RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: O PENSAMENTO MATEMÁTICO NELES MANIFESTO

Adriana Camejo da Silva[1]

Mariana Ibañez Carvalho [2]

Resumo:

Este artigo teve por objetivo investigar que sentidos das operações emergem da resolução de problemas do campo multiplicativo, apresentados a alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental I. Para embasar nosso estudo utilizamos conceitos como pensamento proporcional, metacognição, registros de representação semiótica. A proposta de pesquisa vincula-se aos trabalhos do PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, vinculado ao curso de Pedagogia da Universidade Presbiteriana Mackenzie – UPM, e patrocinado pela CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Foram aplicadas algumas situações problema a um grupo de 31 alunos da rede pública estadual de São Paulo, que cursavam o primeiro trimestre do quarto ano do Ensino Fundamental I. Os resultados das produções dos alunos foram analisados à luz das teorias referendadas. Alguns resultados foram selecionados e, a partir deles, traçadas seis categorias de análise. As produções analisadas apontam para dois aspectos importantes: o primeiro a confusão entre a adição e a multiplicação. O segundo revela aparente confusão entre memorizar tabuadas e atribuir sentido matemático à operação multiplicação.

Palavras Chaves: Ensino de Matemática. Resolução de Problemas. Campo Multiplicativo. Pensamento Proporcional.

Temática do artigo: Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

O presente artigo se propõe a investigar que sentidos das operações do campo multiplicativo emergem da resolução de problemas, elaboradas por alguns alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental I.

Dentre as ideias a serem desenvolvidas no trabalho didático com esse campo conceitual, tem-se o pensamento proporcional. Pesquisas desenvolvidas na área indicam que o trabalho com a proporcionalidade pode ser iniciado ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental I, como o desenvolvido por Maranhão e Machado (2011). As autoras atribuem a falta de matemática significante na prática docente de professores da escola elementar ao parco entendimento dos alunos em descrever conceitos e pensamentos para compreender taxa

[1] Doutora em Educação Matemática, docente da Universidade Presbiteriana Mackenzie. acamejo@uol.com.br
[2] Pedagoga, professora da Escola Carlitos. marianaibanez@uol.com.br

de variação, proporção e proporcionalidade, incluindo escala. (Norton 2005 apud Maranhão e Machado 2011). Acreditam que diante dessa premência surge a necessidade de conciliar noções como aprender, conhecer, comunicar, pensar e compreender para chegarem ao aprofundamento das ideias matemáticas para alcançarem a metacognição (pensar sobre o que foi descrito). (Sfard 2008 apud Maranhão e Machado 2011)

Lima (1986 apud Machado e Maranhão 2011) salienta que "[...] antes de definir se um problema envolve proporcionalidade, e se essa quando existe é direta ou inversamente proporcional" o aluno tem de perceber "a covariação" entre duas ou mais grandezas e "chegar a uma fórmula."

Tal ideia implica explicações teóricas sobre o papel da percepção, oferecidas por Duval (2002 apud Maranhão e Machado 2011), que a distingue da visualização, na aprendizagem matemática. Ao mesmo tempo, demanda explicações sobre representações, em razão da complexidade da resolução de problemas envolvendo o pensamento proporcional. O mesmo autor explica tal complexidade afirmando que se trata de problemas que envolvem a capacidade de fazer *conversões* de um tipo de *registro de representação semiótica*, em outro, e enfatiza três tipos de *registros de representação semiótica*: o *simbólico (algébrico e numérico)*, o *gráfico* e o *da língua natural*. A *conversão de registros de representação semiótica* demanda a transformação de um em outro, nos dois sentidos, o que aumenta a complexidade de sua aprendizagem. Acredita que se um objeto matemático tivesse apenas uma representação, ele e ela se confundiriam. Por isso, o acesso a apenas um dos registros de representação de um objeto matemático não permite sua conceituação. Ou seja, o acesso aos conceitos matemáticos depende de coordenação de ao menos dois de seus registros de representação semiótica. Assim, tanto um objeto matemática pode ter diversas representações como uma representação pode ser relativa a diversos objetos matemáticos.

