PENSAMENTO GEOMÉTRICO DOS ADOSLESCENTES:
ENTRE VAN HIELE E PIAGET

Rebeca Moreira Sena[1]

Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: Este trabalho tem como objetivo identificar o pensamento geométrico dos adolescentes em classificação de polígonos, antes e após uma intervenção exploratória, mediada por tecnologias digitais. A base teórica se alicerça em, Van Hiele (1984), Piaget (1976) e Piaget e Inhelder (1993). A pesquisa se deu na análise dos testes e dos processos desenvolvidos ocorridos em dez encontros, sendo oito efetivos de intervenção, envolvendo cinco alunos do oitavo ano. A intervenção, por sua vez, teve apoio de diferentes tecnologias, algumas recentes e outras pioneiras no estudo da geometria. Assim, utilizou ou Slogo-3.0, o Cabri-Géomètre e o objeto de aprendizagem (MatGeo), desenvolvido no contexto da pesquisa. Os dados revelaram que a intervenção mediada por tecnologias digitais, possibilitou avanços significativos nos processos de reconhecimento de figuras, alterando, em todos os adolescentes pesquisados, os níveis do pensamento geométrico, dentro das duas diferentes perspectivas estudadas, apontando coerência entre elas. No entanto, há uma correspondência entre os conhecimentos prévios e avanços obtidos, ou seja, quem inicia com maior potencial consegue avançar um pouco mais, e quem apresentou maior dificuldade, a princípio, apesar de avançar, alcança um nível mais baixo, em comparação com os demais alunos do grupo.

Palavras Chaves: Geometria dos Van Hiele. Níveis do pensamento geométrico. Geometria e Piaget.

[1] Doutoranda da UFRGS e professora da UNEMAT. rebeca.sena@uol.com.br

Introdução

Este trabalho busca identificar o pensamento geométrico dos adolescentes em classificação de polígonos, antes e após uma intervenção exploratória, mediada por tecnologias digitais.

Estudiosos da área como Pavanello (1993), Kaleff (1994), Lorenzato (1995), Wale (2009), entre outros, concordam em afirmar que diferentes tipos de investigações geométricas podem contribuir para o desenvolvimento intelectual do indivíduo. Kaleff (1994) indica que não estamos conscientes da complexidade das relações que se estabelecem na mente do sujeito, no trato de figuras espaciais. Lorenzato (1995) declara que sem conhecimentos geométricos a leitura interpretativa de mundo se torna incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática distorcida. Wale (2009) constata que o senso espacial, capaz de levar o indivíduo a apreciar formas geométricas, pode ser desenvolvido em qualquer um, através de experiências geométricas ricas e interessante. Os PCNs (1998) retratam o quanto o campo é fértil para trabalhar com situações-problema.

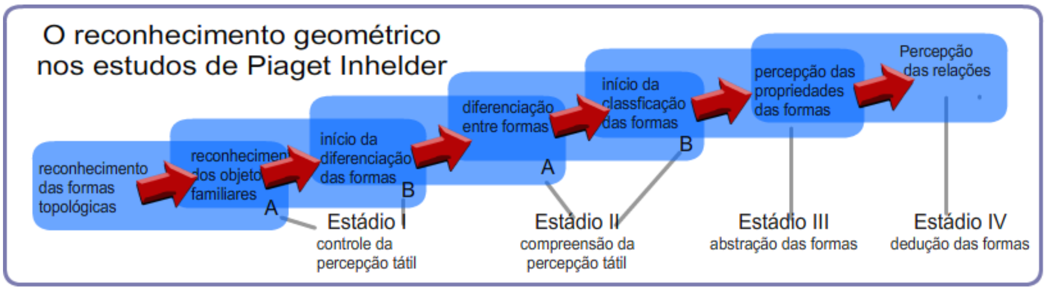
Partindo da concepção que os conhecimentos geométricos envolvem uma complexidade de pensamento, é fundamental para uma visão clara da matemática e podem ser desenvolvido por todos, é que nos interessamos em analisar o pensamento geométrico dos adolescentes.

