TEOREMA DE PITÁGORAS: DO GEOMÉTRICO AO ALGÉBRICO

Nathalia da Rosa Lopes[1]

Luciano de Oliveira[2]

Mauricio Ramos Lutz[3]

Educação Matemática no Ensino Superior

Resumo: Os alunos do ensino fundamental conhecem o Teorema de Pitágoras como uma fórmula que o professor apresenta para calcular um lado de um triângulo retângulo e que "dá certo", mas não conseguem entender o porquê ela é válida. Então é essencial que o professor tenha esse conhecimento para apresentá-lo de forma clara e objetiva aos estudantes. A demonstração por meio da área de quadrados sobre os lados do triângulo retângulo é a mais conhecida entre os estudantes de Licenciatura em Matemática, então a intenção desse minicurso foi trazer uma maneira diferente desses discentes perceberem o Teorema de Pitágoras para levarem para seus futuros alunos em sala de aula. Assim, foram selecionadas três demonstrações, das mais de 400 existentes, para fazer uma oficina que contemple a parte geométrica e algébrica do referido Teorema, assim como a utilização das mídias digitais, que nesse caso será o *software GeoGebra*.

Palavras Chaves: Teorema de Pitágoras. Demonstração. Ensino e aprendizagem.

Introdução

O ensino e aprendizagem de matemática, em algumas ocasiões, pode ser encarado como uma prática tediosa, rotineira, no qual existem reproduções de métodos de ensino, como uma aula sempre na mesma forma e ordem. O professor entra na sala de aula, apresenta a definição, exemplos e inúmeros exercícios, sem ter um sentido prático para o aluno. Porém, à medida que vão surgindo dificuldades – questionamento da aplicabilidade do conteúdo – é interessante que novas propostas didáticas venham a ser colocadas em prática para melhorar a aprendizagem da classe. Porém, sabemos que não são todos os professores que trabalham assim. De acordo com Costa (2005, p.1264): "tanto a prática do ensino quanto a prática da aprendizagem foram associadas à reprodução e à repetição do mesmo, do igual, do semelhante."

Mas agora perguntamos: Como criar um sujeito de direitos e deveres, livre e autônomo? Será que isso é possível? Sim, acreditamos que é possível, porém não é fácil enfrentarmos um cotidiano dentro de uma escola, seja pública ou não, na qual

[1]Mestre em Modelagem Computacional. Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Alegrete. nathalia.lopes@iffarroupilha.edu.br.
[2]Mestre em Matemática. Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Alegrete. luciano.oliveira@iffarroupilha.edu.br.
[3]Mestre em Ensino de Matemática. Instituto Federal Farroupilha – *Campus* Alegrete. mauricio.lutz@iffarroupilha.edu.br.

são enfrentados problemas como fome, prostituição, drogas, alcoolismo e violência. Hoje, somos controlados por um currículo que, muitas vezes, é rígido (no sentido de não poder ser alterado), e por um governo com políticas de universalização o ensino (ensino para todos).

Como vamos pensar na formação desse aluno questionador e investigativo se nós mesmos não nos questionamos sobre as metodologias adotadas? É muito fácil dizer que o aluno não tem maturidade para entender uma demonstração, mas será que não é falta de conhecimento e medo do professor querer trabalhar com demonstrações em sala de aula? Muitas vezes, por comodidade, nem questionamos nossos métodos. Temos, sim, a obrigação e a necessidade de fazermos com que esse estudante desenvolva o pensamento científico (matemático).

Pensando assim, considera-se importante promover uma situação didática, que consiste em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos, visando à construção do conhecimento a partir da interação entre aluno-problema-professor. Este minicurso tem como objetivo apresentar demonstrações do Teorema de Pitágoras realizando um paralelo entre a construção geométrica e a algébrica.

As Demonstrações em Sala de Aula

Durante muitos anos, a demonstração esteve associada particularmente ao ensino da Geometria, sendo vista como algo a ser memorizado (PONTE; MATOS; ABRANTES, 1998). Atualmente, com o surgimento de novas tecnologias e estudos na área de Educação Matemática, tem ocorrido um novo enfoque da Matemática na sala de aula, possibilitando a realização de experiências, a formulação de hipóteses e a obtenção de novos conhecimentos. Para Artigue (2002) e Kieran (2007), os alunos podem e devem associar o uso das tecnologias com o trabalho baseado em papel e lápis, de modo a construírem uma aprendizagem instigadora e questionadora.