Para Maranhão e Machado (2011), os registros de representação *semiótica dependem da apreensão de suas unidades representativas*. Conforme Duval (2002 apud Maranhão e Machado 2011), de um ponto de vista cognitivo, a *percepção visual* e, por extensão, a *visualização* tem funções centrais nesse processo. A *percepção visual* (ou visão) significa ter acesso direto a qualquer objeto físico: "nada é mais convincente do que o que se vê", portanto oposta à representação, "algo que se toma em lugar de alguma outra coisa".

A visão, como *acesso direto ao que se vê,* é designada como *epistemológica* (participa da gênese do conhecimento), e tem uma *função apreensiva global, denominada de função sinóptica*, por sua vez oposta à dedução matemática. De acordo com a perspectiva duvaliana, não se atinge o conhecimento matemático ao realizar as funções *epistemológica* e *sinóptica da* *visão*, pois os objetos matemáticos são abstratos cujo acesso ocorre via coordenação dos registros de representação semiótica. Nesse sentido, *visão* é diferente de *visualização*, algo que se refere à atividade cognitiva *intrinsecamente semiótica*, implicando a construção de uma imagem *bem distinta da percepção*.

É necessário trabalhar com a *observação* atenta, pois nem mesmo a compreensão dos números organizados em tabelas é simples, como destacam Camejo, Maranhão e Miranda 2009 apud Maranhão e Machado 2011. Essa compreensão, de acordo com Maranhão e Machado (2011), requer *organização de relações entre unidades representativas* (organização de números nas células das tabelas representando o enunciado do problema), *bem como a completa apreensão de qualquer dessas organizações* (das relações matemáticas entre: os números na primeira coluna, os números na segunda coluna, os números nas duas colunas e os números de cada linha, para resolver o problema).

Para realizar seu trabalho, Maranhão e Machado (2011) selecionaram - em razão do interesse despertado pelos descritores - estudos do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica voltadas ao pensamento proporcional, a de Miranda (2009 apud Maranhão e Machado 2011) e a e Camejo *et al*. (2009 apud Maranhão e Machado 2011), visando um aprofundamento nos referenciais teóricos já mencionados. Quanto aos descritores, Miranda (2009 apud Maranhão e Machado 2011) partiu de componentes promotores do desenvolvimento do pensamento proporcional, conforme Post, Behr e Lesh (1995 apud Maranhão e Machado 2011), esclarecendo e explicitando o conteúdo teórico matemático subjacente. A autora examinou propostas curriculares e analisou dissertações de instituições paulistas (entre 1971-2007) voltadas aos anos finais do Ensino Fundamental, em cujos títulos houvesse menção expressa aos termos *pensamento proporcional* ou *proporcionalidade* ou, ainda, *proporções*. Havia seis dissertações de mestrado sobre pensamento proporcional. Assim, relacionou aspectos essenciais para o desenvolvimento do pensamento proporcional, considerados *descritores* para a análise do conteúdo das pesquisas selecionadas. Inicialmente, eram quinze descritores, mas ao longo do estudo foram acrescentados mais quatro.

Neste momento nos ateremos ao referencial que abrange o tema do presente artigo: distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais.

Conforme Sfard (1987 apud Maranhão e Machado 2011), a resolução de problemas, seja na matemática ou em diferentes campos da atividade humana, participa do processo de compreensão, que requer um aprofundamento de ideias matemáticas. É interessante, portanto, distinguir situações proporcionais e não proporcionais, fazendo com que os estudantes analisem enunciados de problemas, procurando solicitar justificativas, para atingir a metacognição via comunicação de ideias matemáticas. Inspiradas em Lima (1986), Maranhão e Machado (2011) ponderam que tal distinção deve preceder a tomada de decisão relativa à estratégia de resolução de problemas que requeiram outros componentes do pensamento proporcional. Com base em tais perspectivas teóricas passamos a analisar as produções de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.

