O PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Michelle Andrade Klaiber[1]
Daniele Peres da Silva[2]
Angela Marta Pereira das Dores Savioli[3]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Este artigo refere-se a uma pesquisa que analisou o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, segundo Dreyfus (2002), em atividades e produção escrita de alunos ingressantes do ensino superior. Com a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem, buscamos entender como ocorre a construção do pensamento matemático por meio da resolução de um problema – contextualizado na química – envolvendo sistemas de equações lineares. Além disso, propor uma forma alternativa de retomar este conteúdo no início do ensino superior.
Palavras Chaves: Educação Matemática. Pensamento Matemático. Sistemas Lineares. Ensino Superior.

Introdução

Segundo Pinto (2002, p. 224),

> [...] começa-se a perceber que uma reforma educacional no ensino de matemática nas universidades, para responder à demanda por um ensino que atenda melhor aos alunos e professores, não pode ser conduzida ignorando aspectos da complexidade epistemológica da matemática, do processo de pensamento dos alunos.

fica claro que os cursos de graduação não devem atuar como meros instrumentos de transmissão de conhecimento e informações (BRASIL, 1998).

Neste contexto, observamos professores que ao preparar sua aula, resolvem com antecedência todos os problemas que serão apresentados, omitindo dos estudantes o ato legítimo de pensar matematicamente; descobertas e frustrações durante o processo de resolução dos problemas são conhecidas apenas pelo professor (LAMONATO e PASSOS, 2011). A matemática ensinada desta forma, como uma disciplina pronta e acabada, não possibilita ao estudante o prazer da descoberta, prejudicando assim o desenvolvimento do pensamento matemático.

---

[1] Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Apucarana - PR. michelle@utfpr.edu.br
[2] Doutoranda em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina - PR. dani-peres@hotmail.com
[3] Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Docente da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina – PR. angelamarta@uel.br

Ainda nesse sentido, Onuchic e Allevato (2011) afirmam a importância de o estudante assumir a responsabilidade por sua aprendizagem, fazendo com que o professor deixe de ser o protagonista neste processo. Somente assim o estudante poderá refletir sobre o conhecimento estudado, construir novo conhecimento e desenvolver a capacidade de pensar matematicamente.

Neste trabalho analisamos o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (PMA), segundo Dreyfus (2002), em atividades e produção escrita de alunos ingressantes do ensino superior. Com a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), buscamos entender como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático por meio da resolução de um problema – contextualizado na química – envolvendo o conteúdo de sistemas lineares.

A THA e o PMA

Segundo Simon (1995), os objetivos, as tarefas e os alunos que estarão envolvidos no processo de aprendizagem são elementos principais na construção de uma THA, e esta, por sua vez, proporcionará ao professor a possibilidade de tomar decisões no processo educacional, baseado em suas suposições de como o conhecimento poderia ser construído.

Para melhor compreensão do uso da expressão “trajetória hipotética”, Simon (1995, p. 137) faz uma analogia:

