UMA PROPOSTA PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Idemar Vizolli[1]
Rita Lopes dos Santos[2]

Resumo
Este mini-curso tem como objetivo desenvolver uma sequência didática para o processo de ensino de Progressões Aritméticas. O estudo teve origem nas reflexões sobre os modos de ensinar conceitos matemáticos para que os estudantes compreendam o que estão fazendo. Tais reflexões indicam que se faz necessário pensar em metodologias de ensino que promovam discussões e reflexões acerca do que está sendo estudado. Buscou-se na literatura elementos que pudessem auxiliar na proposição de uma metodologia de ensino que prime pela análise e reflexão e, ao mesmo tempo, coloque os estudantes como sujeitos no processo de ensino e aprendizagem. Inspirados na metodologia da Engenharia Didática, elaboramos uma Sequência Didática composta por dez atividades as quais serão desenvolvidas pelos cursistas, organizados em equipes de até quatro componentes.

Palavras-chave: Progressões Aritméticas. Sequência Didática. Engenharia Didática.

Um olhar sobre a prática

Ao ministrar aulas de Matemática na Educação Básica, percebemos que muitos estudantes apresentam dificuldades em solucionar uma série de problemas que envolvem conceitos básicos de matemática como, por exemplo, de proporção, equação e função.

A metodologia apresentada pelos livros didáticos e adotada pelos professores, nem sempre propicia condições para que os estudantes possam refletir sobre o processo de solução dos problemas que lhes são propostos, o que não se coaduna com as diretrizes estabelecidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática (PCN). Tais diretrizes estabelecem que os professores devem desempenhar papeis de mediadores, articuladores, organizadores e incentivadores das aprendizagens dos estudantes e estes, por sua vez, o de serem sujeitos no processo de ensino e aprendizagem (BRASIL, 1997). Isso requer, tanto dos professores como dos estudantes, mudanças de postura em relação ao processo de ensinar e de aprender, o que implica em mudanças de atitudes frente ao conhecimento.

1 Doutor. Universidade Federal do Tocantins. idemar@uft.edu.br
2 Acadêmica. Universidade Federal do Tocantins. ritinha@uft.edu.br

Encaminhamentos metodológicos

Na perspectiva de superação da problemática em que se insere o ensino de Progressões Aritméticas (PA) e tomando como base a metodologia da Engenharia Didática (Artigue, 1988), elaboramos a Sequência Didática composta por 10 atividades, cujas soluções devem ser encontradas pelos participantes organizados em equipes de até quatro componentes. Ao desenvolver as atividades cada equipe deve anotar os procedimentos utilizados para solucionar os problemas e, ao final do trabalho, entregar um relatório.

O professor deve ficar atento às discussões bem como nos procedimentos utilizados pelos cursistas ao solucionarem os problemas e, quando necessário, fazer uma discussão de aspectos relevantes ao processo de compreensão do conteúdo em estudo.

Alguns elementos da metodologia da Engenharia Didática

Segundo Artigue (1988), a metodologia da Engenharia Didática (ED) tem como referência as situações didáticas (Brousseau, 1986) e caracteriza-se como um esquema experimental baseado em realizações didática em sala de aula. Assim, o trabalho do professor assemelha-se ao trabalho do engenheiro. Este faz uso de conhecimentos científicos de seu domínio e, ao mesmo tempo, se dispõe a estudar problemas que a ciência ainda não resolveu.

Na metodologia da ED, o trabalho de elaboração, desenvolvimento, aplicação, avaliação e análise de sequências didáticas são de inteira responsabilidade do professor. Para tanto, ao elaborar uma sequência didática, deve-se levar em conta as diferentes idéias/conceitos que compõem o objeto de estudo, os conhecimentos que os estudantes já possuem sobre o assunto, os papéis a serem desempenhados pelos envolvidos no processo.

Artigue (1988) destacou quatro fases da metodologia da ED, mas no decorrer da elaboração e desenvolvimento do trabalho novas situações podem surgir. Isso significa que o trabalho de pesquisa necessita permanentemente ser avaliado.

Na fase das análises preliminares deve-se fazer o mapeamento das características epistemológicas e a identificação das concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem. Nesta fase se elabora a sequência didática e quando for o caso, o pré-teste e o pós-teste.

