

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Minicurso



## ABORDAGEM DO ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DE FRACTAIS E RECURSOS TECNOLÓGICOS

Sandra Eliza Vielmo<sup>1</sup>

Francéli Dalberto<sup>2</sup>

**Resumo:** A partir do tema gerador fractais são propostas algumas atividades relacionadas aos fractais Triângulo de Sierpinski e Floco de Neve de Koch. Inicialmente, estes fractais são gerados através de um processo iterativo com o auxílio do aplicativo GeoGebra. Posteriormente, estes são utilizados para escrever fórmulas gerais, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, trabalhar com o conceito de sequências, em particular as progressões geométricas, somatório, limites e convergência, bem como as funções exponenciais e logarítmicas. Este trabalho é resultado do projeto de extensão “*Fractais e a Geometria Dinâmica no Ensino de Matemática*”, vinculado ao FIEX/CCNE/UFSM, cujo objetivo principal visa contribuir na formação continuada dos professores de matemática da educação básica e na formação dos acadêmicos de Cursos de Licenciatura em Matemática, através do uso de recursos tecnológicos em sua prática docente.

**Palavras Chaves:** Fractais. Ensino de Matemática. GeoGebra.

### 1. Introdução:

Os fractais são criações relativamente recentes na matemática e suas propriedades têm apresentado contribuições interessantes ao desenvolvimento e/ou a abordagem de conteúdos matemáticos tanto na educação básica, quanto superior. As representações gráficas dos fractais geralmente fascinam pela sua beleza, seu aspecto fragmentado e pela característica conhecida como auto-semelhança: partes dos objetos se assemelham ao todo e a sub-partes. Alguns dos fractais mais conhecidos são o *Floco de Neve de Koch*, o *Triângulo de Sierpinski* e o *Conjunto de Cantor* (SALLUM, 2005). As primeiras obras sobre fractais foram criadas

<sup>1</sup> Doutora. UFSM, Departamento de Matemática. sandravielmo@smail.ufsm.br

<sup>2</sup> Acadêmica. Bolsista FIEX/UFSM. francelidalberto@gmail.com

nos anos 70 por Mandelbrot, também chamado Pai dos Fractais (BARBOSA, 2005). Esta ciência trouxe consigo o ver ordens e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório ou o imprevisível e através dos fractais podemos explicar vários fenômenos da natureza e estruturas do corpo humano.

Diante dos avanços tecnológicos, o uso do computador no processo de ensino e aprendizagem torna-se um grande aliado dentro de uma nova perspectiva metodológica. Para o sucesso deste é fundamental que, além de um laboratório de informática, tenhamos professores capacitados, tanto no domínio da ferramenta computacional como das possibilidades de inserção do computador. Desta forma, o objetivo principal desta ação visa contribuir no desenvolvimento de novas práticas e experiências pedagógicas aos participantes em relação ao uso de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

A construção do conhecimento, segundo Papert (1988), pode ser concebida pela participação de um instrumento, o computador, mediado intencionalmente para esse fim, possibilitando o desenvolvimento de processos mentais que auxiliem na aprendizagem. O professor, nesse processo, servirá de mediador, contribuindo no direcionamento das atividades de estudo de forma contextualizada para o aluno.

Uma mudança do processo educacional não se dá apenas pelo simples uso do computador e de softwares. É necessário que se tenha um objetivo claro em cada etapa do seu uso junto ao aluno, permitindo que este possa realizar manipulações, desenvolver proposições e tirar conclusões através das atividades propostas.

Valente (2005, p. 22) cita: “A introdução da informática na educação, segundo a proposta de mudança pedagógica, como consta no programa brasileiro, exige uma formação bastante ampla e profunda dos educadores. Não se trata de criar condições para o professor simplesmente dominar o computador ou o software, mas, sim, auxiliá-lo a desenvolver conhecimento sobre o próprio conteúdo e sobre como o computador pode ser integrado no desenvolvimento desse conteúdo. Mais uma vez, a questão da formação do professor mostra-se de fundamental importância no processo de introdução da informática na Educação, exigindo soluções inovadoras e novas abordagens que fundamentem os cursos de formação.”

Já Borba (1999) afirma que, no contexto da Educação Matemática, os ambientes de aprendizagem gerados por aplicativos informáticos podem potencializar o processo de ensino e aprendizagem através da experimentação matemática, com possibilidades de surgimento tanto de novos conceitos como de novas teorias matemáticas a fim de torná-lo um aliado importante na construção do conhecimento.