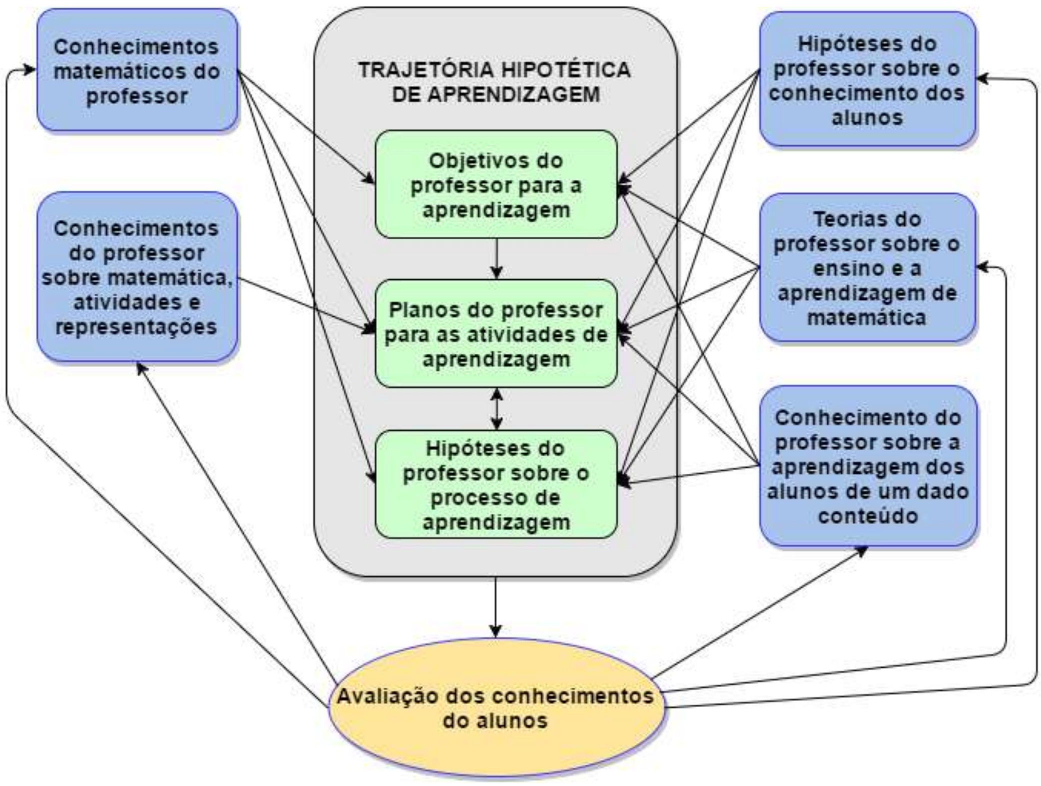
> Considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar lugares que você nunca tinha visto. Você não fará isso aleatoriamente (por exemplo, irá para a França, depois Havaí, depois Inglaterra), mas também não tem um itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você sai viajando de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem, sobre as condições e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequência dos seus destinos. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas ao longo do caminho. Você adiciona destinos à sua viagem que não eram de seu conhecimento. O caminho que você percorrerá durante a viagem é a sua “trajetória”. O caminho que você antecipou em algum ponto é a sua “trajetória hipotética”.

Para Simon (1995) a construção de uma THA é o processo pelo qual o professor desenvolve um plano para a atividade de sala de aula antes de ir para a sala de aula, ou seja, é uma previsão de como se dará a construção do conhecimento dos alunos, quais dúvidas e questionamentos podem surgir a partir dos problemas propostos pelo professor e de como o professor irá interagir com estes alunos. Assim, as interações que ocorrem entre professor e alunos constituem uma experiência.

São três os componentes principais de uma THA: os objetivos de aprendizagem, as atividades de aprendizagem e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem. Para Simon e Tzur (2004, p. 102) “talvez o maior desafio na utilização de uma trajetória hipotética de aprendizagem elaborada para o desenvolvimento de um conteúdo seja a identificação da atividade mental que pode levar ao conceito independente”.

A figura 1 descreve a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a THA, e as interações com os alunos.

Figura 1 - Ciclo de ensino de Matemática.



Fonte: Adaptado (SIMON, 1995, p, 137).

Os domínios do conhecimento matemático do professor contribuem para que sejam definidos os objetivos de ensino, a partir desses e em conjunto com o conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos e as concepções de ensino aprendizagem do professor, é possível desenvolver um plano de atividades baseado nos processos hipotéticos de aprendizagem, dando forma à THA.

Por meio da THA elaborada neste trabalho, identificamos nos processos de aprendizagem apresentados quais os processos cognitivos envolvidos, por parte dos alunos, na construção do conhecimento matemático.

Conhecer os processos mentais desenvolvidos pelos estudantes durante a construção do conhecimento é uma tarefa importante para o professor, pois possibilita a ele direcionar suas ações pedagógicas. A natureza do pensamento matemático refere-se aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático, uma forma de compreender melhor estes processos é o estudo do PMA.

Segundo Tall (2002), a transição da matemática elementar (geometria, álgebra, aritmética) para a matemática avançada (prova axiomática) requer uma reconstrução mental, a abstração por meio de deduções a partir de definições formais. Grey *et. al* (1999) caracterizam o PMA como um contexto no qual os objetos são criados a partir de propriedades e axiomas, em vez de deduzidos por meio da manipulação de objetos.

Outra caracterização do PMA, que adotamos nesta investigação, é dada por Dreyfus (2002), refere-se ao estudo de processos que ocorrem na mente do estudante, como a representação, a visualização, a abstração, e a generalização, dentre outros, que interagem entre si. Estes processos ocorridos no PMA, segundo Dreyfus (2002, p.26),

> [...] estão já presentes no pensamento das crianças sobre conceitos elementares da matemática, por exemplo, no número e no valor de posição. Os processos mentais não são *exclusivamente* usados na matemática avançada nem são exclusivamente usados na matemática. Abstrações são feitas em física, representações são usadas em psicologia, análises são usadas em economia e visualização em arte.

