VII CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DA MATEMÁTICA

ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil.

04, 05, 06 e 07 de outubro de 2017

ESBOÇANDO CURVAS NO ENSINO MÉDIO A PARTIR DA NOÇÃO DE INFINITÉSIMO

Bárbara Cristina Pasa[1]

Méricles Thadeu Moretti[2]

Mesa Redonda

Resumo: O esboço de uma curva bem como sua leitura e interpretação são atividades fundamentais para compreender fenômenos nas diversas áreas do conhecimento. As reflexões suscitadas neste trabalho perpassam o esboço de curvas de funções trabalhadas no ensino médio com base na abordagem de interpretação global das propriedades figurais, preconizada por Raymond Duval, utilizando como recurso a noção de infinitésimo. Na perspectiva desta abordagem, o reconhecimento e a coordenação de variáveis visuais, pertinentes ao registro de representação gráfico, e de unidades simbólicas significativas, pertinentes ao registro de representação algébrico (simbólico) decorrem do estudo da taxa de variação da função, calculada e compreendida a partir da noção de infinitésimo.

Palavras Chaves: Esboço de curvas. Interpretação global. Noção de infinitésimo.

INTRODUÇÃO

O esboço e a compreensão de curvas perpassam diversas atividades e áreas da vida humana sendo utilizados abundantemente para representar fenômenos e situações quotidianas. Por este motivo, o esboço de curvas é trabalhado, em âmbito escolar, no ensino fundamental, médio e superior, em diferentes disciplinas. Contudo, tanto o cenário educacional, em todos os níveis de ensino, como as pesquisas na área de Educação Matemática demonstram as fragilidades do ensino e aprendizagem do esboço de curvas e da compreensão do fenômeno a qual ela representa.

Algumas pesquisas abordam as dificuldades de compreensão relacionadas ao esboço de curvas especificamente no ensino médio. Em trabalho de Matos Filho e Menezes (2010), os autores, ao analisarem os procedimentos utilizados pelos alunos neste nível de ensino na construção e na interpretação de gráficos das funções polinomiais de 1º e 2º graus, concluíram que a observação gráfica não é uma estratégia utilizada pelos alunos em resoluções de questões em que isso é

---

[1] Mestre em Matemática Aplicada no Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada (PPGMAp) da UFRGS. Doutoranda do PPGECT na UFSC. Docente da UFFS, Erechim, RS, Brasil. E – mail: bapasa1@hotmail.com

[2] Doutor em Didática da Matemática pela ULP/Estrasburgo – França. Professor permanente do PPGECT/UFSC. E-mail: mthmoretti@gmail.com

possível. A necessidade de justificativas algébricas ou aritméticas na resolução dos problemas, segundo os autores, é o reflexo da incompreensão do próprio sistema cartesiano, da localização de pontos no plano cartesiano, da identificação de variáveis dependentes e independentes de uma função e, assim, da construção e interpretação gráfica.

Além disso, as pesquisas de Mattos Filho e Menezes (2010), Rezende (2003), (2007) e Duval (2011a), apontam que as dificuldades de compreensão e esboço de curvas estão também relacionadas ao ensino tradicional em que o esboço é realizado por meio de pontos obtidos em tabelas. Segundo estes autores, este tipo de enfoque, se único, dificulta a visualização dos estudantes quanto à transformação, o movimento e o dinamismo existente nesse conceito. Segundo Rezende (2003), a compreensão de uma curva perpassa o entendimento da variação da função a qual representa; não somente de como ela varia, mas quanto ela varia, sinalizando a importância de desenvolver no ensino médio noções do cálculo.

Embasados nestas ideias, Botelho (2005) e Rezende (2007) realizaram um mapeamento do ensino de funções reais no ensino médio a partir da análise de livros didáticos e cuja pergunta norteadora foi: “Como os livros didáticos abordam cada um dos problemas construtores do Cálculo, isto é, como os livros didáticos abordam o ensino das funções reais tendo como pano de fundo as ideias e conceitos inerentes do Cálculo (variabilidade e processos infinitos e/ou infinitesimais)?”.

Os mapas da função afim construídos demonstram que a maioria dos textos pesquisados segue a seguinte ordem: definição e caracterização algébrica, estudo dos elementos e das propriedades algébricas (domínio, imagem, zeros, “sinal da função”, injetividade e sobrejetividade) e, por fim, esboço do gráfico da função mediante uma tabela de valores. Apenas dois dos textos pesquisados fazem referência à taxa de variação da função afim.