## 2. Desenvolvimento

Utilizando os fractais Triângulo de Sierpinski e Floco de Neve de Koch são propostas algumas atividades, tanto computacionais quanto relacionadas aos conteúdos matemáticos envolvidos.

### 2.1. Fractal Triângulo de Sierpinski

O fractal Triângulo de Sierpinski, figura geométrica obtida através de um processo recursivo representado na figura 1, foi inicialmente descrito pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882 - 1969).

**Figura 1** - Processo iterativo do fractal Triângulo de Sierpinski.



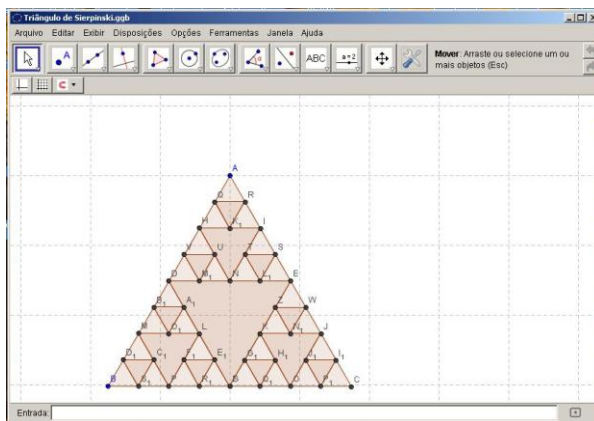
Fonte: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo\\_de\\_Sierpinski](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski)

Primeiramente, faremos a construção deste fractal no aplicativo GeoGebra e, posteriormente analisaremos as propriedades do mesmo, relacionando-as com alguns conteúdos matemáticos desenvolvidos na educação básica e superior.

#### **Atividade 2.1.1: Construção do fractal no GeoGebra**

Para a obtenção deste fractal, o processo iterativo consiste em a cada iteração dividir o lado de um triângulo equilátero de medida  $L$  em duas partes iguais e obter um novo triângulo equilátero de lado  $L/2$  no interior do mesmo. Este triângulo interior é eliminado e o processo é repetido sucessivamente. Realizando algumas iterações deste processo no aplicativo GeoGebra, podemos visualizá-lo na figura 2.

**Figura 2 - Fractal Triângulo de Sierpinski.**







Fonte: gráficos obtidos no aplicativo GeoGebra.


A partir deste processo iterativo, apresentaremos algumas atividades distribuídas nos níveis de ensino fundamental e médio, enfocando alguns conteúdos matemáticos.

**Atividade 2.1.2: O Triângulo de Sierpinski e Perímetros e Áreas de Triângulos.**

Considerando um triângulo equilátero inicial de lado  $L$ , perímetro  $P_0 = 3L$  e área  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2$ , simultaneamente ao processo iterativo para obter o fractal Triângulo de Sierpinski no GeoGebra, exploramos a relação numérica do número de triângulos, comprimento de cada lado, perímetro de cada triângulo e perímetro total, área de cada triângulo e área total, com a iteração  $n$ , mostradas no quadro 1.

**Quadro 1 - Elementos obtidos no processo iterativo do fractal.**

Figura	Iteração (n)	Nº de triângulos	Comprimento do lado	Perímetro de cada triângulo	Perímetro total	Área de cada triângulo	Área total
	0	$1 = 3^0$	$L$	$P_0$	$P_0$	$A_0$	$A_0$
	1	$3 = 3^1$	$\frac{1}{2}L$	$\frac{1}{2}P_0$	$\frac{3}{2}P_0$	$\frac{1}{4}A_0$	$\frac{3}{4}A_0$
	2	$9 = 3^2$	$\frac{1}{2^2}L$	$\frac{1}{2^2}P_0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 P_0$	$\frac{1}{4^2}A_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$
	3	$27 = 3^3$	$\frac{1}{2^3}L$	$\frac{1}{2^3}P_0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 P_0$	$\frac{1}{4^3}A_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0$

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$n$	$3^n$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n L$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n P_0$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n P_0$	$\left(\frac{1}{4}\right)^n A_0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$

### Atividade 2.1.3: O Triângulo de Sierpinski e a Função Exponencial

A partir dos dados descritos na Tabela 1, podemos observar que para uma iteração  $n$  qualquer, as potências em função de  $n$ , descrevem funções exponenciais para o caso discreto. Estendendo para o caso contínuo, podemos descrever as funções exponenciais mostradas no quadro 2.