Para Dreyfus (2002) os processos de representação e abstração possibilitam a passagem de um nível para outro, ou seja, do Pensamento Matemático Elementar (PME) para o PMA. No processo de representação, o autor aborda e explica as seguintes atividades:

- Representar: neste processo ocorre a representação simbólica, na qual o indivíduo explicita de forma escrita ou falada, por meio de símbolos e sinais, o seu conhecimento; e a representação mental (visualização), que se refere aos esquemas e quadros de referências criados internamente pelo indivíduo para lidar com o mundo exterior.

- Traduzir: o indivíduo movimenta-se entre as diversas representações e saber mudar de representações em contextos diferentes.

- Modelar: é semelhante ao de representação mental, porém, o sistema externo é físico e o modelo matemático é uma estrutura mental, consiste na representação matemática de um processo ou objeto não matemático.

Dreyfus (2002, p. 34) afirma que "[...] o mais importante entre estes processos avançados é abstrair. Se um aluno desenvolve a capacidade de conscientemente fazer abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático." No que se refere à abstração, o autor apresenta dois pré-requisitos para que a mesma ocorra:

- Generalização: neste processo ocorre a transição de casos particulares para casos gerais.

- Sintetização: consiste em combinar ou compor as partes do conhecimento de forma a formar um todo.

De acordo com Dreyfus (2002) a abstração é um processo de construção de estruturas mentais a partir de propriedades e de relações existentes entre os objetos matemáticos. Desviando a atenção do próprio objeto, a abstração está relacionada à generalização e à síntese, porém demanda por parte dos estudantes um esforço cognitivo maior.

A aprendizagem da matemática por meio da representação e da abstração torna-se uma atividade criativa, que promove a reflexão crítica sobre os conhecimentos, e não apenas a reprodução de métodos e esquemas prontos transmitidos pelo professor.

Para a resolução de tarefas que envolvam o PMA é necessário que o aluno tenha passado por quatro fases apresentadas por Dreyfus (2002) apud Gereti (2014) como constituintes dos processos de aprendizagem matemática, são elas: (i) utilização de uma única representação; (ii) utilização de várias representações em paralelo; (iii) estabelecimento de relações entre as representações paralelas e (iv) integração das representações, flexibilização e mudança entre elas.

Utilizamos os processos e fases de Dreyfus (2002) como base para a análise de como se daria o desenvolvimento do PMA nos estudantes durante a realização da tarefa proposta.

A THA

A THA apresentada a seguir é destinada a alunos do primeiro período do curso de licenciatura em química; foi elaborada com base na experiência em sala de aula da autora, em livros utilizados para o ensino do conteúdo no ensino superior e em leituras relacionadas ao tema.

Por meio desta, esperamos analisar o desenvolvimento do PMA apresentado nas possíveis resoluções do problema proposto, utilizando a resolução de problemas como metodologia de ensino. Esta THA é também uma proposta para a abordagem do conteúdo de sistemas de equações lineares, conteúdo estudado no ensino médio que é retomado no ensino superior – nos cursos da área de exatas.

O problema proposto baseia-se em uma questão de vestibular da PUC-RJ que aborda a reação química dos antiácidos no estômago de uma pessoa.

> *Segundo a Lei de Conservação de Massas de Lavoisier, "na natureza nada se cria e nada se perde, tudo se transforma". Essa lei nos mostra que quando ocorrem reações químicas o número de átomos permanece inalterado, estes átomos apenas se rearranjam originando novos produtos.*
> *Portanto, a quantidade de átomos de cada elemento em uma equação química que representa uma reação deve ser a mesma nos reagentes e nos produtos. Garantimos essa igualdade por meio do balanceamento dos coeficientes da equação, os chamados coeficientes estequiométricos.*
> *Um antiácido comumente utilizado é o bicarbonato de cálcio ($NaHCO_3$) que reage no estômago segundo a equação $NaHCO_3 + HCl \rightarrow NaCl + H_2O + CO_2$ liberando cloreto de sódio, água e gás carbônico (por isso a sua efervescência).*
> *O óxido de alumínio (Al_2O_3) é também utilizado como antiácido. Ele reage com o ácido clorídrico (HCl) presente no estômago produzindo cloreto de alumínio e água. A equação desta reação é: $Al_2O_3 + HCl \rightarrow AlCl_3 + H_2O$.*
> *Estas duas reações estão balanceadas? Calcule os coeficientes estequiométricos delas.*

Os objetivos de aprendizagem para este problema são: relembrar e associar o conhecimento prévio sobre equações lineares e suas propriedades; analisar, interpretar e representar algebricamente o problema proposto; reformular conceitos e formalizar a definição de sistema de equações lineares; compreender e validar as possíveis soluções de um sistema de equações lineares de acordo com o contexto do problema; explorar possíveis métodos de resolução de um sistema de equações lineares; questionar, explorar e trocar experiências com os pares como forma de aprendizagem.