As análises a priori baseiam-se nas hipóteses cuja validação estará em jogo, quando da confrontação com as análises a posteriori. Na segunda fase deve-se levar em conta no que as mudanças permitem controlar o sentido e o significado dos comportamentos dos estudantes diante da situação. Nesta fase leva-se em consideração os aspectos descritivos e previsivos (se caracterizam pelos possíveis comportamentos e respostas dos alunos). O professor deve fazer a caracterização das atividades a serem desenvolvidas pelos estudantes, identificar possíveis dificuldades que estes encontrarão e prever modos de ação. Quando da prática podem ocorrer situações inusitadas ou não previstas, com as quais o professor terá de lidar. As análises apriori auxiliarão o trabalho quando das análises a posteriori e validação.

Na fase da experimentação os estudantes desenvolvem as atividades que lhes são propostas. Ela acontece a partir do contato do professor com os estudantes. Nela explicita-se os objetivos, os papéis dos estudantes e do professor, assim como as condições de desenvolvimento das atividades pelos estudantes.

Na fase das análises a posteriori e validação leva-se em consideração todos os dados colhidos durante a fase de experimentação. A validação ou refutação da hipótese ocorre a partir da confrontação entre as análises a priori e as análises a posteriori. Esta fase é interna ao processo de experimentação, mas não exclui as demais fases.

A Sequência Didática

Atividade 01 – Resolvendo um problema

1.1) Uma pessoa depositou R$ 1,00 na caderneta de poupança, no primeiro dia do mês, no segundo dia depositou R$ 2,00, no terceiro depositou R$ 3,00 e assim sucessivamente, durante os 30 dias do mês. Qual foi o valor depositado nesse período?

1.2) Se considerarmos o mês com 31 dias, qual será o valor depositado?

Atividade 02 – Identificando sequência

2.1) Usando três palitos, disponha-os de modo a obter um triângulo.

2.2) Ao lado direito do triângulo construído, construa outro triângulo, de modo que um dos lados do triângulo já construído deve ser utilizado.

2.3) Construa ao lado direito do segundo triângulo, um terceiro triângulo, de modo que um dos lados do segundo triângulo construído deve ser utilizado.

2.4) Represente, na forma de desenho, os triângulos construídos.

2.5) Observe o que foi feito e preencha tabela a seguir.

Atividade	**Número de palitos**	**Número de triângulos**
2.1		
2.2		
2.3		

2.6) Se fôssemos construir um quarto triângulo ao lado do terceiro, quantos palitos seriam necessários?

2.7) Se fôssemos construir o décimo triângulo, quantos palitos seriam necessários?

2.8) Com 87 palitos, quantos triângulos seriam construídos?

2.9) O que é uma sequência?

2.10) Na tabela a seguir, escreva a sequência do número de palitos necessários para construir os seis primeiros triângulos.

Número de triângulos	**Número de palitos**
Total =	**Total =**

2.11) Ao analisar a sequência do número de palitos, o que se percebe?

2.12) Todas as sequências apresentam as mesmas características? Existem tipos diferentes de sequências?

2.13) Construa o gráfico que representa a quantidade de palitos necessários para construir os seis primeiros triângulos.

2.14) O que acontece cada vez que se aumentam dois palitos, a partir da construção do primeiro triângulo?

2.15) O que aconteceria com a quantidade de triângulos se, de uma quantidade de 93 palitos, fossem retirados 8?

Atividade 03 – Classificando sequências

Analise as sequências a seguir.

a) Dia e noite

b) Fases da lua (lua nova, quarto crescente, lua cheia, quarto minguante)

c) Dias da semana (domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado)

d) As letras de nosso alfabeto

e) O conjunto dos números naturais {0, 1, 2, 3, ...}

f) 13, 13, 13, ...

g) 1, 3, 5, 7, 9

h) 2, 4, 6, ...

i) 2, 1, 0, -1

j) $n, n+1, n+2, \ldots,$ com $n \in \mathbb{R}$

3.1) Observe as sequências da atividade “3” e classifique-as como:

Classificação	letra(s)
Crescente	
Decrescente	
Constante	
Cíclica	
Finita	
Infinita	

3.2) Retome a sequência da quantidade de palitos necessários para construir os seis primeiros triângulos (Atividade “2.13”) e classifique-a de acordo com o disposto na tabela da Atividade “3.1”.

3.3) Retome o problema da Atividade 1 e classifique a sequência dos valores depositados de acordo com o disposto na tabela da Atividade “3.1”.