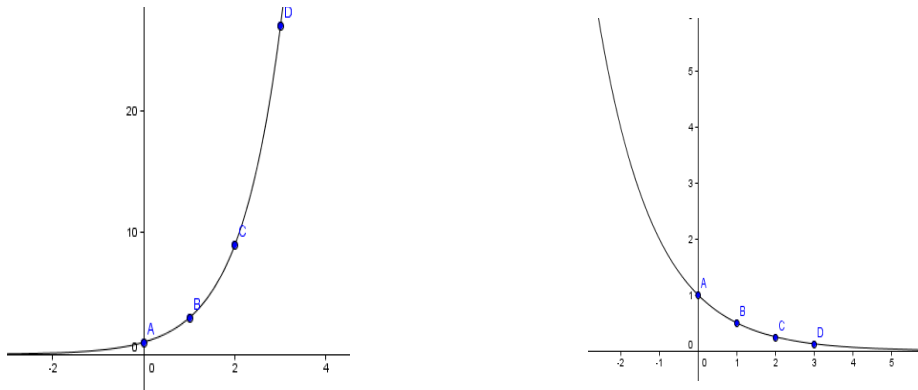
**Quadro 2** - Funções exponenciais relacionadas aos elementos do fractal.

Variável	Função Exponencial
Número de triângulos	$T(x) = 3^x$
Comprimento de cada lado	$C(x) = L\left(\frac{1}{2}\right)^x$
Perímetro de cada triângulo	$P(x) = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$
Perímetro total	$P_T(x) = P_0\left(\frac{3}{2}\right)^x$
Área de cada triângulo	$A(x) = A_0\left(\frac{1}{4}\right)^x$
Área total	$A_T(x) = A_0\left(\frac{3}{4}\right)^x$

Observemos que as funções  $T$  e  $P_T$  são funções exponenciais crescentes, ou seja, a medida que o nível de iteração aumenta, o número de triângulos e o perímetro total aumentam, embora o perímetro de cada triângulo diminua. Em relação as funções  $C$ ,  $P$ ,  $A$  e  $A_T$  verificamos que são funções exponenciais decrescentes, pois a medida que a iteração aumenta, os valores destas funções diminuem. Por exemplo, os gráficos das funções Número

de Triângulos  $T(x) = 3^x$  e Comprimento de cada lado  $C(x) = L\left(\frac{1}{2}\right)^x$ , considerando  $L=1$ , estão representados na figura 3, juntamente com os quatro primeiros termos dessas duas sequências.

**Figura 3** - Gráficos de funções exponenciais  $T(x)$  e  $C(x)$ .



Fonte: gráficos obtidos no aplicativo GeoGebra.

#### Atividade 2.1.4: O Triângulo de Sierpinski e a Função Logarítmica

Nesta atividade podemos relacionar as funções exponenciais relacionadas ao fractal com as respectivas funções inversas.

Por exemplo, consideremos a função Número de Triângulos da Tabela 2, onde  $x$  é o nível de iteração. Se  $y$  indica o número de triângulos de cada iteração, temos que  $T(x) = y$ , ou seja,  $3^x = y$ . Aplicando a definição de logaritmo e suas propriedades, obtemos

$x = \frac{\log y}{\log 3}$  para determinar o nível de iteração, sabendo-se o número de triângulos. . Desta

forma, construímos a função inversa  $T^{-1}(x) = \log_3 x$ .

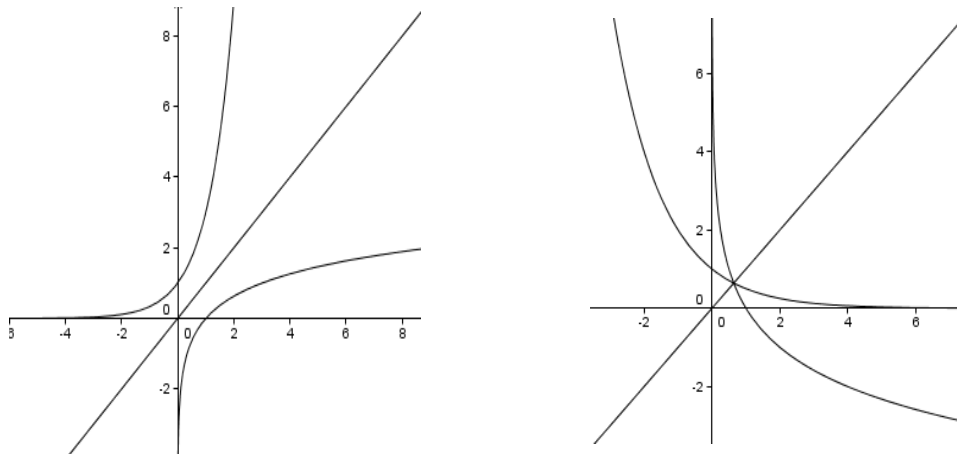
Analogamente, podemos relacionar o nível de iteração  $x$  e comprimento de cada lado, dada pela função  $C(x) = L\left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Se  $z$  indica o comprimento de cada lado em uma