Procedimentos Metodológicos

O estudo foi desenvolvido concomitantemente aos trabalhos do PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, vinculado ao curso de Pedagogia da Universidade Presbiteriana Mackenzie – UPM, e patrocinado pela CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

No plano de trabalho do programa estavam previstas visitas quinzenais a uma escola da rede pública estadual localizada no entorno da UPM, parceria da instituição de ensino superior no projeto de iniciação à docência. A professora supervisora do projeto e docente da escola, assumiu uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental, no ano letivo de 2013, com 31 alunos.

No projeto estão envolvidos ainda 10 alunos do curso de Pedagogia, todas bolsistas, assim como uma docente do curso de Pedagogia, denominada coordenadora de área que supervisiona o desenvolvimento das diferentes propostas.

Os trabalhos do PIBID no curso de Pedagogia da UPM iniciaram-se no 2° semestre de 2012, e tem previsão de duração mínima de 1 ano.

Nessa pesquisa focalizamos a turma de 4° ano do Ensino Fundamental, no ano de 2013. Em março desse ano a Secretaria do Ministério de Educação (SME) solicitou aos professores que aplicassem um rol de exercícios e problemas matemáticos a título de sondagem.

Acompanhamos a aplicação desse rol de exercícios e durante 15 dias observamos a turma, sob regência da professora supervisora.

A partir de tal observação, planejamos algumas aulas, nas quais propusemos outros exercícios que abarcaram o campo multiplicativo, assim como oficinas de jogos, com a mesma ênfase.

Após o encaminhamento de tais propostas, e análise das produções dos alunos selecionados, traçou-se seis categorias de análise, posto que refletem as produções de todos os alunos envolvidos na pesquisa.

Categorias de análise:

1) Não reconhece a multiplicação como recurso de resolução e apresenta questões ligadas ao Sistema de Numeração Decimal (SND).
2) Não reconhece a divisão como recurso de resolução, mas faz uma subtração direta dos dados do problema.
3) Alunos que memorizaram a tabuada, mas não reconhecem a operação como recurso de resolução.
4) Reconhece a multiplicação como recurso de resolução, mas erra no cálculo
5) Alunos que reconhecem a operação como recurso de resolução, e acertam o cálculo.
6) Alunos que não reconhecem a multiplicação, e na resolução parecem misturar procedimentos de adição e multiplicação.

A produção dos alunos envolvidos

Quanto a categoria 1 de resolução de problemas apresentados:

Nessa categoria encaixam-se as produções especificamente do problema de multiplicação do tipo: se um animal tem x patas quantas patas terão y animais, para as quais os alunos elegem a adição como recurso de multiplicação. Além disso, ao montarem o algoritmo para a resolução apresentam questões ligadas ao Sistema de Numeração Decimal. Salienta-se que os estudos realizados acerca do pensamento proporcional indicaram que, para a resolução desse tipo de problema, o aluno tem de perceber "a covariação" entre duas ou mais grandezas e "chegar a uma fórmula". Para tanto, seria necessário, do ponto de vista cognitivo, a *percepção visual* e, por extensão, a *visualização* da resolução do problema.

Compreendemos que a adição pode ser uma estratégia para a resolução dos problemas de multiplicação, desde que o façam de forma sucessiva. No enunciado analisado os alunos teriam a possibilidade de somar 4 patas do gato 120 vezes (4+4=8+4=12+4=16 até chegar ao resultado 480) ou somar 120 gatos pela quantidade de patas de cada um: 4 patas (120+120+120+120=480).

Ocorre, porém, que os alunos elegeram a adição do número de patas pela quantidade de gatos (120 + 4) e, ainda, demonstraram falta de conhecimento do Sistema Numérico Decimal (SND) pois atribuíram ao numeral 4 qualidade de centena ao invés de unidade. Assim, o resultado apresentado foi 520.

Mesmo que os alunos dessa categoria tivessem percorrido o caminho das adições sucessivas, tal estratégia ainda assim não se aproximaria do descritor do pensamento proporcional: distinguir situações proporcionais de não proporcionais, pois nesses casos, o que se percebe é que as crianças tendem a considerar os grupos, e depois conta-los um a um, em detrimento da aplicação de contagem a partir do multiplicador apresentado (mesmo que no caso da aplicação da adição).

