

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



## INTEGRAL DEFINIDA: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

**Luciana Boemer Cesar Pereira**<sup>1</sup>

**Guataçara dos Santos Junior**<sup>2</sup>

**Sani de Carvalho Rutz da Silva**<sup>3</sup>

### Educação Matemática no Ensino Superior

**Resumo:** O presente artigo tem por objetivo apresentar uma análise do conteúdo de integral definida sob a ótica da transposição didática. O estudo realizou-se com a análise do conteúdo de integral definida em 5 (cinco) livros de cálculo. A pesquisa é classificada como exploratória de cunho descritivo e contou com análise por meio das regras de transposição didática. As análises revelam que os livros de cálculo contemplam parcialmente as regras de transposição didática e que falta aplicação dos conceitos apresentados. Todos os livros analisados apresentam uma forma compreensível do conceito de integral definida, mas, falta atualização, articulação e inclusão de novos conceitos, principalmente voltados ao uso de novas tecnologias. Espera-se com essa análise contribuir para a escolha de referências de estudo para alunos de graduação e auxiliar professores na formulação de suas práticas didáticas. E que as próximas edições de livros de cálculo se preocupem em utilizar as pesquisas científicas atuais de aplicações dos conhecimentos matemáticos e adentrem ao uso das novas tecnologias.

**Palavras Chaves:** Integral Definida. Livros didáticos. Transposição Didática.

### INTRODUÇÃO

O conceito de integral, como área de uma figura plana ou volume de um sólido, surge e alcança um razoável desenvolvimento com Arquimedes (285-212a.C.) na antiguidade (TUMELERO & MUSIAL, 2008). Caracterizando, que a matemática daquela época era essencialmente geométrica, não havia simbologia desenvolvida, e, portanto não havia um “cálculo integral” sistematizado. Os problemas estudados eram necessariamente de cálculos de áreas, volumes e comprimentos de arcos.

A transposição desse conceito muda de foco de acordo com cada autor que apresenta os conceitos de integral definida nos livros de cálculos utilizados nos principais cursos das áreas de exatas e de tecnologia.

<sup>1</sup>Mestranda do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Tecnologias. Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). [lucesarboemerpg@yahoo.com.br](mailto:lucesarboemerpg@yahoo.com.br)

<sup>2</sup>Doutor em Ciências Geodésicas (UFPR), Mestre em Ciências Geodésicas (UFPR). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. E-mail: [Guata@utfpr.edu.br](mailto:Guata@utfpr.edu.br)

<sup>3</sup>Doutora em Ciência dos Materiais (UFRGS), Mestre em Matemática Aplicada (UFRGS). Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia (PPGECT) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. E-mail: [sani@utfpr.edu.br](mailto:sani@utfpr.edu.br)

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



Os livros de cálculo têm uma característica comum entre eles em suas sequências de apresentação dos conteúdos: definição, teoremas, demonstrações, exemplos e exercícios. Mas o diferencial de cada autor está na maneira de apresentação, ou seja, na transposição didática que utiliza para tornar o conceito em estudo mais acessível para o estudante.

Diante desse pressuposto, e sob a justificativa de que o cálculo é umas das disciplinas com alto nível de reprovação nos cursos de graduação e que os alunos utilizam os livros como principal fonte de consulta, surge o objetivo de apresentar uma análise do conteúdo de integral definida sob a ótica da transposição didática.

Para responder esse questionamento buscou-se aporte teórico em autores da transposição didática e do ensino de matemática.

## FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O livro didático é considerado uma ferramenta fundamental e essencial para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos.

Nos cursos de graduação o livro de Cálculo é a principal fonte de consulta, logo, eles devem trazer os conteúdos de maneira que sua transposição permita a aprendizagem dos estudantes. Mas, alguns estudiosos ao analisarem livros de cálculo perceberam que eles não cumprem com seu papel fundamental. Almeida, Fatori e Souza (2007, p.49), afirmam que:

A forma como são estruturados os livros didáticos de Cálculo adotados nas universidades brasileiras também não favorece o desenvolvimento e a aprendizagem dos alunos. De modo geral, cada capítulo é iniciado com definições seguidas de teoremas ou propriedades, depois são apresentados alguns exemplos de exercícios que utilizam essas definições e só no final do capítulo são apresentadas algumas explicações relacionadas ao assunto. Deste modo, o aluno, além de já receber os problemas prontos, ao resolvê-los já sabe, de antemão, a que conceitos deve recorrer.