determinada iteração, temos que  $z = L\left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Usando as propriedades de logaritmo, obtemos

o nível de iteração  $x = \frac{\log L - \log z}{\log 2} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{L}\right)$ , em função do comprimento do lado do triângulo. Desta forma, obtemos a função inversa  $C^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{L}x\right)$ .

Os gráficos das funções  $T(x) = 3^x$  e  $T^{-1}(x) = \log_3 x$ , bem como  $C(x) = L\left(\frac{1}{2}\right)^x$  e  $C^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{L}x\right)$  estão representados na figura 4.

**Figura 4** - Gráficos de funções exponenciais e suas inversas.



Fonte: gráficos obtidos no aplicativo GeoGebra.

**Atividade 2.1.5: O Triângulo de Sierpinski e as Progressões Geométricas**

Observando os elementos de cada uma das colunas da Tabela 1, verificamos que as mesmas representam progressões geométricas infinitas com razões descritas no quadro 3.

**Quadro 3** - Progressões geométricas associadas aos elementos do fractal.

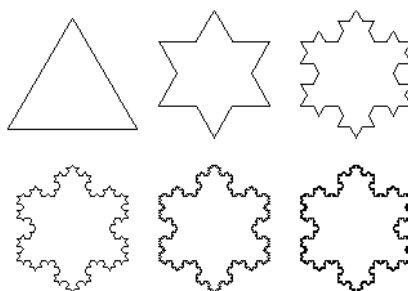
Variável	PG	Razão
Número de triângulos	$(1, 3, 9, \dots, 3^n, \dots)$	$q = 3$
Comprimento de cada lado	$\left(L, \frac{1}{2}L, \frac{1}{2^2}L, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n L, \dots\right)$	$q = \frac{1}{2}$
Perímetro de cada triângulo	$\left(P_0, \frac{1}{2}P_0, \frac{1}{2^2}P_0, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n P_0, \dots\right)$	$q = \frac{1}{2}$

Perímetro total	$\left( P_0, \frac{3}{2} P_0, \frac{3^2}{2^2} P_0, \dots, \left( \frac{3}{2} \right)^n P_0, \dots \right)$	$q = \frac{3}{2}$
Área de cada triângulo	$\left( A_0, \frac{1}{4} A_0, \frac{1}{4^2} A_0, \dots, \left( \frac{1}{4} \right)^n A_0, \dots \right)$	$q = \frac{1}{4}$
Área total	$\left( A_0, \frac{3}{4} A_0, \frac{3^2}{4^2} A_0, \dots, \left( \frac{3}{4} \right)^n A_0, \dots \right)$	$q = \frac{3}{4}$

## 2.2. Fractal Floco de Neve de Koch

Este fractal foi apresentado pelo matemático sueco Niels Fabian Helge Von Koch (1870-1924). Segundo (SALLUM, 2005) este é um dos fractais mais conhecidos e é uma figura geométrica obtida pelo processo iterativo representado na figura 5, que a cada iteração consiste em dividir o lado  $L$  de um triângulo equilátero em três partes iguais, excluindo o segmento médio e a partir deste construir um novo triângulo equilátero de lado  $L/3$ .