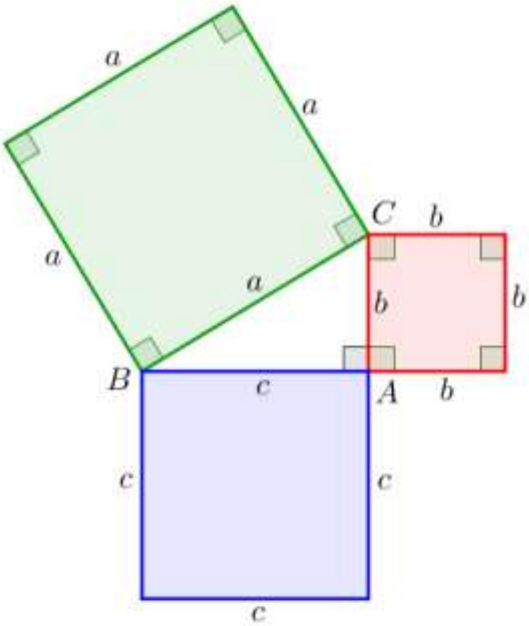
A demonstração é considerada o alicerce da compreensão em Matemática e é fundamental para o desenvolvimento, criação e comunicação do conhecimento matemático. Logo, se não desenvolvermos em sala de aula, podemos criar dificuldades na forma do pensar dedutivo de nossos alunos (STYLIANIDES; STYLIANIDES, 2008). Nesse sentido defendemos o desenvolvimento das demonstrações na sala de aula, o que deve auxiliar e desenvolver o raciocino lógico dedutivo desses alunos.

O Teorema de Pitágoras

Pitágoras foi fundador de uma escola de pensamento grega denominada de pitagórica onde se estudavam principalmente as propriedades dos números e a aritmética, junto com a geometria, a música e a astronomia. Os ensinamentos da escola se davam através da oralidade e era costume dos pitagóricos atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, assim é difícil saber exatamente que descobertas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da escola. Não se sabe se foi o próprio Pitágoras que descobriu um dos mais importantes teoremas da matemática, o Teorema de Pitágoras, pois o mesmo pode ter sido descoberto por outro membro da escola, e ter sido atribuída ao mestre.

O Teorema de Pitágoras estabelece uma relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Esta relação pode ser expressa do seguinte modo: em um triângulo retângulo, o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois. Geometricamente o Teorema de Pitágoras pode ser interpretado como na Figura 1.

Figura 1 – Representação geométrica do Teorema de Pitágoras.



Fonte: (Próprio autor).

O triângulo ABC é retângulo em A, e as medidas dos lados são respectivamente *a*, *b* e *c*. Assim, a medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo ABC de medida *a*, é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos do triângulo ABC de medidas *b*, e *c*. Isto é $a^2 = b^2 + c^2$

O professor Elisha Scott Loomis, de Cleveland, Ohio, pesquisou e catalogou mais de trezentas e sessenta demonstrações do Teorema de Pitágoras em seu "The Pythagorean Proposition", cuja segunda edição foi publicada em 1940. Hoje sabemos que existem mais de quatrocentas demonstrações deste teorema.

Na Trigonometria, usamos a relação de Pitágoras para encontramos sua Relação Fundamental. Na Geometria Analítica, usamos a relação de Pitágoras para obtermos a distância entre dois pontos que é o alicerce para a obtenção das equações das cônicas. No estudo dos Números Complexos, o módulo é obtido a partir do Teorema de Pitágoras. Na Geometria Plana e Espacial, o uso do Teorema de Pitágoras é essencial para a obtenção do apótema de um polígono regular, a determinação da altura do cone e da pirâmide, a obtenção do raio de uma calota esférica, a resolução de problemas de inscrição e circunscrição de sólidos em outros. Verificamos, portanto, a enorme aplicabilidade do Teorema de Pitágoras em diversos ramos da matemática.