Para a função quadrática, a quase totalidade dos textos desenvolve o assunto da mesma forma como da função afim: no âmbito algébrico. Ou seja, estudam-se os elementos e as propriedades algébricas e o gráfico da função é elaborado mediante uma tabela de valores. Apenas um dos textos analisados foge à regra e comenta a respeito da taxa de variação deste tipo de função.

Com base neste mapeamento, alguns pontos sobre o esboço que tradicionalmente permeia o ensino de curvas, apresentados em Rezende (2007), merecem destaque:

- existe a predominância de um ensino baseado na abordagem algébrica e estática do conceito de função;
- crescimento e decrescimento de uma função não são abordados;
- não se discute sobre os pontos críticos;
- uma função é estabelecida em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y” e não no contexto da variabilidade;
- o gráfico da função é, em geral, esboçado a partir de uma tabela de valores notáveis;
- a noção de “taxa de variação” é considerada em poucos livros;
- os exercícios resolvidos ou sugeridos nos textos já apresentam a expressão da função que modelam o problema, ou seja, a relação funcional que modela o problema é fornecida sem o aluno ser instigado a descobrir.

Essas ideias confirmam a ausência, no ensino, de tópicos que analisam o comportamento destas funções sob o ponto de vista da variabilidade nos livros didáticos pesquisados. E, considerando a importância de estudar como ocorre a variação de uma grandeza em função da variação da outra, torna-se essencial que a atividade envolvida no esboço de uma curva não se baseie apenas na aprendizagem de técnicas algébricas de resolução de equações e inequações, mas mais do isso, promova compreensões significativas quanto à variação.

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A INTERPRETAÇÃO GLOBAL DE ESBOÇO DE CURVAS

A impossibilidade de acessar perceptivelmente e instrumentalmente os objetos matemáticos fez com que fossem criadas, ao longo da história humana, diversas formas de representá-los. De acordo com Raymond Duval, um objeto matemático pode ser dado e acessado somente através de representações, as quais podem ser muito distintas. Porém, uma representação não é o objeto matemático e torna-se essencial, para a compreensão de um objeto matemático, jamais confundi-lo com suas representações (DUVAL, 2003, p. 14). Estas características tornam a atividade matemática peculiar e distinta de outras áreas da ciência, além de fontes de diversas dificuldades relacionadas ao seu ensino e aprendizagem.

De acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, a aprendizagem matemática está relacionada, entre outras coisas, à coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica. Esta coordenação, chamada por Duval de conversão, pode ser fonte das dificuldades de compreensão, devido aos aspectos vinculados às questões de não congruência entre os registros de representação semiótica. Estas dificuldades estão presentes em certa medida em todas as áreas da Matemática e aparecem de forma abundante no *esboço de curvas*.

Sobre este objeto matemático especificamente, Duval (2011a) credita as dificuldades de aprendizagem à articulação entre os registros gráfico e algébrico. Se esta atividade de conversão, do registro algébrico para o gráfico, for realizada somente associando pares ordenados de números a pontos no plano cartesiano, ela será uma simples codificação e possibilitará apenas uma leitura pontual da representação gráfica, gerando uma apreensão superficial e dificuldades de compreensão do objeto. Mesmo identificando inúmeros pontos de uma mesma curva no plano cartesiano a partir da associação de pares de números, Silva (2008) enfatiza que "o procedimento não é suficiente para garantir o traço contínuo que representa a curva graficamente e muito menos a compreensão deste processo" (p.30).

Uma apreensão global e qualitativa do esboço de curvas, no entanto, torna-se possível desde que nesta atividade de conversão, por exemplo, para a função afim ($y = ax + b$), se consiga levar em conta tanto os valores escalares das equações (coeficientes) enquanto registros de saída, quanto as variáveis visuais próprias da representação gráfica (inclinação, concavidade, intersecção com os eixos) enquanto registro de chegada. Isto, pois, segundo Duval (2003, p. 15), para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, é fundamental a articulação entre as variáveis cognitivas que são particulares do funcionamento de cada um dos dois registros e que determinam quais as unidades de significado pertinentes em cada um dos dois registros.