Atividade 04 – Identificando os termos de uma sequência

Analise as sequências a seguir.

a) As letras de nosso alfabeto

b) O conjunto dos números naturais {0, 1, 2, 3, ...}

c) 13, 13, 13, ...

d) 1, 3, 5, 7, 9

e) 2, 4, 6, ...

f) 2, 1, 0, -1

g) $n, n+1, n+2, \ldots,$ com $n \in \mathbb{R}$

4.1) Considere que o primeiro termo de uma sequência deve ser identificado como a_1, o segundo como a_2, e assim sucessivamente e preencha a tabela:

Sequência	a_1	a_2	a_{10}	a_n
a) As letras de nosso alfabeto				
b) O conjunto dos números naturais {0, 1, 2, 3, ...}				
c) 13, 13, 13, ...				

d) 1, 3, 5, 7, 9				
e) 2, 4, 6, ...				
f) 2, 1, 0, -1				
g) $n, n+1, n+2, \dots,$ com $n \in \mathbb{R}$				

Atividade 05 – Identificando razão

5.1) Você já ouviu falar em razão? Sabe defini-la? Numa sequência, o que significa razão?

5.2) Analise as sequências a seguir e identifique a razão entre os termos de cada uma delas.

Sequência	Razão
a) Dias do mês de janeiro (1, 2, 3, 4, ..., 31)	
b) O conjunto dos números naturais {0, 1, 2, 3, ... }	
c) 13, 13, 13, ...	
d) 1, 3, 5, 7, 9	
e) 2, 4, 6, ...	
f) 2, 1, 0, -1	
g) -10, -9, -8, -7, ...	
g) $n, n+1, n+2, \dots,$ com $n \in \mathbb{R}$	
h) 1,4, 9, 16 ...	
i) 	

5.3) A razão entre os termos de uma sequência é sempre constante?

5.4) Analise os dados obtidos nas respostas da Atividade "5.2" e em seguida analise os aspectos apontados a seguir.

a) Todas as sequências (apresentam razão? Esta razão é constante?)

b) Como se comporta um gráfico (cuja razão entre os termos é nula? Quando a razão entre os termos é constante? Quando a razão entre os termos não é constante e nem nula?)

c) Como se comporta o gráfico de uma sequência crescente? E de uma sequência decrescente?

Atividade 06 – Encontrando o termo geral

6.1) A partir dos dados e informações estudadas até aqui, analise as sequências a seguir e encontre a lei de formação.

Sequência	Lei de formação
a) Dias do mês de janeiro (1, 2, 3, 4, ..., 31)	
b) O conjunto dos números naturais {0, 1, 2, 3, ... }	
c) 13, 13, 13, ...	
d) 1, 3, 5, 7, 9	
e) 2, 4, 6, ...	
f) 2, 1, 0, -1	
g) -10, -9, -8, ...	
h) 1,4, 9, 16 ...	

6.2) Analise a informação a seguir e depois resolva a atividade "c".

De modo geral, para encontrar a lei de formação de uma PA, basta que se conheçam alguns de seus termos e a razão entre eles.

Conhecendo o primeiro termo de uma PA e sua razão, pode-se obter os demais:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$a_4 = a_3 + r$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + r$

ou ainda:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_1 + 3r$

$\vdots$

$a_{32} = a_1 + 31r$

$\vdots$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Utilizando essas orientações, indique a razão do a_{87} de uma sequência qualquer, cuja razão é constante.

Atividade 07 – Relação de função

7.1) Analise o que foi feito na atividade 6, estabeleça relação com o conceito de função e responda:

a) Pode-se dizer que o termo geral ou lei de formação de uma sequência é uma função?

b) O que é uma função (em matemática)?

c) Como os autores de livros didáticos ou matemáticos definem função?

d) Qual a relação entre as varáveis em uma função?

Atividade 08 – Reconhecendo Progressão Aritmética

8.1) Retome as sequências apresentadas na Atividade “5.2”. O que há de diferente e de semelhante no comportamento dos gráficos?

8.2) Você já ouviu falar em Progressão Aritmética (PA)? Sabe defini-la?

8.3) Analise as sequências apresentadas na atividade “5.2”, e indique aquelas que são Progressões Aritméticas.

Atividade 09 - A soma dos termos de uma sequência na forma de PA

9.1) Na história da matemática consta que, para calcular a soma dos números de 1 a 100, Gauss somou o primeiro e o último número (1 + 100 = 101) e multiplicou por 50, obtendo o resultado ($101 \times 50 = 5050$).