A teoria piagetiana destaca que os sujeitos de (12-15 anos) vivem em transição entre o pensamento operatório concreto e o formal, quando as estruturas mentais se organizam, e os capacitam a trabalhar com hipóteses. Pesquisas em neurociência, como Consenza e Guerra (2011), indicam mudanças substanciais no desenvolvimento cerebral, no período da adolescência. Assim, buscamos apoio de autores que se preocuparam em descrever níveis do pensamento geométrico, como Piaget e Inhelder (1993) e o casal Van Hiele (1984).

Pensamento geométrico na teoria piagetiana

Inhelder e Piaget (1976) descrevem a lógica que vai da criança para o adolescente, e em (1993) eles estudam a representação do espaço pela criança. Eles distinguem a capacidade operatória do sujeito em níveis: **Estádio I -** das operações pré-operatórias; **Estádio II -** das operações concretas; **Estádio III -** início das operações formais; **Estádio IV-** estabelecimento das operações formais.

Figura 1: Níveis do pensamento geométrico na teoria piagetiana



Fonte: Figura elaborada pela autora, baseada nos registros de Piaget e Inhelder (1993).

No **Estádio I**, as crianças são capazes de controlar a percepção tátil, reconhecer os objetos familiares, depois as formas topológicas, mas não as euclidianas. O sujeito, dessa fase, apresenta uma incapacidade sintética, e opera por correspondências intuitivas simples. Piaget e Inhelder (1993) distinguiram dois subestádio: **IA** – quando há o reconhecimento apenas dos objetos familiares, e não das formas; **IB** quando há um início de abstração, com o reconhecimento das formas topológicas. Há diferenciação dos círculos e dos quadrados como formas fechadas, mas não a capacidade de distingui-los de uma forma aberta. As primeiras formas geométricas reconhecidas pelas crianças são caracterizadas por qualidades: fechamento, abertura ou enlaçamento, e não por elementos euclidianos (retas/curvas, ângulos, entre outros).

O **Estádio II** se dá quando há capacidade de controlar a percepção tátil, com o reconhecimento progressivo das formas euclidianas. No subestádio **IIA** há distinção progressiva das formas, segundo seus ângulos e suas dimensões. Nas formas simples como quadrado, retângulo e círculo, a diferenciação consiste em combinar igualdades, raios do círculo, ângulos retos. Já o losango, por apresentar dupla dificuldade gráfica e recognitiva, não é reconhecido. Os sujeitos têm dificuldades para construir uma reta paralela a um dos lados da mesma, apresenta, ainda, uma representação centrada no ponto de vista próprio. Já no subestádio **IIB** há descobertas sucessivas do losango e trapézio, e antecipação das transformações, mas sem noção de paralelismo e ideia sobre a conservação de lados. Distinguem formas mais complexas, através de reações intermediárias, com tentativas de diferenciar os pontos de vista, mas subsistem a vários erros de representação. Há o início de análise através de coordenações parciais.

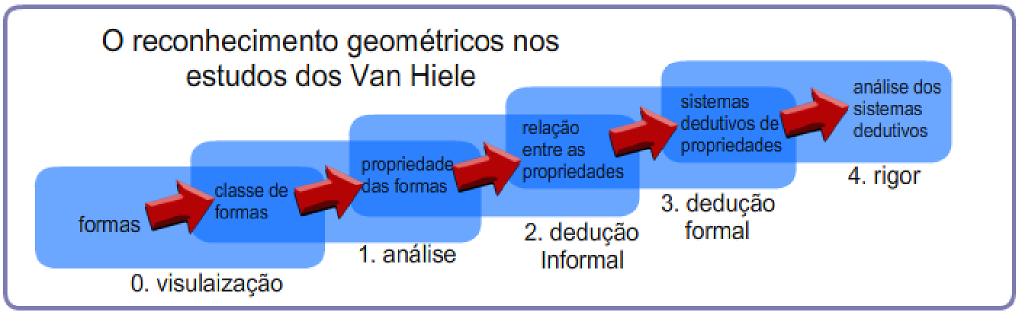
No **Estádio III,** passa a existir compreensão sobre a abstração das formas, com coordenação operatória. É importante lembrar que a "operação é uma ação suscetível de voltar ao seu ponto de partida e de fazer composição com outras, segundo esse duplo modo direto e inverso" (PIAGET; INHELDER, 1993, p.51). No subestádio **IIIA** são construídas noções de paralelismo, inicia a análise progressiva dos ângulos, passa existir uma diferenciação operatória parcial dos pontos de vista, nas perspectivas euclidianas e projetivas, com o início das coordenações de conjuntos. No subestádio **IIIB** passa a existir uma diferenciação operatória, e o sujeito passa a atuar com a realidade completa das perspectivas, com o início das relações implicativas, análise progressiva dos ângulos, e se completa com as coordenações de conjuntos.

