar as conversões em duplo sentido de modo a estabelecer correspondências entre as duas formas de representação. Para o autor, as múltiplas representações são igualmente importantes e necessárias para a compreensão do objeto matemático. Esta abordagem apresenta uma maneira diferente de visualizar o gráfico, que vai para além da identificação de pontos e pares ordenados, como propõe a abordagem ponto a ponto. Ela recorre à interpretação das propriedades das curvas e considera a representação gráfica no mesmo patamar de importância das representações algébricas.

Com base nesta abordagem foi possível mostrar que a função modular linear pode ser tratada de modo mais geral e em duplo sentido, ressaltando assim a interligação existente entre duas formas de representação e desmistificando a relação de subordinação de uma para com a outra. Neste estudo, a variação dos coeficientes e dos termos constantes presentes na expressão algébrica $f(x)-(\pm)a=b|kx-(\pm c)|$permitiu identificar as respectivas alterações gráficas e assim, sinalizar uma linha de raciocínio que possa servir de guia para a construção do esboço de curvas, de forma mais global, e para além das curvas relativas à função modular linear.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. **História da matemática.** São Paulo, SP: E. Blücher, 2012.

CORRÊA, M. O. S; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. In: BRANDT, C. F; MORETTI, M. T (Orgs.). **As Contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na Educação Matemática**. Unijuí, 2014, p. 39-65.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, Florianópolis, v.6, n.2, p. 96-112, 2011.

__________. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat.** Florianópolis, v. 7, n 2, p.266-297, 2012.

EVES, Howard Whitley. **Introdução a história da matemática.** 5. ed. Campinas, SP: UNICAMP, 2011.

LUIZ, L. dos S. **Esboço de curvas no ensino superior:** uma proposta baseada na interpretação global das propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. Dissertação (Mestrado) - PPGECT, UFSC, Florianópolis, 2010.

MORETTI, M. T.; FERRAZ, A. G.; FERREIRA, G. G. Estudo da conversão entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Quadrante**. v. XVII, n, 2. Lisboa: APM, 2008.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. dos S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. **Educ. Matem**. **Pesq**., São Paulo, v.12, n.3, p. 529-547, 2010.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A (Org.) **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

SILVA, M. O. **Esboço de curvas:** uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. Dissertação (Mestrado) – PPGECT, UFSC, Florianópolis, 2008.