Um livro didático deve apresentar seus conceitos de forma organizada para que possa contribuir na transposição didática. Um conteúdo sofre transformações adaptativas com a finalidade de se tornar um “objeto de ensino”. A passagem que o objeto de saber transcorre para o objeto ensinar é denominada de transposição didática (CHEVALLARD, 1998).

A transposição didática se caracteriza pela translação do saber científico em saber escolar. O processo para uma compreensão da transposição didática se baseia no ambiente escolar, onde o conhecimento escolar é um novo conhecimento, ou seja, “o conteúdo escolar é um “objeto didático” produto de um conjunto de transformações” (PINHO ALVES, 2000b, p. 21).

Sobre o processo de transposição didática, Astolfi e Develay (1990, p. 48) afirmam que há uma “descontemporização dos conceitos, quando se tornam objetos de ensino. Em vez de estarem ligados a questões científicas precisas a serem resolvidas, tornam-se ‘verdades de natureza [...]’”.

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



Pensando nesse processo, Astolfi (1990) elaborou 5 (cinco) regras que devem ser observadas no processo de transposição didática. Estas regras estão de acordo com as características propostas por CHEVALLARD sobre as atualidades baseadas no saber sábio, moral e biológica.

Regra I – Modernização do saber escolar – atualização das aplicações inserindo as pesquisas científicas da atualidade e uso de novas tecnologias.

Regra II – Atualização do saber a ensinar – inclusão de novos fatores.

Regra III – Articulação do saber “novo” com o “antigo”.

Regra IV – Transformação de uma saber em exercícios e problemas.

Regra V – Apresentação de um conceito de uma forma mais compreensível.

Logo, os livros de Cálculo devem em sua estrutura apresentar o saber matemático de maneira a transpor as transformações do conhecimento matemático de forma planejada para atingir o intelecto do aluno, pois:

A transposição didática permite uma visão panorâmica das transformações porque passa o saber matemático, desde sua gênese acadêmica, passando pelas idéias de autores de livros, por especialistas, pelas interpretações do professor, até chegar ao espaço conflituoso da sala de aula e, daí, para o nível intelectual do aluno. [...]. Tendo em vista essa diversidade de influências, a transposição didática está diretamente relacionada a outras noções matemáticas. [...] no planejamento de uma situação didática, deve-se levar em consideração informações fornecidas pela transposição didática, algumas delas de natureza puramente epistemológicas. Por esse motivo, a transposição didática é uma noção integradora da didática da matemática. (PAIS, 2005, p. 112).

E ainda, para que se concretize um ensino de Cálculo de maneira significativa, tomemos as palavras de Libâneo (1990, p. 426) que caracteriza que “o caráter essencial do ensino é a transmissão [...] resultado do saber sistematizado no processo de conhecimento do mundo objetivo”. Sendo assim, não bastam livros de boa qualidade e com boas explicações é necessária uma atuação do professor como mediador do processo de ensino e aprendizagem.

## METODOLOGIA

A pesquisa se realizou por meio da análise do conteúdo de Integral Definida em 5 (cinco) livros de Cálculo:

1. ANTON, Howard. Cálculo: um novo horizonte. V. 1. Porto Alegre: Bookman, 2000.
2. FLEMMING, Diva Marília. Cálculo A: funções, limites, derivação, integração. São Paulo: Person Prentice Hall, 2006.

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



3. Livro 3 – LEITHOLD, Louis. O cálculo com Geometria Analítica. V.1, São Paulo: Harbra, 1994.
4. Livro 4 – GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um como Curso de Cálculo. V.1, Rio de Janeiro; São Paulo: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2000.
5. THOMAS, Georg Jr. FINNEY, Ross L. WEIR, Maurice D. GEORDANO, Frank R. Cálculo I. Pearson Addison Wesley, São Paulo: 2002.

Essa pesquisa é classificada como exploratória de cunho descritivo e foi analisada sob a ótica dos pressupostos teóricos da transposição didática.