Quanto a categoria 2 de resolução dos problemas apresentados:

Nessa categoria encaixam-se as produções, especificamente do problema de divisão (do tipo repartir), nas quais os alunos elegem a subtração como recurso de divisão. Cabe ressaltar que outras pesquisas já indicaram que os alunos do Ensino Fundamental reconhecem a operação divisão em enunciados que envolvem esse tipo de ideia com mais facilidade, em comparação com as situações que solicitam ideia de medida (Franchi, 1995).

Entendemos que a subtração pode ser estratégia de resolução para os problemas de divisão, desde que o façam de forma sucessiva, seguido de contagem: quantas vezes o número 40 do enunciado apresentado (divisor) caberia no total 240 do enunciado apresentado (dividendo).

No entanto, os alunos que elegeram a subtração o fazem da forma como apresentamos acima, ou seja, fazem a subtração direta: 240 – 40, ao invés de

240 – 40 = 200

200 – 40 = 160

160 – 40 = 120

120 – 40 = 80

80 – 40 = 40

40 – 40 = 0

o que envolveria subtrair 40 até zerar a quantidade total, com a condição de que todas as subtrações seriam possíveis no universo dos números naturais.

Mesmo que os alunos dessa categoria tivessem percorrido o caminho das subtrações sucessivas, tal estratégia ainda assim não se aproximaria do descritor do pensamento proporcional: distinguir situações proporcionais de não proporcionais, pois nesses casos, o que se percebe é que as crianças tendem a considerar os grupos, e depois conta-los um a um, em detrimento da aplicação de contagem a partir do dividendo apresentado (mesmo que no caso da aplicação da subtração).

Quanto a categoria 3 de resolução de problemas apresentados:

Nessa categoria encaixam-se as produções, especificamente do problema de multiplicação (do tipo se um animal tem x patas quantas patas terão y animais), nas quais sabemos que os alunos que as produziram, memorizaram a tabuada, mas não reconhecem a operação como recurso de resolução.

Nesses casos observa-se que a memorização desprovida de atribuição de sentido para a operação não facilita a resolução. Retomando o aporte teórico dessa pesquisa, para a percepção da operação como estratégia de resolução seria necessário que a percepção visual e, por extensão, a *visualização* a resolução do problema. Sabia-se, por observação da sala de aula quais os alunos que tinham memorizado alguns resultados de sequências multiplicativas (as tabuadas), o que possibilitou a criação dessa categoria de análise. No entanto, contrariando as expectativas da professora supervisora, muitos deles não aplicam o que parecem saber para a resolução do problema apresentado.

Isso nos leva a afirmar que, embora bastante relevante, a memorização das sequências não garante sua aplicação na resolução de problemas. Para a denominada *percepção visual* seja possível, nos parece que o trabalho com tabelas seja adequado. No entanto, essa perspectiva de pesquisa não nos cabe por ora.

Frisamos, no entanto, que as intervenções didáticas no seio dos trabalhos do PIBID têm se voltado para essa questão.

Quanto a categoria 4 de resolução de problemas apresentados:

Nessa categoria encaixam-se as produções, especificamente do problema de multiplicação (do tipo se um animal tem x patas quantas patas terão y animais), nas quais os alunos elegem a multiplicação como recurso de resolução, mas erram no cálculo. Depreende-se que os alunos desta categoria percebem "a covariação" entre duas ou mais grandezas e chegam a uma fórmula. Portanto, do ponto de vista do pensamento proporcional reconhecem a *percepção visual* e, por extensão, a *visualização* para resolução do problema.

Entretanto, erram no momento de realizar o cálculo. O grau de dificuldade da multiplicação 120 x 4 é mínimo uma vez que o aluno precisa ter memorizado apenas as primeiras multiplicações da tabuada do 4, ou seja, 4 x1 = 4 e 4 x 2 = 8 para resolver o cálculo.