No desenvolvimento desta THA, indicamos as instruções ao professor com a letra I, as falas do professor com a letra P, e as falas dos alunos pela letra A, para diferenciar alunos utilizamos índices A_1, A_2, e assim sucessivamente.

I: Para que os alunos compreendam a dinâmica da aula o professor deve explicar as características da Resolução de Problemas. Em seguida, os alunos devem agrupar-se em duplas e receberem uma folha com o problema proposto, para ler e interpretar o enunciado.

Propor que os alunos leiam, interpretem e discutam sobre o problema em duplas. Para esta tarefa, disponibilizar 15 minutos aproximadamente. Orientar as duplas para que pesquisem em dicionários ou livros algum termo/conceito desconhecido no problema.

A_1: Professora, onde estão os coeficientes estequiométricos nestas equações? Como vamos encontrá-los?

P: Vocês deverão inserir esses coeficientes de forma a balancear as equações.

A_1: Mas não sabemos quanto eles valem, pode chutar?

P: Esta é a forma mais eficiente que você imagina para encontrar os coeficientes?

A_1: Sim.

P: Então podem começar a resolver o problema.

I: É possível que muitos alunos tenham essa dúvida, neste caso o professor pode fazer um esclarecimento geral ao invés de falar apenas com a dupla.

Disponibilizar para esta tarefa 30 minutos aproximadamente. O professor deve estar atento às discussões nas duplas, acompanhando o desenvolvimento da atividade.

A_2: Professora a primeira equação já está balanceada, não precisa fazer mais nada?

P: Mesmo assim, você saberia identificar quais são os coeficientes?

A_2: Se não tem coeficientes então é tudo “zero”.

P: Então tente colocar esses coeficientes na primeira equação, o que você achou?

A_3: Não, mas se colocarmos “zero” em tudo a equação desaparece.

P: Isso mesmo.

A_2: Verdade, então é tudo “um”, precisa fazer conta?

P: Apresentem a resposta da maneira que vocês acharem mais adequada.

I: Ao término desta etapa, solicitar que os grupos apresentem suas soluções na lousa, para o restante da turma, e promover uma discussão sobre os resultados apresentados. Podem ser feitas perguntas do tipo: Todos chegaram à mesma resposta? Se a resposta for não, questionar o porquê.

A_4: Professora, na segunda equação encontramos coeficientes diferentes, mas eles também dão certo na equação, qual resposta é a correta?

P: Por que vocês acham que isto ocorreu, é possível que o problema tenha mais de uma solução?

I: Neste momento, alguns alunos podem perceber que a segunda equação gera um sistema possível indeterminado, mas outros alunos podem ter encontrado coeficientes por meio de tentativas.

Possível Solução 1: Se começarmos com o Al, nos reagentes temos 2, nos produtos temos 1. Invertendo temos: $1Al_2O_3+HCl \rightarrow 2AlCl_3+H_2O$ Agora para o Cl, nos produtos temos: 2x3=6Cl, nos reagentes, 1, temos que esse número deve ser 6. Temos: $1Al_2O_3+6HCl \rightarrow 2AlCl_3+H_2O$ Agora H, nos reagentes: 6x1=6 e nos produtos: 2.__=6 Temos que o número é 3. Assim, o resultado é: $1Al_2O_3+6HCl \rightarrow 2AlCl_3+3H_2O$

I: Usando tentativas, outras duplas podem ter encontrado outros coeficientes que balanceassem a equação, neste momento o professor pode propor que estas duplas se reúnam e tentem chegar a um consenso sobre ser possível ou não mais de uma solução.

Porém, alguns alunos podem ter equacionado o problema, talvez até sem perceber que se trata de um sistema linear, utilizando um método algébrico:

Possível Solução 2: Chamando os coeficientes de x, y, z e w temos $xAl_2O_3+yHCl \rightarrow zAlCl_3+wH_2O$. Considerando o Al, temos 2x=z. Considerando o O, temos 3x=w. Considerando o H, temos y=2w.