**Figura 5** - Processo iterativo do fractal Floco de Neve de Koch.



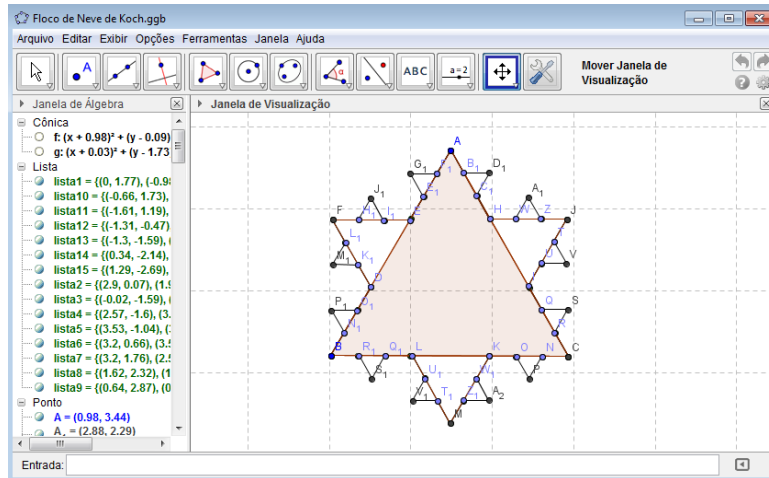
Fonte: <http://www.ceticismoaberto.com/ciencia/2139/fractais-uma-nova-viso-da-natureza>

### Atividade 2.2.1: Construção do fractal no GeoGebra

Nesta atividade, considerando algumas iterações é obtido o fractal no aplicativo GeoGebra, o qual é mostrado na figura 6.



**Figura 6 - Fractal Floco de Neve de Koch** obtido no GeoGebra.



Fonte: gráficos obtidos no aplicativo GeoGebra.

### Atividade 2.2.2: Processo recursivo matemático do fractal

Novamente, considerando um triângulo equilátero inicial de lado  $L$ , perímetro  $P_0 = 3L$  e área  $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ , simultaneamente ao processo iterativo para obter o fractal no GeoGebra, exploramos a relação numérica do número de lados, comprimento de cada lado, perímetro e área, com a iteração  $n$ .

Para uma maior compreensão da obtenção da área a cada iteração, consideremos a mesma no nível de iteração 1. Neste nível, o comprimento de cada segmento é  $\frac{L}{3}$  e desta

forma, a área de cada um dos três triângulos equiláteros adicionados é  $AF_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{L}{3}\right)^2$ . Como

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2, \text{ temos } AF_1 = \frac{A_0}{3^2}. \text{ Assim, } A_1 = A_0 + 3AF_1 = A_0 + 3\frac{A_0}{3^2} = A_0 \left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

Este processo é repetido infinitamente e obtemos a sequência:

$$(AF_1, AF_2, AF_3, \dots, AF_n, \dots) = \left(\frac{A_0}{3^2}, \frac{A_0}{3^4}, \frac{A_0}{3^6}, \dots, \frac{A_0}{3^{2n}}, \dots\right)$$

Como a cada iteração agregando as áreas geradas pelos novos triângulos inseridos, temos:






$$A_T(n) = A_0 + 3AF_1 + (3.4)AF_2 + (3.4^2)AF_3 + \dots + (3.4^{n-1})AF_n$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
A_T(n) &= A_0 + 3\frac{A_0}{3^2} + (3 \cdot 4)\frac{A_0}{3^4} + (3 \cdot 4^2)\frac{A_0}{3^6} + \dots + (3 \cdot 4^{n-1})\frac{A_0}{3^{2n}} \\
&= A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{3^2} + \frac{4^2}{3^4} + \frac{4^3}{3^6} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-2}} \right) \right) \\
&= A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots + \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}} \right) \right) \\
&= A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( \frac{4}{9} \right)^{k-1} \right)
\end{aligned}$$

Estes dados são apresentadas no quadro 4.

**Quadro 4** - Elementos obtidos no processo iterativo do fractal.

Figura	Iteração	Nº de Lados	Comprimento do Lado	Perímetro	Área
	0	$3 = 3 \cdot 4^0$	$L$	$P_0$	$A_0$
	1	$12 = 3 \cdot 4^1$	$L \frac{1}{3^1}$	$P_0 \cdot \frac{4^1}{3^1} = P_0 \left( \frac{4}{3} \right)^1$	$A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \right)$
	2	$48 = 3 \cdot 4^2$	$L \frac{1}{3^2}$	$P_0 \cdot \frac{4^2}{3^2} = P_0 \left( \frac{4}{3} \right)^2$	$A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{9} \right) \right)$
	3	$192 = 3 \cdot 4^3$	$L \frac{1}{3^3}$	$P_0 \cdot \frac{4^3}{3^3} = P_0 \left( \frac{4}{3} \right)^3$	$A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} \right) \right)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	$3 \cdot 4^n$	$L \frac{1}{3^n}$	$P_0 \cdot \frac{4^n}{3^n} = P_0 \left( \frac{4}{3} \right)^n$	$A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left( \frac{4}{9} \right)^{k-1} \right)$