Percebemos que a falta de matemática significante na prática docente de professores da escola elementar reflete no parco entendimento dos alunos em descrever conceitos e pensamentos para compreender taxa de variação, proporção e proporcionalidade, incluindo escala. Os procedimentos metodológicos para introdução do campo multiplicativo devem preceder de uma apreensão do sistema numérico decimal, do valor posicional do número e da memorização das tabuadas.

Quanto a categoria 5 de resolução de problemas apresentados:

Nessa categoria encaixam-se as produções, especificamente do problema de multiplicação (do tipo se um animal tem x patas quantas patas terão y animais), nas quais os alunos elegem o recurso da multiplicação a acertam o cálculo. Salienta-se que os estudos realizados sobre o pensamento proporcional indicaram que o aluno tem de perceber “a covariação” entre duas ou mais grandezas e “chegar a uma fórmula”. Para tanto, seria necessário, do ponto de vista cognitivo, a *percepção visual* e, por extensão, a *visualização* a resolução do problema. Isso se reflete na resolução apresentada por esses alunos.

Nessa categoria encaixam-se, ainda, as produções, especificamente do problema de divisão (do tipo repartir), nas quais os alunos elegem a divisão como recurso de resolução e acertam o cálculo.

Os alunos dessa categoria percorreram o caminho da multiplicação e da divisão e se aproximaram do descritor do pensamento proporcional: distinguir situações proporcionais de não proporcionais.

Quanto a categoria 6 de resolução de problemas apresentados:

Nessa categoria encaixam-se as produções, especificamente do problema de multiplicação (do tipo se um animal x tantas patas quantas patas terão y animais), nas quais os alunos elegem a adição como recurso de multiplicação e apresenta questões ligadas ao SND. Salienta-se que os estudos realizados sobre o pensamento proporcional indicaram que o aluno tem de perceber “a covariação” entre duas ou mais grandezas e “chegar a uma fórmula”. Para tanto, seria necessário, do ponto de vista cognitivo, a *percepção visual* e, por extensão, a *visualização* a resolução do problema.

Compreendemos que a adição pode ser uma estratégia para a resolução dos problemas de multiplicação, desde que o façam de forma sucessiva. No enunciado analisado os alunos teriam a possibilidade de somar 4 patas do gato 120 vezes (4+4=8+4=12+4=16 até chegar no resultado 480) ou somar 120 gatos pela quantidade de patas de cada um - 4 patas (120+120+120+120=480).

Ocorre, porém, que os alunos elegeram a adição direta do número de patas do gato pela quantidade de gatos (120 + 4 = 124) ao invés da adição sucessiva 120 + 4 = 124; 124+4 = 128 ....até 476 + 4 = 480.

Mesmo que os alunos dessa categoria tivessem percorrido o caminho das adições sucessivas, tal estratégia ainda assim não se aproximaria do descritor do pensamento proporcional: distinguir situações proporcionais de não proporcionais, pois nesses casos, o que se percebe é que as crianças tendem a considerar os grupos, e depois conta-los um a um, em detrimento da aplicação de contagem a partir do multiplicador apresentado (mesmo que no caso da aplicação da adição sucessiva).

Parece-nos que os alunos elegem uma operação (adição) e no momento de realizar o cálculo misturam as operações (adição e multiplicação) para chegarem ao resultado final (120 + 4 = 180). É como se multiplicassem as unidades 0 x 4 = 0, as dezenas 4 x 2= 8 e por fim somassem as centenas 1 + 0 = 1.

Considerações Finais

Nessa pesquisa buscou-se investigar que sentidos das operações do campo multiplicativo emergem da resolução de problemas, elaboradas por alguns alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental I, sentidos esses explorados do ponto de vista do pensamento proporcional. Tal tipo de pensamento é característico de algumas situações nas quais se resolvem problemas envolvendo principalmente covariação de grandezas.

Por hipótese, e por meio de observações, pressupomos que a intervenção docente nos anos iniciais do Ensino Fundamental cumpre papel relevante para a constituição desse tipo de pensamento. No entanto, é comum a supervalorização da memorização das sequencias de natureza multiplicativa (as tabuadas) em detrimento de um trabalho voltado para a construção do raciocínio proporcional. As produções dos alunos envolvidos revelam a tendência ao apelo às ideias da adição para a resolução de problemas dessa natureza.