O **Estádio IV** é quando ocorre a formação explícita das relações, uma dedução do processo com plano esquematizado das coordenações métricas envolvidas. Dá-se com o advento do pensamento hipotético dedutivo, isto é o sistema de operações "que opera nas proposições abstratas, referindo-se, elas mesmas, a operações concretas, concebidas como possíveis..." (PIAGET; INHELDER, 1993, p.160).

Pensamento geométrico para o casal Van Hiele

A teoria dos níveis do pensamento geométrico, do casal Van Hiele, é muito significativa para este estudo. Pierre M. Van Hiele e Dina Van Hiele Geoldof, educadores holandeses, que descrevem os processos de pensamento usados no contexto geométrico. Nasser et al. (2004), Walle (2009), Braga e Dorneles (2011) destacam o valor desses estudos, pois "[...]a teoria dos Van Hiele se tornou um fator de influência no currículo geométrico norte-americano e de diversos países" (WALLE, 2009, p. 440). Os níveis estão expressos abaixo:

Figura 2: Níveis do pensamento geométrico para os Van Hiele



Fonte: Figura elaborada por John A. Van de Walle (WALLE, 2009, p.443).

Os Van Hiele apontam cinco níveis distintos de complexidade do pensamento geométrico, indo da geometria elementar, nas séries iniciais, para abstração que é foco de estudo no ensino médio e na universidade.

O **nível O** é do **reconhecimento**, no qual as "[...] figuras são julgadas por sua aparência" (VAN HIELE, 1984, p. 249, tradução nossa). Nesse nível, as crianças reconhecem e nomeiam as figuras por suas características globais, e a aparência da forma as define. Reconhecem que os retângulos são diferentes dos quadrados, dos paralelogramos e dos losangos, mas não percebem o que essas figuras têm em comum. O fato de ser a aparência o fator dominante faz com que essa característica domine sobre as propriedades das formas. Assim, ao verem um quadrado (com giro de 45º graus), identificam-no como um losango e não mais como um quadrado. Os agrupamentos e classificações são estabelecidos através da aparência, ou seja, agrupam as formas parecidas. Com isso, as operações aditivas e multiplicativas de classes ou relações primárias ou secundárias, próprias do pensamento lógico formal, não são realizadas.

O **Nível 1** corresponde ao início dos processos de **análise** das formas, pois os estudantes "[...]reconhecem as figuras por meio do estudo de suas propriedades" (BRAGA; DORNELES, 2011, p.3). Os alunos são capazes de pensar sobre o que define um retângulo (quatro lados opostos paralelos, lados opostos de mesmo comprimento, quatro ângulos retos, diagonais congruentes). Nesse caso, reconhecem as propriedades das figuras planas isoladamente, e podem classificar os diferentes tipos de retângulos, por exemplo, como pertencentes a uma classe. Aspectos irrelevantes como tamanho ou orientação desaparecem, e os alunos classificam através de operações primárias de relações, tendo como fator determinante as propriedades das formas. Ainda não reconhecem as propriedades de uma classe/subclasse de forma ordenada, "[...] de modo que um quadrado não é necessariamente identificado como sendo também um retângulo" (VAN HIELE, 1984, p. 249, tradução nossa).