Os critérios utilizados para essa análise são em acordo com os requisitos e características propostas por Chevallard (1998) e que foram elaboradas por Astolfi (1990), onde contemplam a sobrevivência dos saberes:

Regra I – Modernizar o saber escolar;

Regra II – Atualizar o saber a ensinar;

Regra III – Articular o saber “novo” como “antigo”;

Regra IV – Transformar um saber em exercícios e problemas;

Regra V – Tornar um conceito mais compreensível;

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na sequência é apresentada a análise dos livros de Cálculo.

*Livro 1 – ANTON, Howard. Cálculo: um novo horizonte. V. 1, p. 404 – 416. Porto Alegre: Bookman, 2000.*

O livro apresenta-se bem atualizado, no que diz respeito ao cálculo e suas concepções. O autor preocupa-se em promover a compreensão dos conceitos e em especial mostrar a sua aplicabilidade. Introduce o capítulo de integral definida com um problema sobre área. Faz uma retomada histórica pelo método da Exaustão criado por Eudoxo (465-355) a.C. Depois de todo um estudo por meio de área, apresenta a definição pela soma de Riemman e depois o teorema fundamental do cálculo. Com essa concepção temos o conceito de integral definida compreensível (regra V).

Pode-se observar que este livro traz uma preocupação com o uso de imagens gráficas o que torna o conhecimento mais atualizado para o aluno, ou seja, inclui novos saberes (regra II). Sendo assim, por meio da transposição didática temos que é considerado um livro moderno e com muitas aplicações atualizadas (regra I). Articula os conceitos de integral definida com aplicações de cálculo de áreas (regra III) e continua essa articulação amarrado-a aos conceitos de integral de Riemman e teorema fundamental do cálculo.

Apresenta problemas resolvidos detalhadamente no decorrer do capítulo e muitos outros exercícios bem atrativos para resolução nos exercícios de fixação o que mostra a regra IV bem definida.

Sendo assim, esse livro está nos parâmetros da transposição didática pois apresenta o significado do saber matemáticos que:

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



[...] para o aluno, é fortemente influenciado pela forma didática pela qual o conteúdo lhe é apresentado. O envolvimento do aluno dependerá da estruturação das diferentes atividades de aprendizagem através de uma situação didática. Existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizada uma intenção, do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo. (FREITAS, 2008, p. 80).

Pois, não basta apresentar todos os conceitos corretamente, deve ser apresentado sua aplicação, e esta articulada com outros conceitos, pois os problemas reais não são resolvidos com uma única definição.

*Livro 2 – FLEMMING, Diva Marília. Cálculo A: funções, limites, derivação, integração. São Paulo: Person Prentice Hall, 2006.*

Destina 5 (cinco) páginas do total ao estudo de integral definida, distribuído em tópicos que englobam: definição; propriedade das integrais definidas; teoremas; proposições.

Mostra em sua definição que a integral definida nasceu com a formalização matemática dos problemas de áreas e problemas físicos. Apresenta as propriedades das integrais por meio de proposições e articula o conceito de integral definida com o Teorema Fundamental do Cálculo e o cálculo de áreas (regra III). Portanto, tem sua apresentação do conceito de forma compreensível (regra V).

Apresenta algumas atividades e exercícios, mas sem aplicação e sim apenas cálculos diretos que utilizam a definição. Sendo assim a regra IV fica contemplada, mas insuficiente, pois, não apresenta ampla variação de atividades didáticas.

Sendo assim, há necessidade de um cuidado do professor ao atribuir as referências de livros de cálculo para seus alunos.

Para o aluno ter acesso ao saber, é necessário a colocação didática do problema da linguagem envolvida no saber científico. Nesse sentido, apesar de parecer evidente que o saber científico não pode ser ensinado na forma como se encontra redigido nos textos técnicos, essa questão se constitui num obstáculo que deve ser considerado no processo de aprendizagem. (PAIS, 2008, p.22)

Pelas características das regras I e II, observa-se que mesmo sendo uma edição atualizada de 2006, é um livro desatualizado por não possuir aplicações dos conceitos em situações reais e não propor o uso de tecnologias (*softwares* e calculadoras gráficas) em suas definições demonstrações.

*Livro 3 – LEITHOLD, Louis. O cálculo com Geometria Analítica. V.1, São Paulo: Harbra, 1994.*

Destina 48(quarenta e oito) páginas do total ao estudo de integral definida, e apresenta: definições; teoremas; propriedades da integral definida; teorema de valor médio para integrais; os teoremas fundamentais do cálculo; área de uma região plana e integração numérica. Além disso, apresenta também um capítulo com 46 (quarenta e seis) páginas destinadas às aplicações da integral definida.