Sabemos que a adição pode resolver tais problemas, em função da distributividade, no entanto, as produções, em muitos casos, apontam para a aplicação da operação adição a partir da soma direta das informações numéricas, o que nos parece preocupante.

É essencial que a intervenção docente seja planejada com vistas a contemplar ao necessário avanço, não apenas da resolução – pois em muitos casos observa-se crianças paralisadas pelo desafio de se adicionar patas de 120 gatos. Embora percebam que a adição direta das informações do problema poderia responder à resolução do problema, não imaginam outra possibilidade além de se executar a operação 4 + 4 + 4....(120 vezes), mas também da percepção da covariação.

Nesse sentido, cabe contextualizar o trabalho do PIBID, que nesse caso envolve além da professora da sala de aula, um grupo de 10 alunas do curso de Pedagogia da UPM, e a professora da disciplina de Fundamentos e Metodologia do Ensino da Matemática, e acerca dos trabalhos desse grupo, frisar que gradativamente os resultados de seus esforços têm atingido o curso em geral, e não apenas o grupo diretamente envolvido.

Um exemplo dessa tendência é a discussão a respeito do trabalho com tabelas, entendido como alternativa didática para a percepção e a visualização da covariação, entre crianças do Ensino Fundamental. Futuras pesquisas poderão explorar melhor os resultados desse trabalho.

Além disso, todo o grupo tem refletido a respeito dos saberes matemáticos e didáticos necessários à docência nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e o pensamento proporcional e seu desenvolvimento tem sido alvo de atenção.

Dessa forma, entendemos responder a demanda apontada pelas autoras Maranhão e Machado (2011), para as quais, a falta de matemática significante na prática docente de professores da escola elementar ao parco entendimento dos alunos em descrever conceitos e pensamentos para compreender taxa de variação, proporção e proporcionalidade, incluindo escala. (Norton 2005 apud Maranhão e Machado 2011). Acreditam que diante dessa premência surge a necessidade de conciliar noções como aprender, conhecer, comunicar, pensar e compreender para chegarem ao aprofundamento das ideias matemáticas para alcançarem a metacognição (pensar sobre o que foi descrito). (Sfard 2008 apud Maranhão e Machado 2011).

Algumas crianças envolvidas no grupo respondente dessa pesquisa apresentam boas resoluções para os problemas apresentados, e embora não tenhamos optado pela categorização de tais resoluções, é importante salientar sua existência. Entender o que se passa no raciocínio das crianças, e a partir disso buscar interferir no processo de pensar, aprender, comunicar e compreender matemática é um processo desafiador.

As produções aqui analisadas apontam para dois aspectos importantes: o primeiro a confusão entre a adição e a multiplicação. Fica claro que muitos alunos aplicam a adição inadvertidamente, adicionando as informações numéricas do problema, como se fossem parcelas de um mesmo todo, nesse processo ora apresentando questões ligadas ao sistema de numeração decimal, ora não.

O segundo aponta para a aparente confusão entre memorizar tabuadas e atribuir sentido matemático à operação multiplicação. A esse respeito, as produções das crianças revelaram que a simples memorização não responde ao desafio de resolver problemas.

Todavia, buscar compreender tais produções, e a partir delas criar novas alternativas de ensino, tem se mostrado um caminho difícil, mas possível de ser traçado, em busca de avanços no ensino e na aprendizagem da área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMEJO, A.; MARANHÃO, C.; MIRANDA, M. R. *Ideias de professoras dos anos iniciais sobre números racionais.* In: IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA/SIPEM. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. *Anais...* Brasília-DF: SBEM, UCB, 2009, p. 1-11. CD-ROM.

FRANCHI, A. *Compreensão das situações multiplicativas elementares*. 1995 (Doutorado em Educação: Supervisão e Currículo). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. *Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional.* Educar em Revista, Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 141-156, 2011, Editora UFPR.