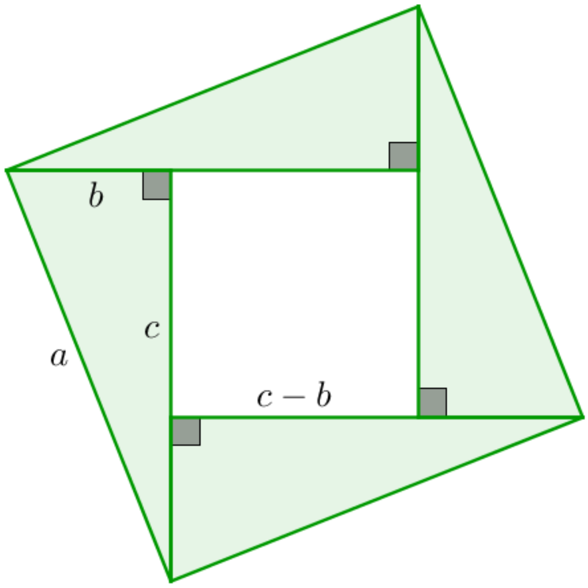
Desenvolvendo a Oficina

Para esse minicurso foi pensando o desenvolvimento de 3 demonstrações distintas do Teorema de Pitágoras iniciando com apresentação geométrica (baseado na comparação de áreas) e terminando com a algébrica (baseado nas relações métricas nos triângulos retângulos). Para finalizar todas as construções será utilizado a *software Geogebra* para mostrar de uma forma dinâmica e interativa tais demonstrações.

A primeira demonstração que realizaremos será por equivalência de áreas e é atribuída a Bhaskara (hindu, século XII d.C.). Inicialmente vamos entregar uma folha A4 para os alunos, na qual eles vão construir 4 triângulos iguais, para isso irão desenhar dois retângulos iguais, de lado *b* (menor) e *c* (maior) e dividi-lo ao meio por uma de suas diagonais.

Após esta etapa iremos montar um quadrado de lado *a* com os 4 triângulos, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2 – Construção geométrica da demonstração.



Fonte: (Próprio autor).

Na Figura 2, o quadrado maior de lado *a* é composto por 4 triângulos retângulos congruentes cujas medidas das hipotenusas e dos catetos são *a*, *b* e *c*, respectivamente, e por um quadrado menor central que tem como medida o lado *c* – *b*. A área do quadrado maior é a^2 e também pode ser calculada através das figuras que o compõe, ou seja, dos quatro triângulos retângulos mais do quadrado pequeno (central) assim temos:

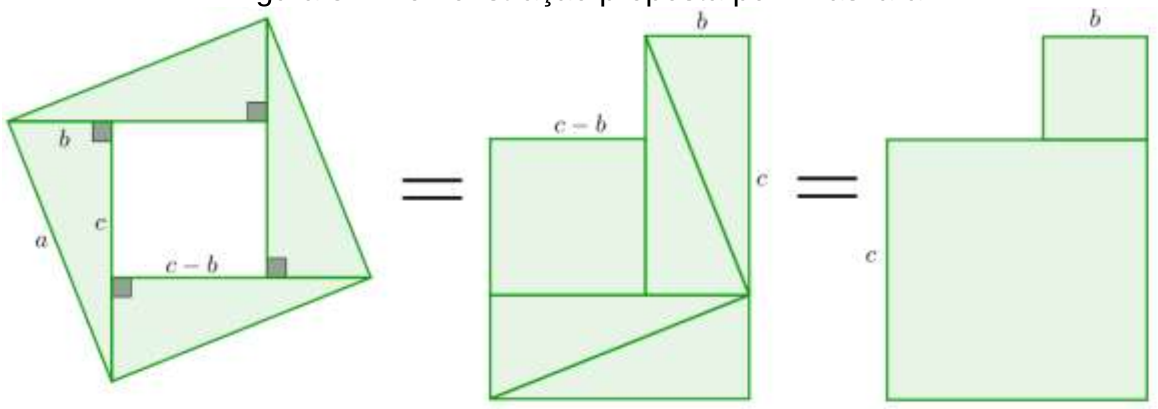
$$a^2 = 4.\frac{b.c}{2} + (c - b)^2 \Rightarrow a^2 = 2.b.c + c^2 - 2.b.c + b^2$$

Realizando as devidas simplificações obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Também apresentamos, na Figura 3, outra ilustração geométrica da demonstração proposta por Bhaskara.

Figura 3 – Demonstração proposta por Bhaskara.