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



Apresenta a definição de integral definida pelo limite da função em um intervalo fechado, caso esse limite exista. Essa definição é bem compreensível e as aplicações para provar esses conceitos são bem acessível, o que mostra a regra V sendo contemplada. Também se analisa que o autor tem uma preocupação em mostrar a integral como uma antiderivada, sendo assim, contempla a regra III (articulação do saber), onde os conceitos já aceitos e aprendidos de derivadas, pelos estudantes, são novamente usados para adquirir novos conceitos.

Com relação aos problemas e atividades (regra IV), apresenta uma grande variedade de exercícios e ainda um capítulo em separado com aplicações da integral definida, e isto é afirmado pelo próprio autor do livro que coloca que :

O cálculo com geometria analítica foi planejado para futuros matemáticos e para estudantes cujo interesse seja Engenharia, Ciências Exatas e Humanas, ou áreas não técnicas. As explanações passo a passo, os inúmeros exemplos descritos e a ampla variedade de exercícios continuam a ser os aspectos relevantes nesta edição. Uma vez que um livro-texto deve ser escrito para estudante, empenhei-me em manter uma apresentação de acordo com a experiência e maturidade de um principiante, sem deixar que qualquer passagem fosse omitida ou ficasse sem explicação ou explicações. (LEITHOLD, 1994, p. ix)

Com essa explanação do autor, que é encontrada no livro, é destacada a sua preocupação com a transposição didática dos saberes, mas essa acontece parcialmente na obra, pois, as características das regras I e II não são contempladas totalmente. O livro apresenta muitas aplicações mais por se tratar de uma edição de 1994, as aplicações estão desatualizadas e não há inclusões de novos saberes.

*Livro 4 – GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo. V.1, Rio de Janeiro; São Paulo: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 4ª Ed. , 2000.*

Traz a definição de integral definida de maneira bem tradicional, por meio da teoria parcial da teoria de integração. A definição é realizada relacionada com o limite das somas de Riemman. A aplicação desse conceito não é encontrada neste livro. Sendo assim, não há a modernização do saber (regra I), nem a inclusão de novos saberes (regra II) e por apresentar apenas a definição por meio de limites contempla a regra III (articulação do saber) parcialmente.

Com relação aos problemas e exercícios não apresenta aplicações em outras áreas apenas exercícios de aplicação direta do conceito, o que implica a abordagem parcial da regra IV. E ainda por apresentar o conceito apenas como limites de soma de Riemman e não aplicar os conceitos em situações reais considera-se a aprendizagem do conceito (regra V) como insuficiente. Sendo assim este livro não é caracterizado por meio do processo de transposição didática, pois:

A transposição do conhecimento científico para o conhecimento escolar se dá primeiro com a definição da parte que será prioridade absorver. Depois, faz-se um apanhado da totalidade do conteúdo científico a fim demonstrar a sua amplitude. Essa visão mais ampla precisa ser, no mínimo, projetada para que o aluno perceba que o horizonte é bem mais distante, mas que será, aos poucos, apropriado por ele. (ALMEIDA, 2007, p.47)

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



E esta transposição não foi observada nesta obra, seguindo as regras elaboradas por Astolfi (1990).

*Livro 5 – THOMAS, Georg Jr. FINNEY, Ross L. WEIR, Maurice D. GEORDANO, Frank R. Cálculo I. Pearson Addison Wesley, São Paulo: 2002.*

Apresenta a definição de Integral Definida como o limite das somas de Riemman e como área sob uma curva. E esta definição garante a regra V, onde o conceito está em uma forma bem compreensível. Apresenta vários exemplos e exercícios, mas sem consonância com a regra I, onde apresenta esses fora de atualidade, e essa é uma afirmação apresentada por Cirilo (2008), ao fazer uma análise mais profunda do conteúdo de Integral definida nessa obra destaca que:

Os exemplos e exercícios não contemplam temas da atualidade, indicando que não há relação de pertinência de atualidade biológica e atualização do saber. Também não há atividades sugerindo o uso de novas tecnologias o que implica a não modernização e articulação do saber. [...] a adaptação do saber está parcialmente contemplado no conceito de integral definida. (CIRILO, 2008, p.72)

E como a regra I não está contemplada completamente a regra II também não, pois, se os exemplos e exercícios não são atuais, não há uma inclusão de novos saberes.