Diante disso, para este autor, as dificuldades no esboço de curvas se encontram na "falta de conhecimento das *regras de correspondência semiótica* entre o registro de representação gráfica e o registro da expressão algébrica" (DUVAL, 2003, p. 97, grifo nosso). Esta falta, por sua vez, pode ser provocada por um ensino que não possibilita a conversão entre registros e se atém exclusivamente à passagem do registro algébrico para o gráfico através de uma *abordagem ponto a ponto*, o que, segundo este autor (2011a), constitui um obstáculo para a aprendizagem. Duval (2009) também ressalta que, se a conversão ocorre no sentido *escrita algébrica de uma equação → gráfico*, nenhuma dificuldade específica parece surgir, contudo, quando o sentido é inverso, os estudantes apresentam mais dificuldades. Isto, pois as unidades significativas de um gráfico não são determinadas em relação aos pontos encontrados e sim por valores visuais do gráfico, destacado pelos dois eixos orientados. Ou seja, *unidades significativas* da expressão algébrica correspondem a *variáveis visuais* gráficas e discriminar essas duas é essencial para leitura correta dos gráficos (DUVAL, 2009).

No ensino de representações gráficas são possíveis abordagens distintas, as quais não consideram os mesmos dados visuais. São elas:

- *abordagem ponto a ponto*: consiste em, tendo como referência os eixos graduados, encontrar alguns pontos particulares (pares de números) e marcá-los no plano referencial. Esta é a abordagem mais utilizada, senão a única, no ensino tradicional. Ela pode favorecer o traçado da função afim ou de intervalos de outras funções.

- *abordagem de extensão do traçado*: corresponde às atividades de interpolação e extrapolação de representações gráficas. De acordo com Duval (2011b), essa abordagem se mantém puramente mental e se apoia em um conjunto infinito de pontos (p. 98) e, como a abordagem “ponto a ponto”, não considera as variáveis visuais pertinentes da representação gráfica, mantendo a busca por pontos particulares e não relacionando com a expressão algébrica.

- *abordagem de interpretação global das unidades figurais*: sendo o objeto representado pela imagem formada no conjunto traçado/eixos e também por uma expressão algébrica, esta abordagem consiste em perceber as modificações que a mudança do gráfico gera na expressão algébrica e vice e versa e identificar as variáveis visuais pertinentes relacionadas às modificações. Ou seja, é a identificação das variáveis visuais pertinentes que permite a articulação entre registros, e assim, a compreensão.

A partir da abordagem de interpretação global das unidades figurais a curva não é mais vista como a ligação de pontos no plano cartesiano, mas sim como uma associação entre variáveis representativas visuais e simbólicas da expressão algébrica (DUVAL, 2011b). Mais do que fazer um desenho ou imagem geométrica que representa uma equação, a abordagem que permite a *interpretação global das propriedades figurais,* possibilita a identificação de quais modificações na expressão algébrica refletem em modificações na expressão gráfica da curva, e vice e versa. Para tanto, é necessário um reconhecimento de variáveis visuais, pertinentes ao registro de representação gráfico, e de unidades simbólicas significativas, pertinentes ao registro de representação algébrico (simbólico) e, mais do que isso, *coordená-las*.

Esta abordagem é detalhada em Duval (2011a), onde é possível encontrar profunda discussão sobre o esboço da curva da função polinomial do primeiro grau ($y = ax + b$). As discussões se baseiam na análise qualitativa no sentido de perceber nos parâmetros do registro algébrico as implicações gráficas, por exemplo, no coeficiente angular a, o sentido da inclinação da reta.

Pesquisas na área de Educação Matemática relacionadas ao estudo de funções vem sendo inspiradas e embasadas nesta abordagem (Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), Moretti (2003), Luiz (2010), Moretti e Luiz (2010), Silva (2008), Corrêa e Moretti (2014)). Os trabalhos discutem diferentes *recursos* e/ou *elementos* que permitem a associação entre *variáveis visuais* e *unidades significativas algébricas* no sentido de uma *interpretação global da curva*. Moretti (2003), por exemplo, propõe esta abordagem para o esboço de curvas das funções quadráticas a partir da utilização do recurso da translação a fim de manter a relação entre variável visual de representação e unidade significativa da escrita algébrica destas funções. Silva (2008) e Corrêa e Moretti (2014) estudam o esboço de curvas de funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, utilizando como recursos a translação e a simetria em paralelo com as unidades significantes da expressão algébrica (CORRÊA, MORETTI, 2014, p. 44). As funções do ensino superior, supostamente mais complexas, são estudadas a partir do entendimento de limites e derivadas. Neste sentido, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) apoiam-se em um conjunto de elementos do Cálculo para orientar a conversão entre o registro algébrico e gráfico deste tipo de funções.