E considerando Cl, temos y=3z.

Se, por exemplo, x=1, teremos a solução x=1, y=6, z=2 e w=3.

I: Neste tipo de resolução, é possível que apareçam respostas diferentes, pois se obtém uma relação de dependência entre as variáveis do problema, fica mais fácil para os alunos a visualização de que não existe uma resposta única para este problema.

Neste momento o professor, com a intenção de que os alunos reflitam sobre sua resolução, pode fazer a seguinte pergunta:

P: E se tivéssemos reações do tipo $5NaHCO_3+3HCl \rightarrow NaCl+H_2O+CO_2$ e $Al_2O_3+HCl \rightarrow 6AlCl_3+H_2O$? A forma de resolução que vocês utilizariam seria a mesma? O tipo de resposta obtido seria o mesmo?

I: Da forma como foram propostas agora, a primeira reação seria impossível de ser balanceada (sistema impossível) e a segunda reação teria uma única opção de balanceamento (sistema possível determinado).

Os alunos que fizeram a resolução por tentativa provavelmente perderiam mais tempo tentando balancear a equação, e poderiam perguntar:

A_5: Professora, não consigo encontrar os coeficientes, tem algum erro neste exercício?

P: Não existem erros no enunciado. Você poderia de alguma forma certificar-se que não haverá solução para esta equação?

A_5: Bom, se nenhuma das minhas tentativas deu certo acho que isso já serve não é?

P: Mas, e se você não testou justamente os valores que dariam certo? Como você poderia testar todos os valores existentes?

A_5: É verdade, talvez se eu mudasse a forma de resolver, como outros alunos fizeram, daria certo?

P: Acho uma boa opção, converse com seus amigos e tente outros métodos.

I: A intenção com essas discussões é que os alunos verifiquem algebricamente a inexistência de solução e que percebam a necessidade da construção de um método mais eficiente e mais abrangente.

Alguns alunos podem ter recordado os conceitos de sistemas de equações lineares e até mesmo ter utilizado alguns métodos já aprendidos para a sua resolução, como o método da substituição, entre outros. O professor deve promover uma discussão com a turma sobre estes métodos, suas vantagens e desvantagens e fazer a formalização de sistemas de equações lineares.

Possível Solução 3: Chamando os coeficientes de x, y, z e w temos $xAl_2O_3+yHCl \rightarrow z\,AlCl_3+wH_2O$.

Montando uma equação para cada elemento químico da reação:

Considerando o Al, temos 2x=z.

Considerando o O, temos 3x=w.

Considerando o H, temos y=2w.

E considerando Cl, temos y=3z.

Obtendo o sistema linear

$$\begin{cases} 2x & & -z & & =0 \\ 3x & & & -w & =0 \\ & y & & -2w & =0 \\ & y & -3z & & =0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (nesta etapa pode ser utilizado qualquer um dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares), obtém-se a solução $\left\{\frac{z}{2}, 3z, z, \frac{3z}{2}\right\}$ para z um número inteiro qualquer .

Escolhendo $z = 2$ temos a solução $\{1,6,2,3\}$ que são os coeficientes estequiométricos.

I: Solicitar então às duplas que reescrevam a solução obtida organizando melhor as ideias ou corrigindo possíveis falhas e entreguem ao professor.

É importante ressaltar que esta THA contempla apenas algumas das possibilidades de exploração do problema proposto, e que os objetivos de aprendizagem e o desenvolvimento das atividades podem ser alterados de acordo com a interação entre alunos e professor.

Analisemos e interpretemos as possíveis resoluções e discussões apresentadas na THA evidenciando os processos do PMA que podem ser mobilizados em cada uma das respostas.

A *Possível Solução 1* pode representar um aluno hipotético que soube identificar as variáveis do problema e relacionar os coeficientes de acordo com o tipo de elemento químico da reação, ou seja, não apresentou problemas na interpretação do problema. Ele ajusta os coeficientes comparando os dois termos da equação até obter coeficientes que balanceiem a reação.

Na sequência, é utilizada a estratégia de tentativa e erro, sem estabelecer incógnitas para representar os coeficientes, o que pode significar uma dificuldade do aluno em utilizar este tipo de representação simbólica. Para saber se esta dificuldade realmente existe o professor deve estimular o aluno, por meio das questões apresentadas na THA ou até de outros problemas, a apresentar uma resolução formal para o problema.

