



## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA COMO METODOLOGIAS PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DO CONTEÚDO DE OTIMIZAÇÃO EM CÁLCULO

Júlio Paulo Cabral dos Reis<sup>1</sup>

- Modelagem Matemática e Resolução de Problemas

### Resumo

O propósito deste trabalho é relatar uma experiência na disciplina de Cálculo sobre o conteúdo de Otimização. A experiência aconteceu em uma turma de 4º período do curso de Graduação em Engenharia de Produção de uma faculdade privada em Belo Horizonte. O conteúdo de Otimização foi trabalhado embasado nas metodologias de Resolução de Problemas e Investigação Matemática, e, para tal, elaborou-se um projeto. Nele uma situação-problema da área de Engenharia de Produção foi analisada inicialmente por métodos presentes na disciplina de Cálculo, em especial a Otimização. Focou-se na compreensão e significação de conceitos, presentes no conteúdo de Otimização, e (re)-significação de conteúdos da Matemática básica. Verificou-se, além de experiências transdisciplinar e a tomada de decisões, que surgiram de forma natural durante a realização do projeto, que a aprendizagem dos alunos foi potencializada, em relação, ao conteúdo de Otimização.

**Palavras-chave:** Cálculo. Resolução de Problemas. Investigação Matemática. Otimização. Transdisciplinar.

### Introdução

A Educação Matemática oferece uma série de metodologias no auxílio dos processos de Ensino e Aprendizagem, em especial, Diniz e Smole (2001) traz a Resolução de Problemas e Ponte (2002) a Investigação Matemática. Já as Diretrizes Curriculares para os cursos de Graduação em Engenharia (2001) propõem o trabalho transdisciplinar como forma de construir a autonomia do graduando.

Ainda pode ser analisado nas Diretrizes (2001), que a disciplina de Cálculo nos currículos universitários, em especial nas engenharias, é de destaque. Stewart (2006) e Rezende (2007) fazem reflexões de como promover o ensino e a aprendizagem de Cálculo de forma significativa.

Assim, com importância do conteúdo de Cálculo nos currículos universitários e respaldado na resolução de problemas e na investigação matemática este relato de experiência

---

<sup>1</sup> Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. julio.cabral.reis@hotmail.com

traz uma aplicação destas estratégias de forma a potencializar uma aprendizagem significativa do conteúdo de otimização.

## **Justificativa**

A importância dos conteúdos de Cálculo transcende uma riqueza cultural, sendo possível vinculá-lo a inúmeras outras áreas do conhecimento. Surge à preocupação quanto ao ensino e à aprendizagem destes conteúdos, em especial o de Otimização, cuja importância é apresentada por Kolman e Hill (2006) “em vários problemas no comércio e na indústria, estamos interessados em tomar decisões que maximizem ou minimizem alguma quantidade” (p.508). É nesse ponto que o conteúdo de Otimização torna-se uma ferramenta em potencial.

A Educação Matemática propõem a Resolução de Problemas e a Investigação Matemática, como metodologias que podem auxiliar a compreensão de conceitos presentes na Matemática. Compreensão defendida por Stewart (2006) e Rezende (2007) no que se refere aos processos de ensino e aprendizagem de Cálculo. Estas metodologias ainda permitem um trabalho que perpassa por variadas áreas do conhecimento o que corrobora com as Diretrizes (2001), que apresentam a transdisciplinaridade como necessária na formação do engenheiro.

Pela importância do Cálculo, em especial o conteúdo de otimização, criar projetos que permitam o trabalho com as metodologias citadas “é uma maneira de despertar o interesse dos alunos – e facilitar a aprendizagem” (STEWART, 2013, pg. xi).

## **Objetivos**

### **Objetivo Geral**

Trabalhar com as metodologias de Resolução de Problemas e Investigação Matemática para abordar o conteúdo de Otimização na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral;

### **Objetivos Específicos**

- a) Verificar o conhecimento matemático e sua abrangência em outras áreas do conhecimento;
- b) Analisar o conteúdo de otimização como método auxiliador na tomada de decisões;
- c) Elaborar estratégias de análise e reflexão frente a um problema da área;

## Referencial

### Metodologias - Resolução de Problemas e Investigação Matemática

Em Diniz e Smole (2001) a Resolução de Problemas, é trazida com perspectiva metodológica, e como tal, contribui ao ensino e aprendizagem de Matemática, pois verifica-se um modo de pensar e organizar o ensino e a aprendizagem da Matemática, seja em qualquer nível. Para que o ensino e a aprendizagem em qualquer área do conhecimento sejam efetivados com êxito, Pozo (1998) alega que é necessário que o aluno não tenha apenas os conhecimentos já elaborados, mas que adquira habilidades que o permitam aprender de maneira autônoma, neste ponto, a Resolução de Problemas pode contribuir na aquisição destas habilidades.