CAMINHO ALTERNATIVO PARA ESBOÇAR E COMPREENDER CURVAS

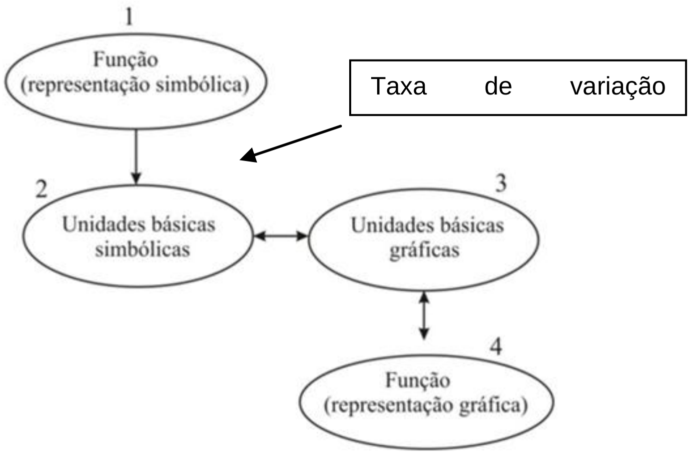
Levando em consideração as dificuldades que permeiam o trabalho escolar tradicional “ponto a ponto” com o esboço de curvas, a importância e abrangência deste objeto matemático no ensino médio e da interpretação de curvas a partir da compreensão da variabilidade; desenvolvemos um caminho alternativo para o ensino do esboço de curvas no ensino médio. Este caminho se apoia na abordagem de interpretação global das unidades figurais, preconizada por Raymond Duval e tem como foco inicial as funções polinomiais de 2º e 3º graus. Para estas funções, analisar as variações de parâmetros de funções polinomiais de grau maior que um, como realizado por Duval (2011a), torna-se dispendioso por conta da quantidade de possibilidades de variações. Assim, a sugestão é trabalhar na perspectiva da interpretação global tendo como recursos as *taxas de variação da função*.

As taxas de variação de uma função são elementos que carregam informações importantes para o esboço e interpretação de uma curva, perpassando o entendimento de diversos fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, matemáticos, etc. O estudo das taxas de variação de funções também possibilita dar significado ao estudo das funções no ensino médio, porém, a relação entre a taxa de variação de uma função e o esboço da curva é trabalhada de forma mais aprofundada somente no ensino superior.

O caminho alternativo que propomos, de acordo com Rezende (2003, 2007), demanda abordar no ensino médio conceitos intuitivos do Cálculo utilizando-os como recursos para o esboço da curva, sem a formalização das noções de limite e derivada, mas por meio da *noção de infinitésimo*. Esta noção, trabalhada de forma intuitiva para o cálculo e compreensão da variação instantânea de funções, pode proporcionar uma compreensão inicial sobre a variabilidade, essencial para o entendimento de fenômenos neste nível de ensino. Apesar das inconsistências teóricas e diferentes concepções de infinitésimos discutidas ao longo da história da ciência, atualmente os infinitésimos são estruturados teoricamente pela Análise Não Standard que surgiu somente na década de 60 do século XX, com estudos de Abraham Robinson.

Levando em conta os estudantes do ensino médio, a sugestão parte de um esquema que possibilita a compreensão e esboço de curvas de funções polinomiais neste nível de ensino, a partir do estudo da relação entre as unidades básicas gráficas e simbólicas, sem a preocupação exclusiva com a forma algébrica, mas a partir da compreensão da variabilidade da função. O esquema a seguir apresenta a ideia.

Figura 1 - Esquema do procedimento de esboço de curvas sugerido.



Fonte: Os autores, a partir de Moretti e Luiz (2010, p. 531).

O objetivo principal do trabalho nesta perspectiva não é acompanhar modificações simultâneas entre as representações simbólica e gráfica, mas sim refletir sobre a conversão no sentido de 1→2↔3↔4 por meio do estudo das taxas de variação instantâneas da função ($TVI_1(x)$ e $TVI_2(x)$), encontradas a partir da taxa média de variação da função em um intervalo infinitesimal $[x, x + \Delta x]$, dada por $TMV = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Sendo a grandeza Δx um número muito próximo de zero, de forma que às vezes pode ser desprezado, mas, ao mesmo tempo, diferente de zero, de forma que podemos dividir por ele mesmo quando isso for conveniente. Conhecendo a $TVI_1(x)$, seu estudo permite analisar a variabilidade da função e, assim, esboçar o gráfico. Além disso, para algumas funções é necessário encontrar e estudar a variação da taxa de variação instantânea, ou a taxa de variação instantânea de segunda ordem, indicada por $TVI_2(x)$, relacionada à concavidade da curva.