Utilizando o raciocínio de Gauss, resolva o problema apresentado na Atividade “01”.

9.2) Sabendo que o problema apresentado para Gauss constava da soma dos números inteiros compreendidos entre 1 e 100, tem-se a razão 1 ($a_2 - a_1$= 2 – 1 = 1), o número de termos 100. A ideia de Gauss pode ser expressa da seguinte maneira: soma-e o primeiro e o último termo de uma PA, divide-se por dois e o resultado multiplica-se pelo número de termos da PA. Assim:

$$S_n = \frac{(1+100)}{2} \times 100 = 5050$$

Desse modo, calcule a soma dos depósitos do problema apresentado na Atividade “01”.

Generalizando temos:

a_1= 1

$a_n = a_{100}$ = 100

n = 100

r= 100

Isso pode ser expresso pela lei:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

9.3) Observe as sequências a seguir e calcule a soma de seus termos.

a) Dias do mês de janeiro

b) 1, 3, 5, 7, 9

c) 2, 1, 0, -1

d) -9, -8, -7, -6, -5.

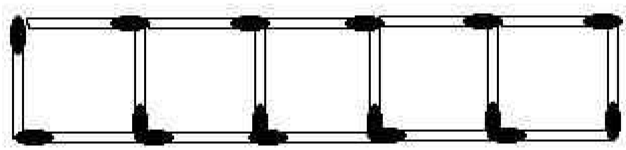
Atividade 10 - Solucionando problemas

10.1) O valor de x para que a sequência (2x, x + 1, 3x) seja uma PA é:

10.2) Suponha que você tenha uma conta em um banco e, a cada dia deposite $R\$ 1{,}00$ durante os 365 dias do ano. Qual o valor depositado no final desse período?

10.3) Uma criança brinca de fazer quadrados com palitos de fósforos como mostra a figura 01, a seguir.

Figura 01 – formação de quadrados a partir de palitos



a) Quantos palitos serão necessários para fazer 100 quadrados?

b) Quantos quadrados ela fez com 250 palitos?

10.4) O primeiro termo de uma PA é 100 e o trigésimo é 187. Qual a soma dos trinta primeiros termos?

10.5) Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, tem fabricado respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares mensais, a partir de que mês a produção da fábrica B superará a produção da fábrica A?

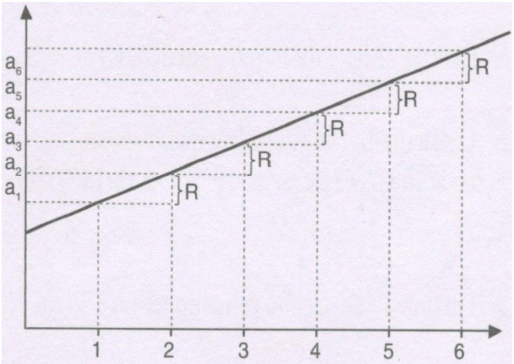
a) Resolver o problema algebricamente.

b) Representar no plano cartesiano a produção das duas fábricas.

10.6) Um pagador de promessas vai fazer uma caminhada de sua cidade até Aparecida do Norte. A distância é de 105 km. Ele pretende percorrer 25 km no primeiro dia, 22 km no segundo dia, 19 km no terceiro dia, ou seja, a cada dia vai percorrer 3 km a menos que a distância percorrida no dia anterior. Em quantos dias o pagador de promessas fará a caminhada?

10. 7) Observe o gráfico que ilustra o comportamento de uma progressão aritmética:

Figura 02: Gráfico de uma progressão aritmética



Fonte: (Bordeaux, 2004, p. 175)

Agora escreva os respectivos valores de a_1 a a_6 em forma de sequência.

Bibliografias

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. In: **Recherches en didactiques des Mathématiques**. v.9, nº 3, p.281-308. Grenoble, 1988. (Tradução do Orientador)

BORDEAUX, Ana Lucia, et al. **Matemática**,Rio de Janeiro. Fundação Roberto Marinho, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura – MEC, Secretaria da Educação Fundamental - SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, volume 3: Matemática. Brasília, 1997.

BROUSSEAU, G. Fondements ET méthodes de La didactique des mathématiques. In: **Recherches en didactique des Mathématiques**. v.7, nº 2, p.33-116. Grenoble, 1986.