Skovsmose (2014) diz “um cenário para investigação é um terreno sobre o qual as atividades de ensino-aprendizagem acontecem.” (p.45), é um terreno que permite os alunos pesquisarem, planejarem, refletirem, levantarem hipóteses e perpassarem a outros campos do conhecimento, afim de obtenção, de uma conclusão e compreensão respaldadas em conhecimentos matemáticos. Nestes cenários, pode-se trabalhar com a Investigação Matemática. Em Ponte (2002) há estudos que mostram que a investigação matemática é uma maneira de conduzir os processos de ensino e aprendizagem de Matemática.

As Diretrizes (2001) propõem ainda a parceria entre tecnologia e ciência com “ênfase na síntese e na transdisciplinaridade” (BRASIL, 2001, p.1), de modo a possibilitar ao aluno o vínculo da teoria com a prática. Para que essa parceria aconteça, é necessário que as experiências de aprendizado ultrapassem as aulas convencionais, de modo que o aprendizado só se consolidará se o “estudante desempenhar um papel ativo de construir o seu próprio conhecimento e experiência, com orientação e participação do professor.” (p.2).

Percebe-se a preocupação da Educação Superior no trabalho com a transdisciplinaridade, a tomada de decisões, a construção do conhecimento, o papel ativo do aluno durante a sua formação. Deste modo, aliar as metodologias de Resolução de Problemas e Investigação Matemática, a disciplina de Cálculo, no que se refere ao conteúdo de Otimização, perpassa o compreender conceitos em Matemática, vai além, contribuindo a experiências mencionadas no documento.

## **Ensino e Aprendizagem de Cálculo**

Os processos de ensino e aprendizagem do Cálculo na atualidade remetem a compreensão dos conceitos presentes nesta disciplina. Stewart (2006), defende a utilização da resolução de problemas e da “regra de quatro” (STEWART, 2006, p. 7), isto é, apresentar os conceitos, na disciplina de Cálculo, nas formas: geométrica, numérica, algébrica e “verbal ou descritivo” (p.7), compreende desta forma, que as dificuldades e ou fracassos poderão ser amenizados. Percebe-se que a proposta de maior relevância, para o autor, é o trabalho com a compreensão conceitual.

Em conformidade Rezende (2007), sugere utilizar a dualidade “técnica/significado” (p.335) na tentativa de assimilar conceitos envolvidos na disciplina. A proposta é o aluno compreender e explorar a técnica, a partir, do significado, para enfim formaliza-la.

As metodologias de Resolução de Problemas e Investigação Matemática podem contribuir a proposta: um ensino e uma aprendizagem de Cálculo significativa.

## **Metodologia**

Para elaborar o projeto, adotaram-se as metodologias da Resolução de Problemas e da Investigação Matemática. Uma situação-problema na área de Engenharia de Produção, foi resolvida, à luz da investigação matemática, ou seja, uma situação-problema que os alunos foram convidados a investigar, refletir e tomar decisões quanto a solução apropriada. Segundo análises e respaldados em métodos Matemáticos e/ou de outras áreas do conhecimento.

Para analisar as contribuições do projeto criado, adotou-se a investigação qualitativa que “ênfatisa a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”. (BOGDAN; BIKLEN 1994, p.11). O pesquisador é parte inerente do processo e a coleta de dados auxiliou no relato apresentado.