Dentre as fases que constituem os processos de aprendizagem matemática propostas por Dreyfus (2002), infere-se que o aluno esteja na primeira fase, utiliza uma única representação para o problema. Quanto aos processos do PMA apresentados pelo autor, não é possível afirmar que o aluno hipotético apresenta indícios dos processos envolvidos na representação do conceito de sistemas de equações lineares.

Na *Possível Solução 2*, podemos identificar um aluno hipotético que utilizou uma representação simbólica para os coeficientes estequiométricos e construiu equações lineares para cada elemento químico da reação. É possível afirmar que não houve dificuldades de interpretação e nem nas manipulações algébricas necessárias.

Para obter o valor dos coeficientes da equação o aluno atribuiu um valor qualquer a uma das variáveis e substituindo nas equações construídas obteve o valor das demais variáveis. É possível que este aluno tenha percebido a possibilidade de outras respostas para o problema, mas isso não foi evidenciado; uma forma de verificar se esta percepção ocorreu seria questionando o aluno o porquê da escolha daquele valor (x=1) em sua resolução e se esta escolha poderia ser diferente. Infere-se que este aluno tenha transitado pelas três primeiras fases que constituem os processos de aprendizagem matemática, utilizando mais de uma representação em paralelo e estabelecendo ligações entre essas representações, porém ao obter apenas uma possível resposta para o problema, não podemos afirmar que este aluno realizou a síntese, integrando e flexibilizando a mudança entre as representações.

O aluno hipotético apresentou em sua resolução os seguintes processos envolvidos na representação: representação simbólica, representação mental, visualização e tradução, porém não apresentou indícios de sintetização e generalização, processos envolvidos na abstração.

Finalmente, na *Possível Solução 3*, é feita a interpretação do problema, a representação algébrica das relações entre os elementos químicos, chegando à construção de um sistema de equações lineares que represente o problema. Nota-se a utilização de mais uma representação em paralelo e a possível integração das representações, uma síntese, no momento em que é apresentada a solução possível e indeterminada do sistema linear.

Estes são indícios de que o aluno hipotético percebeu a dependência de uma variável para a obtenção de uma solução particular e obtém esta solução particular tomando um valor para a variável z, constituindo um processo parcial da abstração.

Além dos processos da representação, é possível observar que o aluno atingiu o processo de sintetização, presente na abstração.

Nesta possível solução evidencia-se um aluno que interiorizou o conceito de sistemas lineares, cabendo agora ao professor explorar outros métodos ou técnicas de resolução e, por meio das discussões propostas na THA, verificar se houve a compreensão dos tipos de soluções e das classificações de um sistema de equações lineares.

Considerações Finais

Como observamos nas análises, no processo de ensino-aprendizagem em matemática, a THA se mostra como uma ferramenta de apoio para o professor, proporcionando a este a reflexão sobre novas possibilidades e direcionamentos para suas aulas e encorajando a utilização de metodologias diversificadas. Notemos que estas análises foram feitas baseadas apenas em supostas resoluções do problema que chegaram a uma resposta correta, na aplicação desta THA poderão surgir também resoluções incompletas e com resposta incorreta, casos que serão foco para uma pesquisa futura.

Assim, a análise dos processos do pensamento matemático que uma tarefa pode atingir pode auxiliar o professor na construção de tarefas e na decisão sobre quais indagações fazer a seus alunos, como auxiliá-los na apropriação de um conceito, promovendo uma aprendizagem reflexiva onde os alunos questionem, discutam, investiguem e aprendam a pensar matematicamente.

Referências

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática*. Brasília, Distrito Federal: MEC/SEF, 1998.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (p. 25-41). Dordrecht: Kluwer, 2002.

GERETI, L. C. V. *Processos do Pensamento Matemático Avançado Evidenciados em Resoluções de Questões do ENADE*. 2014. 138 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

GRAY, E.; PINTO, M.; PITTA, D.; TALL, D. Knowledge Construction and Diverging Thinking in Elementary & Advanced Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 38, n. 1-3, pp. 111-133, Springer, 1999.

LAMONATO, M.; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké*, Campinas, v. 19, n. 36, p. 51-74, 2011.

ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema.* Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PINTO, Márcia M. F. Educação matemática no ensino superior. *Educação em Revista.* Belo Horizonte, n. 36, p. 223-238, 2002.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 26, n. 2, p. 114-145, 1995.

SIMON, M. A., e TZUR R. Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*. v. 6, n. 2, p. 91-104, 2004.

TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. A. J. Bishop, Cambridge, U. K, 2002.