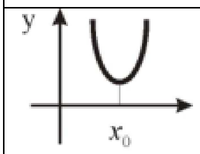
O esboço da curva é então realizado a partir do estudo do sinal da $TVI_1(x)$ e, quando necessário, da $TVI_2(x)$ da função e de unidades básicas elaboradas por Duval (2011a) e utilizadas por Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), expostas nas tabelas que seguem, as quais relacionam variáveis visuais com unidades simbólicas correspondentes.

Tabela 1: Relação entre as variáveis visuais da reta tangente a uma curva e suas unidades simbólicas.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
Sentido da declividade da reta tangente	Ascendente	$TVI(x) > 0$
	Descendente	$TVI(x) < 0$
	Constante	$TVI(x) = 0$

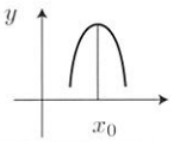
Fonte: Duval (2011a, p. 101), modificada pelos autores.

Tabela 2: Variáveis visuais e simbólicas de um mínimo relativo.

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Mínimo relativo em x_0. Taxa de variação instantânea de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} TVI(x_0) = 0 \\ TVI(x_0) < 0, x \in V^-(x_0) \\ TVI(x_0) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 106), modificada pelos autores.

Tabela 3: Variáveis visuais e simbólicas de um máximo relativo.

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	Máximo relativo em x_0. Taxa de variação instantânea de y muda de sinal positivo para negativo na vizinhança de x_0.	$\begin{cases} TVI(x_0) = 0 \\ TVI(x_0) > 0, x \in V^-(x_0) \\ TVI(x_0) < 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$

Fonte: Moretti, Ferraz e Ferreira (2008, p. 106), modificada pelos autores.

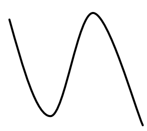
A tabela 2 apresenta uma unidade básica referente a um extremo relativo de uma função, mais especificamente um ponto de mínimo. Neste caso, a unidade básica gráfica visualizada no esboço da curva de uma função é relacionada com a unidade básica simbólica correspondente, a qual denota a taxa de variação instantânea igual a zero e a mudança de sinal de negativo para positivo para valores muito próximos de x_0. Na tabela 3, verifica-se um ponto de máximo relativo. Encontrando a $TVI_1(x)$ em um ponto genérico, a partir da noção de infinitésimos e fazendo o estudo do sinal da função é possível compreender a variação – crescimento e decrescimento e, juntamente com as tabelas 1, 2 e 3, esboçar o gráfico.

Os pontos onde a taxa de variação instantânea de primeira ordem da função é nula, ou seja, $TVI_1(x) = 0$, são pontos candidatos a máximo e/ou mínimo, absoluto e/ou relativo. Os pontos onde a taxa de variação instantânea de segunda ordem da função é nula, ou seja, $TVI_2(x) = 0$, são pontos onde a função inverte sua concavidade. A identificação destes pontos é parte importante para o esboço e compreensão da curva no ensino médio.

A fim de exemplificar o caminho alternativo, utilizamos um exemplo de função polinomial do 3º grau, já que um exemplo da polinomial do 2º grau é apresentado em artigo deste mesmo evento. Seja a função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$, o procedimento de esboço desta curva consiste em primeiro descobrir uma expressão para as declividades das retas secantes ($TMV(x)$) em um intervalo genérico e infinitesimal $[x, x + \Delta x]$; na sequência, encontra-se uma expressão para $TVI_1(x)$, assumindo $\Delta x = 0$. A variação da declividade das retas tangentes ($TVI_2(x)$) é encontrada a partir do mesmo processo, calculando, via infinitésimos, a variação da $TVI_1(x)$.

Desta forma, encontra-se $TVI_1(x) = -3x^2 - 6x + 9$ e $TVI_2(x) = -6x - 6$. Neste caso, os valores de x que anulam a $TVI_1(x)$ são $x = -3$ e $x = 1$. A tabela 4 a seguir apresenta o esboço da curva com base no estudo do sinal da $TVI_1(x)$.

Tabela 1 - Esboço da curva da função $y = -x^3 - 3x^2 + 9x + 6$ a partir da análise da $TVI_1(x)$.