O **Nível 2** da **dedução informal**, é quando os alunos começam a pensar sobre as propriedades dos objetos geométricos, sem as restrições de um objeto em particular. São capazes de generalizar que, se os quatro ângulos de um polígono são retos, então, em sua forma, ele deve ser um retângulo. Portanto, um quadrado que tem os quatro ângulos retos compreende também a representação de um retângulo. Assim "[...] as propriedades são ordenadas e podem ser deduzidas umas das outras: uma propriedade precede ou segue outra propriedade" (VAN HIELE, 1984, p. 249, tradução nossa). Eles se engajam em um tipo de raciocínio do tipo "se - então", estabelecendo relações do tipo: "[...] se isso é um quadrado, ele tem de ser um retângulo" (WALLE, 2009, p. 442). Esse autor afirma também que as operações, nesse momento, são relações entre as propriedades do objeto, com apresentação de argumentos lógicos de forma intuitiva, sem preocupação com o rigor.

O **Nível 3**, da **dedução,** é aquele em que os estudantes são capazes de examinar mais que propriedades das formas, e passam a fazer relações entre as propriedades dos objetos geométricos. Seu "[...] pensamento está preocupado com o significado da dedução, com o inverso de um teorema, com axiomas, com condições necessárias e suficientes" (VAN HIELE, 1984, p. 250). Assim, os alunos utilizam um sistema lógico completo de afirmações para, então, deduzirem outras verdades e a partir daí, compreendem axiomas, definições, corolários e postulados. Apreciam a necessidade de um sistema lógico fundamentado sobre um conjunto mínimo de proposições.

O **Nível 4** do **rigor,** é composto por sistemas dedutivos axiomáticos para a geometria. Não ocorrem apenas deduções dentro de um sistema, como destaca Wale (2009), mas relações entre os diferentes sistemas axiomáticos. Braga e Dorneles (2011) destacam que esse nível é característico dos especialistas em matemática do ensino superior, que trabalham com diferentes sistemas, estabelecendo relações entre eles.

Enquanto a classificação piagetiana correspondente à gênese do pensamento geométrico e dá base para analisarmos parte dos nossos dados, a classificação dos Van Hiele aponta níveis mais abrangentes, indo do nível 0 até o nível 4 do rigor, que nesse caso, ultrapassa os conhecimentos esperados para o grupo selecionado neste trabalho. No entanto, compreendemos que as teorias juntas nos permitem maior aproximação ao nosso objeto de estudo.

Método

Optamos por uma metodologia com abordagem qualitativa, baseada em um estudo interventivo. Participaram da pesquisa cinco alunos do 8º ano, nomeados **Al**, **An**, **Ca**, **Sh** e **Wa**. A idade média dos alunos era de 12,8 anos com desvio padrão de 3,2 meses.

A intervenção ocorreu em dez sessões de duas horas. Na primeira e na última sessão foram realizados testes, portanto, foram somente oitos, os efetivos encontros de intervenção. Os alunos também foram atendidos individualmente em quatro encontros de 30 minutos.

Entre os instrumentos para coleta de dados, utilizamos o teste de reconhecimento de figuras, aplicado em três momentos: antes da intervenção (pré-teste), depois da intervenção (pós-teste) e seis meses depois do período da intervenção (pós-teste tardio). Outros instrumentos colaboraram com nosso objetivo como: o mapa conceitual digital; classificação digital; e os diversos registros das atividades interventivas, escritos, orais e digitais.

A intervenção, por sua vez, foi apoiada por um mosaico tecnológico, ou seja, aproximando diferentes tecnologias, algumas recentes e outras pioneiras no estudo da geometria. Assim, utilizou o Slogo-3.0, o Cabri-Géomètre e o Objeto de Aprendizagem, MatGeo[2], desenvolvido no contexto da pesquisa.