### Atividade 2.2.3: Um limitante superior para a área total do fractal

Considerando um processo iterativo infinito para a obtenção do fractal, teremos a área

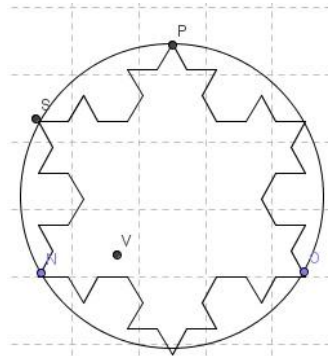
total expressa por  $A_T = \lim_{n \rightarrow \infty} A_T(n)$ , ou seja,  $A_T = A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^{k-1} \right)$ . O termo

$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{4}{9} \right)^{k-1}$  corresponde a soma infinita de uma progressão geométrica com  $a_1 = 1$  e razão

$q = \frac{4}{9}$ . Como  $q < 1$ , esta sequência é convergente e sua soma é dada por  $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9}{5}$  e

desta forma,  $A_r = A_0 \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{5} \right) = \frac{8}{5} A_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5} L^2$  depende do comprimento inicial do lado do triângulo equilátero. De outra forma, a medida que realizamos o processo iterativo para a obtenção do fractal, observamos que a área total vai aumentando, mas não de forma infinita, ou seja, podemos dizer que há um limitante superior para a mesma. Considerando o triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio  $R$ , da geometria plana, temos a relação  $L = \sqrt{3}R$ . Ou seja,  $R = \frac{\sqrt{3}}{3}L$  e a área da circunferência com este raio pode ser considerado um limitante superior para a área total do fractal, conforme a figura 7.

**Figura 7 - Limitante superior para a área do fractal.**



Fonte: gráficos obtidos no aplicativo GeoGebra.

De fato, a área da circunferência de raio  $R = \frac{\sqrt{3}}{3}L$  é  $A_c = \pi \left( \frac{\sqrt{3}}{3}L \right)^2 = \frac{\pi}{3}L^2$  e a área total do fractal é  $A_r = \frac{2\sqrt{3}}{5}L^2$ . Comparando as constantes envolvidas nessas duas áreas, verificamos que  $A_r < A_c$ .

### 3. Considerações Finais

A partir da implementação desta oficina, pretende-se contribuir na melhoria da formação profissional dos professores da educação básica, bem como de acadêmicos de cursos de licenciatura em matemática. As atividades desenvolvidas estão direcionadas para a inserção do computador, através do uso do aplicativo GeoGebra, como uma ferramenta de apoio ao ensino e aprendizagem. Espera-se que os participantes possam servir de multiplicadores junto a outros professores de matemática e que utilizem o aplicativo em

outros conteúdos, possibilitando uma integração entre teoria e prática tanto nos aspectos do conhecimento matemático quanto no uso dos recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem.

#### **4. Referências Bibliográficas**

- BARBOSA, R. M. **Descobrendo a Geometria Fractal – para a sala de aula**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2005.
- BORBA, M. C. **Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento**. In: M.A.V. Bicudo (org.). **Pesquisas em Educação: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: UNESP, p. 285-295, 1999.
- BRANDÃO, L. O. **Algoritmos e Fractais com Programas de GD**. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, v. 49, p. 27-34, 2002.
- FARIA, R. W. S. **Uma Abordagem de Progressões Geométricas por meio de Fractais no Ambiente de Geometria**, XIV EBRAPEM, Campo Grande, MS, 2010.
- MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman, 1983.
- PAPERT, S. **Logo: Computadores e Educação**, São Paulo: Brasiliense, 1988.
- SALLUM, E. M. **Fractais no Ensino Médio**. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, v. 57, p. 1-8, 2005.
- Software GeoGebra**, versão 4.0.38.0. Disponível em [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Último acesso em 07.agosto 2012.
- VALENTE, J.A. **Informática na Educação no Brasil: Análise e Contextualização Histórica**. In: J.A. Valente (org.). **O Computador na Sociedade do Conhecimento**. Brasília: Estação Palavra, USP, p.11-28, 2005. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me003150.pdf>