## **Desenvolvimento do Projeto**

Foi proposto um problema à turma do 4º Período de Engenharia de Produção de uma faculdade particular em Belo Horizonte ao início do semestre letivo (2/2014). Os resultados da solução deste problema seriam apresentados em uma destinada para tal, ao fim do semestre letivo. A turma dividiu em três grupos e cada grupo teve 30 minutos para apresentar as suas

conclusões. As conclusões foram baseadas em pesquisas científicas. Deixou-se em aberto a solução criando um cenário de investigação. Apresenta-se o problema:

Vocês trabalham em uma empresa que confecciona lixeiras a partir de placas metálicas retangulares, cujas medidas, são as mesmas de uma cartolina convencional. As lixeiras confeccionadas pela sua empresa priorizam após a confecção conter o maior volume possível e gerar o menor gasto por unidade fabricada.

Pensou-se somente o método inicial, que seria o conteúdo de Otimização, porém em um cenário de investigação, as possibilidades estão em aberto, o que afirma Ponte (2002), e isto permitiu, durante a apresentação, não só a utilização da otimização, mas também outros complementos: contabilidade (valores, fluxo de caixa, gastos e valor de venda), administração (lucro, pagamentos e valores), dentre outros, uma técnica chamada Repuxo foi apresentada e esta fugiu as regras convencionais da Matemática, o que se configura na zona de risco, denominada por Ponte (2002) ao se trabalhar com Investigação Matemática, é onde ocorre, o inesperado.

## **Principais Resultados**

O Cálculo foi o ponto de partida dos grupos, o método de otimização foi esmiuçado pelos três grupos. Inclusive duvidar sobre possibilidades de confecções das lixeiras, não baseando em otimização, foram apresentadas. Corroborando com Ponte (2002) e as Diretrizes (2001), a permissão da autonomia dos alunos durante o processo.

O primeiro grupo produziu o protótipo da lixeira, em formato de paralelepípedo, e assim ficaram em uma “zona de conforto”. A otimização foi utilizada para construir a lixeira. Com o desenvolvimento dos cálculos, demonstraram aprendizagem do conteúdo de otimização.

**Figura 01: Grupo 1 e seu protótipo**



**Fonte do autor.**

Ao final da apresentação, o grupo disse que profissionalmente e intelectualmente puderam crescer dentro da sua área de atuação e puderam verificar a necessidade da disciplina de Cálculo, em especial, o conteúdo de otimização. Não houve um aprofundamento de pesquisa, porém, houve aprendizado.

O grupo 2, idealizou a lixeira, a priori sob a luz da otimização, e chegaram a conclusão que no formato de bloco retangular teria o maior volume. Porém, duvidaram desta escolha e pensaram em uma lixeira no formato cilíndrico, criando outro modelo. Tentaram maximizar o volume final, tirando tanto a base e a lateral do cilindro da “placa metálica”. Concluíram que a perda de material seria considerável e que o volume não seria maior em relação a forma de paralelepípedo.

Abriu-se uma questão: será que não existiria outro formato melhor que o de bloco retangular. Esta questão ainda permanece em aberto. E aguçou os presentes. Para trazer estas conclusões, a otimização foi colocada em debate.

**Figura 02: Protótipos do Grupo 2: Bloco Retangular e Cilindro.**



**Fonte do Autor.**

O grupo fez orçamento de materiais para a confecção, chegando a conclusão, na data vigente, do preço final de cada lixeira. Buscaram um lucro final de 80%, para tal, fizeram tabelas com orçamentos e despesas. Conceito como o de esmaltação foi apresentado. Uma apresentação de futuros Engenheiros de Produção, que atuaram de modo autônomo.

Demonstra-se aqui a possibilidade de criar, criticar, analisar e refletir. Tais habilidades estão nas Diretrizes (2001) e, além um trabalho transdisciplinar foi verificado. Houve vínculos com outras áreas do conhecimento, sem a segregação, cada qual contribuindo com a solução do problema de maneira intrínseca

Ao final, relataram a necessidade dos métodos aprendidos em Cálculo, no auxílio da futura profissão. E puderam perceber, porque compreenderam conceitos envolvidos na disciplina, em conformidade com Rezende (2007) e Stewart (2006).

O último grupo inovou dentro das possibilidades, ocorreu o inesperado, o que em Ponte (2002), é avisado ao se trabalhar com Investigação Matemática. Podem ocorrer descobertas as quais o professor não havia pensado.

Inicialmente o grupo trabalhou com a otimização. E posteriori, descobriram um método que ultrapassa o Cálculo. Não há estudos matemáticos formais, porém é um método muito singelo e elegante denominado: Repuxo de Materiais.