Unidades básicas simbólicas		Unidades básicas gráficas		
Valores de x	$TVI_1(x)$	Reta Tangente	Esboço da curva	Pontos críticos
$x < -3$	< 0	Decrescente		Mínimo relativo em (-3,-21). Máximo relativo em (1,11).
$x = -3$	$= 0$	Constante		
$-3 < x < 1$	> 0	Crescente		
$x = 1$	$= 0$	Constante		
$x > 1$	< 0	Decrescente		

Fonte: Os autores

Para este esboço, a análise da concavidade não é fundamental, de todo modo, sendo a $TVI_2(x) = -6x - 6$, a concavidade da curva é voltada para cima em $x < -1$ e para baixo em $x > -1$. Os pontos críticos ocorrem em $x = -3$, um mínimo relativo igual a $y = -21$ e, em $x = 1$, um máximo relativo, igual a $y = 11$.

Esta mesma ideia pode ser utilizada para o cálculo da $TVI_1(x)$ genérica de todas as funções polinomiais no EM. Contudo, para funções polinomiais de grau *n*, a forma genérica da $TVI_1(x)$ é uma função polinomial de grau $n - 1$ e por isso, para funções polinomiais de grau maior que 3, dificuldades no cálculo das raízes de $TVI_1(x) = 0$ podem surgir. Além disso, para funções logarítmicas, exponenciais e trigonométricas, os contratempos ocorrerão no cálculo da própria taxa de variação instantânea.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O esboço de curvas e a compreensão do fenômeno que elas representam são atividades de suma importância em diversas áreas do conhecimento e também em tarefas cotidianas. Porém, devido às questões relacionadas ao seu ensino, em que o esboço perpassa mecanicamente a união de pontos no plano cartesiano, encontrados a partir da expressão algébrica, os estudantes demonstram muitas dificuldades. O caminho alternativo sugerido para trabalhar com o esboço de algumas funções envolve uma compreensão profunda da variabilidade da função, se embasa na abordagem de interpretação global das propriedades figurais e consiste em relacionar variáveis visuais a unidades simbólicas correspondentes da função. Esta forma de trabalhar, utilizando como recurso a taxa de variação da função, permite ao estudante uma compreensão ampla da curva e do fenômeno representado em termos de variabilidade, considerando a teoria de aprendizagem de Duval, no que tange à conversão entre registros de representação semiótica de um objeto matemático, no caso, de funções polinomiais de 2º e 3º graus.

O interesse, ao sugerir este caminho alternativo, não é validá-lo para todas as funções trabalhadas no ensino médio, mas sim, discutir possibilidades a partir da variabilidade e da interdependência entre as variáveis para aquelas funções que não exigem muito além do que o estudante trabalha neste nível de ensino. O interesse está, portanto, na análise qualitativa da perspectiva supracitada, no sentido de refletir sobre os “gestos intelectuais” (DUVAL, 2011b, p. 41) que constituem o trabalho com o esboço de curvas. Esta análise e discussões estão sendo aprofundadas com base em dados coletados em sequência didática elaborada e aplicada a estudantes do 3º ano do ensino médio.

REFERÊNCIAS

BOTELHO, L.M.L. **Funções Polinomiais na Educação Básica**: Uma Proposta. Monografia de Pós-graduação. Niterói: UFF, 2005.

CORRÊA, M. O. S.; MORETTI, M. T. Esboçando curvas de funções a partir de suas propriedades figurais: uma análise sob a perspectiva dos registros. In: BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. (Orgs.). **As contribuições da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para o Ensino e a Aprendizagem na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

_________. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_________. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. Méricles Thadeu Moretti. **Revemat**, eISSN 1981-1322. Florianópolis , v.6, n.2, p.91-112, 2011a.

_________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M.M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

LUIZ, L. S. **Esboço de curvas no ensino superior**: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. 142 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MATOS FILHO, M. S.; MENEZES, J. E. Como os alunos do ensino médio estão construindo e interpretando gráficos de funções polinomiais 1º e 2º graus. **Anais do X ENEM**, Salvador, BA, 2010.

MORETTI, M. T. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática***:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003.

MORETTI, M. T.; LUIZ, L. S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas do ensino superior. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo. v.12, n.3, p.529-547, 2010.

MORETTI, M.T.; FERRAZ, G. A.; FERREIRA, V. G. G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática**, v. XVII, n.2, 2008.

REZENDE, W. M. **O ensino de Cálculo**: dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 468 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

_______________. Um mapeamento do ensino de funções reais no ensino básico. **Anais do IX ENEM** – Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, Minas Gerais, 2007.

SILVA, M. O. **Esboço de curvas**: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.