Análise dos Dados

Analisamos o pensamento geométrico dos adolescentes baseados na teoria do casal Van Hiele, apoiado pelos estudos piagetianos. Vimos que estudiosos de Van Hiele, como Nasser et al. (2004), Walle (2009), Braga e Dorneles (2011) indicam que os adolescentes, como os estudados nesta pesquisa, deveriam alcançar o **nível 2** (dedução informal). Assim, apontaremos a seguir os níveis, partindo da classificação dos Van Hiele, em articulação com os estudos de Piaget e Inhelder (1993), destacando primeiramente os conhecimentos prévios, depois os avanços indicados pela comparação entre o pós-teste imediato e pós-teste tardio.

Comparando os resultados prévios, nossos dados revelam que a nenhum dos nossos alunos estavam inicialmente no **nível 2** do pensamento dedutivo, quando seriam capazes de reconhecer as figuras por meio do estudo de suas propriedades, como destaca Braga e Dorneles (2011); ou ainda definiriam as figuras por suas propriedades de forma isolada e classificariam os diferentes tipos, como pertencentes a uma classe.

Observamos que **Wa** (13.1), **Al** (13,1) estavam no final do **nível 0** caminhando para o **nível 1**, do início da análise, e ambos se encontram no nível **IIB**, quando há descobertas sucessivas do losango e trapézio, e antecipação das transformações, mas sem paralelismo e ideia da conservação de lados, como indicam Piaget e Inhelder (1993).

Al reconheceu somente o Q11 como losango e, apesar de não reconhecer nenhum trapézio, desenha-o corretamente. Ambos reconheceram que o quadrado e o losango são definidos por igualdade de lados. Os dados de **Wa** e **Al** ainda indicam classificações simples, que os confirma no nível **IIB**. **Al** reconheceu Q1 e Q6 como figuras planas, e o retângulo e quadrado como quadriláteros. **Wa** identificou duas figuras diferentes como quadriláteros e

[2] Objeto de Aprendizagem composto de histórias interativas, jogos e atividades.

desenhou corretamente um quadrilátero. As classificações efetivadas por eles estão mais voltadas para implicações simples (dimensão e quantidade de lados).

É no nível **IIIA,** que passa a existir diferenciação de algumas características, e as noções de paralelismo são ali instituídas. Assim, compreendemos que **Sh** (12,3) e **An** (12.8), estavam inicialmente no **nível 1** pela classificação dos Van Hiele, ambas destacando-se dos demais, encontrando-se, no nível **IIIA** dos estudos piagetianos.

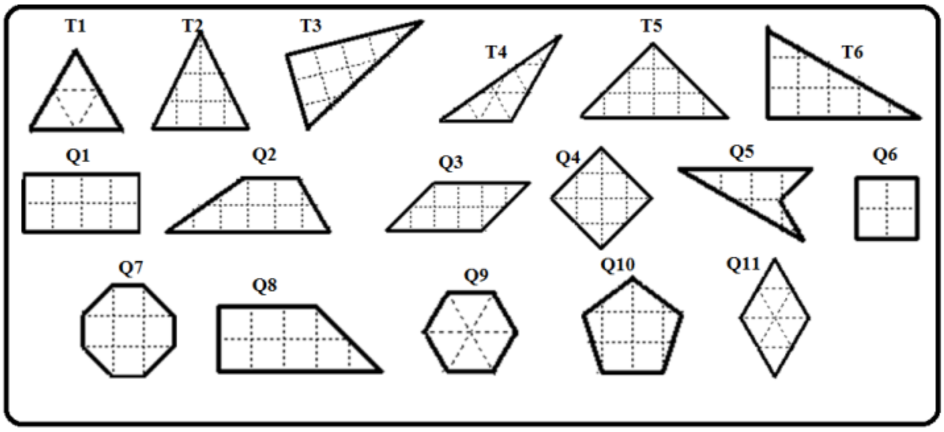
Sh embora apresentasse dificuldades em reconhecer o losango e o trapézio, descreveu que os lados paralelos do trapézio são lados que não se encontram. Esse fato parece indicar um início de noção de paralelismo. Ela fez algumas disjunções ligadas ao triângulo, pois distinguiu os acutângulos, obtusângulos, escalenos e triângulo-retângulo. Esses dados indicam a presença de algumas coordenações parciais.