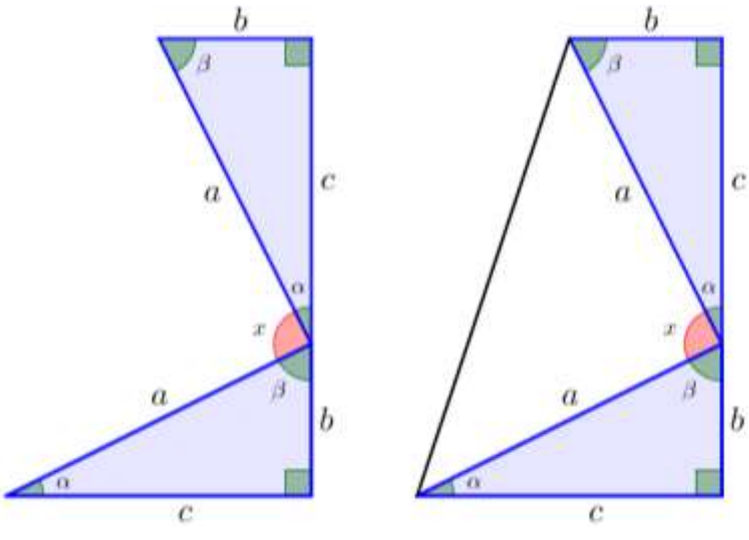
Fonte: (Próprio autor).

A segunda demonstração, por comparação de área, foi realizada pelo ex-presidente James Abram Garfield (1831 – 1881) do Estados Unidos.

Essa construção utilizará dois dos triângulos construídos anteriormente.

Inicialmente irão posicionar um triângulo retângulo, de catetos *b* e *c* e hipotenusa *a*. Em seguida deverão colocar o outro triângulo, em outra posição e com dois vértices coincidindo, conforme apresentado na Figura 4 (esquerda). Dessa forma, colocar-se-á em alinhamento o cateto *b* de um dos triângulos, com o cateto *c* do outro. Em seguida, vamos "fechar" a figura com um segmento de reta, veja Figura 4 (direita), obtendo um trapézio retângulo constituído pelos dois triângulos retângulos iniciais (iguais) e um outro triângulo, que vamos demonstrar, posteriormente que é também um triângulo retângulo.

Figura 4 – Construção geométrica da demonstração.



Fonte: (Próprio autor).

Precisamos mostrar que o ângulo *x* tem medida de 90º, para confirmar a afirmativa de que o terceiro triângulo (triângulo maior), é também retângulo.

Como o triângulo inicial (triângulo menor) é retângulo, temos que os ângulos α e β somam 90º, pois sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Sendo assim, α + β + 90° = 180°, portanto α + β = 90°.

Dessa forma, olhando os três ângulos formados em torno do ponto de encontro dos dois triângulos menores, e do mesmo lado de uma reta, teremos que α + β + *x* = 180º (ângulo raso), nos levando a concluir que *x* mede também é 90º e o triângulo maior é também retângulo.

Observe ainda que as três partes unidas formam um trapézio retângulo, cuja altura é dada por b + c e cujas bases são b e c. Por outro lado, a mesma área é também igual à soma das áreas de 3 triângulos retângulos. Logo:

$$\frac{b.c}{2}+\frac{b.c}{2}+\frac{a.a}{2}=\frac{(b+c).(b+c)}{2} \Rightarrow 2.b.c+a^2=b^2+2.b.c+c^2$$

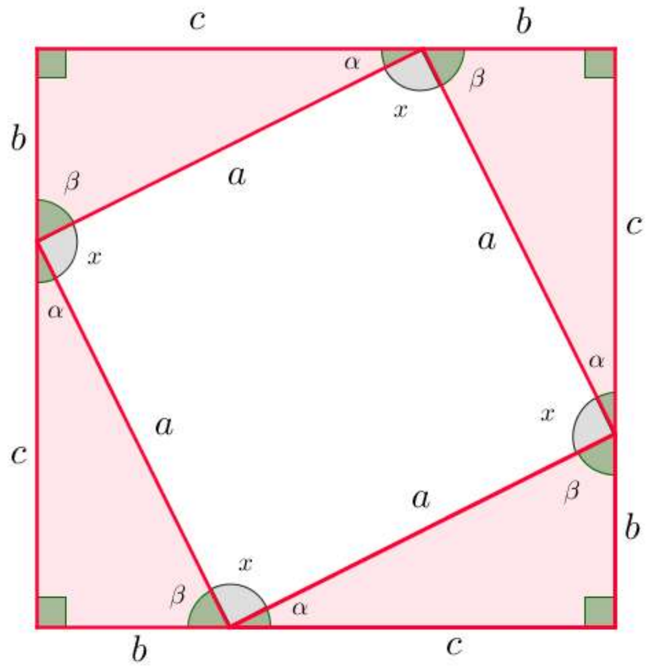
Efetuando as devidas simplificações obtemos:

$$a^2=b^2+c^2$$

Que nos leva a concluir o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo.