Na articulação entre um saber “novo” com o “antigo” (regra III), contempla essa operacionalidade ao apresentar a definição de integral definida por meio de limites e também como área sob uma curva. Este livro também apresenta o “Teorema Fundamental do Cálculo” como um tópico de integral definida. Apresenta vários exercícios que enfatiza demonstração com uso de *Softwares*, problemas com aplicações do conceito e exercícios para expressar limites como integrais. Sendo assim, a regra IV (ampla variedade de exercícios e atividades) fica contemplada.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da análise apresentada podemos considerar que os livros apresentados contemplam de maneira total a regra V, todos buscaram de uma forma ou outra tornar o conceito de integral mais acessível. Com relação ao fato de transformar um saber em exercícios e problemas com ampla variedade didática (regra IV) temos os livros 1, 3 e 5 que contemplam a essa regra e destacamos a obra de Leithold (1994) que apresenta muitas aplicações do conceito de integral. As regras I e II tratam da atualização das aplicações e da inclusão de novos saberes, e não são contempladas em todas as obras, pois se não há atualização de aplicações não há atualização do saber a ensinar. Apenas o livro 1 (ANTON, 2000) apresenta uma inclusão de novos conceitos com uso de imagens gráficas. A articulação entre os saberes acontece em todas as obras, de maneira total ou parcial dependendo do foco que o autor atribuiu.

Logo, conclui-se que o livro que mais contempla a transposição didática para o conceito de integral definida é o livro 1 (ANTON, 2000), pois apresenta uma concepção de cálculo bem atualizada com foco na compreensão dos conceitos e sua aplicabilidade. O livro 2

# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



(FLEMMING, 2006) e o livro 4 (GUIDORIZZI, 2000) são obras que contemplam de maneira insuficiente as regras propostas. Os livros 3 (LEITHOLD, 1994) e 5 (THOMAS, 2002) contemplam parcialmente as ideias da transposição didática.

Portanto, espera-se com essa análise contribuir para a escolha de referências de estudo para alunos de graduação e auxiliar professores na formulação de suas práticas didáticas. E que as próximas edições de livros de cálculo se preocupem em utilizar as pesquisas científicas atuais de aplicações dos conhecimentos matemáticos e adentrem ao uso das novas tecnologias.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Geraldo Peçanha de. **Transposição didática: por onde começar**. São Paulo: Cortez, 2007.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. FATORI, Luci Harue. SOUZA, Luciana Guaragna. Ensino de Cálculo: uma abordagem usando a modelagem Matemática. In: **Revista Ciência e Tecnologia**. Publicação periódica do Centro UNISAL – Ano X, nº16, junho de 2007. Campinas: UNISAL. Pp 47-59.

ANTON, Howard. **Cálculo: um novo horizonte**. V. 1. Porto Alegre: Bookman, 2000.

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. **A didática das ciências**. Campinas, SP: Papirus, 1990.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición Didáctica: del saber sadio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique Grupo Editor AS, 1998.

FLEMMING, Diva Marília. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração**. São Paulo: Person Prentice Hall, 2006.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 77-112.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. V.1, Rio de Janeiro; São Paulo: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2000.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com Geometria Analítica**. V.1, São Paulo: Harbra, 1994.

LIBÂNEO, José Carlos. **Fundamentos teóricos e práticos do trabalho docente: estudo introdutório sobre pedagogia e didática**. Tese de Doutorado. (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica – PUC. São Paulo, 1990.



# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



**ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil**  
**16, 17 e 18 de outubro de 2013**  
**Comunicação Científica**



PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução.** 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 11-48.

PINHO ALVES, José. Regras da transposição didática aplicada ao laboratório didático. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 17. n° 2. Florianópolis, ago/2000a.

THOMAS, Georg Jr. FINNEY, Ross L. WEIR, Maurice D. GEORDANO, Frank R. **Cálculo I**. Pearson Addison Wesley, São Paulo: 2002.

TUMELERO, Gilson. MUSIAL, Marieli. O surgimento da Integral. In: **Revista Luminária**, v. 1, n° 9. União da Vitória, jul/2008.