An, quem obteve a maior nota em reconhecimento de figuras, não apresentou inicialmente níveis de dedução, ou ainda uma diferenciação operatória, embora, reconhecesse que o losango e o quadrado seriam a mesma coisa, justificou dizendo “está virado", ou seja, sua justificativa foi apoiada em visualização e não em uma dedução, que apontasse propriedades interligando essas figuras. **An** assinalou várias figuras como planas, ou seja, implicações simples, no entanto ela foi a única que apresentou início de uma subclasse dependente das propriedades das figuras, pois reconheceu que o quadrado e o retângulo são também paralelogramos.

Já os resultados de **Ca** indicam que ela não desenhou nem identificou o losango ou o trapézio. Reconheceu as figuras mais simples como o retângulo, o quadrado (que não está em rotação de 45º graus) e identificou somente a pipa Q11. Os dados sugerem que ela distinguiu a partir do que conseguiu observar. Os estudos do casal Van Hiele (1984) destacam que o fato de ser a aparência o fator dominante faz com que essa característica domine sobre a propriedade das formas. **Ca** não apresenta princípios de implicações e disjunções. Assim, consideramos que ela ainda se encontrava no **nível 0**, muito ligada à visualização, nível no qual as figuras são julgadas por sua aparência, como destaca Van Hiele (1984). Observamos que **Ca** reconheceu as figuras por suas características globais, ligadas à aparência. Por isso, ela se encontrava no nível **IIA** dos estudos piagetianos, em que há distinção progressiva das formas, com a representação ainda muito centrada no ponto de vista do sujeito.

Assim, os dados indicam que a maioria dos alunos oscilavam entre o **nível 0** e o **nível 1**, proposto pelos Van Hiele, ou seja, entre a **visualização** para o início dos processos de **análise** das formas. Olhando os dados na perspectiva piagetiana, a maioria se encontravam no nível **IIB**, que segundo Piaget e Inhelder (1993) há o início de classificação das formas, e diferenciam formas mais complexas, através de reações intermediárias, com tentativas de diferenciar os pontos de vista; enquanto no nível **IIIA**, passa a existir uma diferenciação operatória parcial dos pontos de vista, e ocorre o início das coordenações de conjunto, provenientes da lógica formal. Percebemos que, com exceção da **Ca**, algumas estruturas hipotético-dedutivas foram observadas inicialmente nos alunos, mas ainda faltam referências básicas das operações elementares efetivadas no reconhecimento de figuras.

Figura 3: Desenhos de polígonos utilizados no teste de reconhecimento de figuras



Fonte: Dados dos testes de lógica, elaborados pela autora.

Voltando nosso olhar para os polígonos, expressos na fig. 3, observamos que o triângulo simples é reconhecido e desenhado por todos, mas somente **Sh** tem noção dos diferentes tipos. Todos desenham um quadrilátero com formato de quadrado (com exceção de **Ca)**. O quadrado Q6 é a figura mais identificada entre os sujeitos. A figura Q1 é reconhecida como retângulo pela maioria dos alunos. Outra figura que se destaca é a Q11, reconhecida como pipa, no entanto observamos que não a reconhecem por identificar suas características, pois não a definem. Intuímos que esse conhecimento se dá pelos aspectos visuais, ou seja, a proximidade com o objeto "pipa", brinquedo que conhecem por esse nome. Piaget e Inhelder (1993) afirmam que as primeiras percepções, ainda no estádio I, decorrem primeiramente do reconhecimento dos objetos familiares, depois das formas topológicas e, por último, das euclidianas. Nossos dados indicam que, apesar dos níveis que distinguimos para cada sujeito, são as figuras mais simples que sobressaem no processo de identificação.

Consideramos interessante apresentar os dados organizados em tabela, mostrado na sequência, com a possibilidade de observarmos os níveis antes e depois da intervenção, comparando as teorias estudadas.