A terceira e última demonstração, também será usando áreas. Novamente será utilizado os 4 triângulos construídos na primeira demonstração. Para isso deverá ser alinhado o cateto *b* de um dos triângulos, com o cateto *c* do outro, conforme apresentado na Figura 5. Observe que após esta construção ficamos com um provável quadrado menor, no qual deveremos mostrar que se trata dessa figura.

Figura 5 – Construção a ser realizada;



Fonte: (Próprio autor).

Para a figura menor ser um quadrado, devemos mostrar que o ângulo *x* tem medida de 90º. Como todos os triângulos são por construção triângulos retângulos, sabemos que a soma dos ângulos α e β é 90º, pois a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. Logo, α + β + 90° = 180°, portanto α + β = 90°.

Assim sendo, os três ângulos formados em torno do ponto de encontro dos dois lados *b* e *c* é um ângulo raso, portanto α + β + *x* = 180º, no qual podemos concluir que *x* mede também 90º, logo a figura é um quadrado, pois tem todos seus lados iguais e seus ângulos internos medindo 90°.

Observe que o quadrado maior, de lado *b* + *c*, pode ser decomposto em 4 triângulos retângulos e um quadrado menor de lado *a*. Assim, a área do quadrado de lado *b* +*c* é igual à soma das áreas dos 4 triângulos retângulos mais a área do quadrado menor de lado *a*. Logo:

$$4\frac{b.c}{2} + a^2 = (b+c)^2 \Rightarrow 2.b.c + a^2 = b^2 + 2.b.c + c^2$$

Novamente, efetuando as simplificações obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Salientamos que existem muitas outras demonstrações do Teorema de Pitágoras, porém devido ao tempo desse minicurso, optamos apenas por estas 3 demonstrações.

Algumas Considerações

A matemática foi criada com o objetivo de resolver problemas práticos de contar, medir e calcular. À medida que ela foi evoluindo, os raciocínios ficaram mais abstratos e foram necessárias a criação de definições, fórmulas, teoremas e suas demonstrações.

Ao encontro dessa afirmação está o desenvolvimento do Teorema de Pitágoras e sua demonstração. Para compreendê-la é necessário fazer a abstração de conhecimentos básicos da matemática, mas que precisam estar bem estruturados.

Para compreender a demonstração desse Teorema, o primeiro passo é conhecê-la, e esse foi nosso objetivo, levar esse conhecimento até os futuros professores de matemática. Assim, esse trabalho busca mostrar uma nova visão do Teorema de Pitágoras para os estudantes de licenciatura em matemática, mostrando que além de ser possível deixar a aula mais lúdica, também é possível aprofundar um pouco mais os conceitos matemáticos dos alunos de ensino básico.

Referências

COSTA, Sylvio de Souza Gadelha. De fardos que podem acompanhar a atividade docente ou de como o mestre pode devir burro (ou camelo). **Educação e Sociedade**. vol. 26, n. 93, (Set/Dez), 2005, p. 1257-1272.

PONTE, João Pedro da; MATOS, José Manoel; ABRANTES, Paulo. **Investigação em educação matemática:** Implicações curriculares. Lisboa: IIE, 1998.

ARTIGUE, Michèle. Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**,Dordrecht, The Netherlands, v.7, n.º 3, p. 245-274, out., 2002.

KIERAN, Carolyn. Interpreting and assessing the answers given by the CAS expert: A reaction paper. **The International Journal for Technology in Mathematics Education**, Plymouth, UK, v. 14, n. 2, p.103-108, abr./jun., 2007.

STYLIANIDES, Gabriel, STYLIANIDES, Andreas. Proof in School Mathematics: Insights from Psychological Research into Students' Ability for Deductive Reasoning. **Mathematical Thinkingand Learning**, Mahwah, New Jersey, v. 10, n. 2, p. 103-133, abr., 2008.