O método consiste, a partir de uma placa circular metálica, repuxa-la em formatos diferenciados, na maioria das vezes, cilíndricos, ao limite. As figuras seguintes foram retiradas do vídeo apresentado pelo grupo.

**Figura 03: Início do Processo – Placa circular metálica**



**Fonte: Vídeo Youtube**

**Figura 04: Metade do processo**



**Fonte: Vídeo Youtube**

**Figura 05: Final do processo – Placa circular se torna um cilindro**



**Fonte: Youtube**

O processo de Repuxo não é muito conhecido, porém é muito utilizado no dia-a-dia para confecção de vasilhas de alumínio (bacias, panelas, marmitas e outros). Os formatos são variados. Ainda não há um cálculo que prediz o tamanho que pode ficar o objeto no final do processo, mediante a placa metálica inicial. Isto é realizado de modo empírico, pelo torneiro.

O grupo apresentou o processo, que envolveu pesquisa, reflexão e uma viagem até uma empresa que trabalha com este processo. Gravaram um vídeo da confecção da lixeira idealizada a partir deste processo. E então, o grupo trouxe três protótipos, um baseado na otimização (paralelepípedo), outro na tentativa (cilindro) e o por último no Repuxo (cilindro). Com as mesmas dimensões iniciais da “placa metálica”, o maior volume foi obtido utilizando o método de Repuxo. O método não exige soldas e/ou esmaltação, fazendo o preço de custo reduzir. Haveria perda de material, pois a placa deveria ser circular, porém mesmo com a perda de material, o volume final seria maior e o custo menor. Como educador, fiquei impressionado com o poder da Investigação Matemática, a partir da Resolução de Problemas contribuindo com as Diretrizes do curso, e uma aprendizagem significativa.



**Figura 06: Protótipos grupo 3**



**Fonte do Autor**

### **Considerações Finais**

Os grupos, pesquisaram, refletiram e elaboraram conclusões que demonstraram significativa aprendizagem, proposta por Rezende (2007) e Stewart (2006) para a disciplina de Cálculo. Os conceitos envolvidos no conteúdo de Otimização e na matemática básica foram compreendidos mediante a necessidade da resolução do problema. Permitiu-se uma experiência enriquecedora e transdisciplinar em conformidade com as Diretrizes (2001). Os alunos construíram conhecimentos tanto para si e quanto para o professor, o que foi permitido com a utilização das metodologias.

Assim o projeto em questão contribuiu de forma significativa, no conteúdo de otimização e na formação de um futuro Engenheiro de Produção, que pode além de perceber a presença e a necessidade das ferramentas trazidas pelo Cálculo pôde ir além, vendo a transdisciplinaridade envolvida na área de formação.

### **Referências**

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes curriculares para os cursos de graduação em engenharia.** Brasília, 2001. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12991](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12991)> Acesso em: 02 de Abril de 2017.

DINIZ, Maria Ignez; SMOLE, Kátia Stocco. **Ler, escrever e resolver problemas.** São Paulo: Artmed. 2001.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: E.P.U., 1986. xii, 99 p. (Temas básicos de educação e ensino)

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8ª ed. São Paulo: LTC, 2006.

POZO, Juan Ignacio. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Art Méd, 1998.

PONTE, J. P. et al (orgs.) **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. 2002.

REZENDE, Wanderley Moura. O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. In: MACHADO, N.; CUNHA, M. (Org.) **Linguagem, Conhecimento, Ação ensaios de epistemologia e didática**. São Paulo. Escrituras. 2007.

SKOVSMOSE, O. **Um convite a Educação Matemática Crítica**. Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo Campinas, SP: Papyrus. 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo. Pioneira-Thomson Learning, 5ª ed. 2006. v. 1.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo. Pioneira-Thomson Learning, 7ª ed. 2013. v. 1.

TORNO DE REPUXO AUTOMÁTICO - AUTOMAÇÃO DE TORNO DE REPUXO CONVENCIONAL. **Licença padrão do YouTube. BRM MÁQUINAS ESPECIAIS BRM**. 2014. 7:58 minutos. Disponível em: < [https://www.youtube.com/watch?v=rc9H\\_Sa7Cak](https://www.youtube.com/watch?v=rc9H_Sa7Cak)> Acesso em: 03 de Abril de 2017