Tabela 1: Níveis encontrados antes e após a intervenção

	Nível para o casal Van Hiele		**Nível nos estudos piagetianos**	
	Antes da intervenção	Após a intervenção	Antes da intervenção	Após a intervenção
Al	Passagem do nível 0 para o nível 1	Nível 2	Nível IIB	Nível IIIB
An	Nível 1	Nível 2	Nível IIIA	Passagem IIIB para IV
Ca	Nível 0	Nível 1	Nível IIA	Passagem do IIB para IIIA
Sh	Nível 1	Nível 2	Nível IIIA	Nível IIIB
Wa	Passagem do nível 0 para o nível 1	Nível 2	Nível IIB	Nível IIIB

Fonte: Análise dos resultados efetivados pela autora.

O pós-teste de **Al**, **An, Wa e Sh** evidencia princípios de implicações e disjunções, pela possibilidade de reconhecerem e identificam os diferentes tipos de triângulos, assim como a identificação de uma figura pela observação de mais de uma característica. Mesmo depois do pós-testes tardio, os mesmos princípios são mantidos, ainda que com menos acertos no teste de reconhecimento das figuras. Os acertos e os demais registros coletados comprovam as propriedades reconhecidas, e os princípios de dedução informal estabelecidos. Assim, pelos princípios da lógica formal identificado nos diferentes registros, observamos que os alunos avançam para o **nível 2** de **dedução informal**, pois são capazes de discorrer sobre as características da forma. Esses alunos se aproximam do nível **IIIB**, pois passa a existir uma diferenciação operatória, em que se faz presente a realidade completa das perspectivas. O mesmo vale para o início da formulação das relações, e análise progressiva dos ângulos, que se completa nas coordenações de conjuntos, como destacam os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

O pós-teste tardio indica que, **Al**, **Sh**, **Wa** se fixam no nível **IIIB**, dentro do processo interventivo e mantêm os processos, ainda que apresentem menor quantidade de acertos referentes ao conteúdo. No caso de **An**, que apresenta os melhores resultados no pós-teste e no tardio, observamos que ela consegue apontar mais disjunções ou implicações, mas não à totalidade de uma classe, ou a indicação que compreende todas as: relações envolvidas no processo dedutivo, como se deve apresentar os sujeitos do nível **IV**, segundo os estudos de Piaget e Inhelder (1993). Assim, compreendemos que ela, no grupo, estaria mais próxima da mudança de nível, caminhando do **IIIB** para o **IV**, ainda que permaneçam nela mais características do nível **IIIB**.

Os resultados dos testes de **Ca** indicam que, no pós-teste, ela apresenta algumas disjunções e implicações, em quantidade bem inferior ao resto da turma, enquanto no pós-teste tardio, ela não revela implicações de classes, obtidas pela dedução das formas, apesar de apresentar propriedades disjuntas. Mesmo assim, compreendemos que **Ca** avança do nível da visualização (0) para o nível da análise (1). Podemos considerar também, que ela vai do nível **IIA** para o final do **IIB** e início do **IIIA**, pois ela mostra princípios de classificação, próximos de uma operatória formal, como distinguem os estudos de Piaget e Inhelder (1993).

Considerações finais

O ideal para adolescentes, na fase dos alunos desta pesquisa, seria que eles dominassem o pensamento em nível da dedução informal**,** quando os sujeitos são capazes de generalizar sobre as características que definem uma forma, e caminham para uma dedução formal.

Os dados que antecedem a intervenção indicam que os alunos apresentavam defasagem com relação ao reconhecimento de polígonos, pois ainda, estavam dependentes da visualização, diferenciavam formas e realizavam algumas classificações mais simples. Já os dados da intervenção e dos testes finais mostram avanços significativos dos alunos apresentando princípios de classificação, correspondentes a uma dedução, ainda que informal, mas, com início de formalização, por parte de alguns.

Assim, os dados revelam que a intervenção mediada por tecnologias digitais, possibilita avanços significativos nos processos de reconhecimento de figuras, alterando, em todos os adolescentes pesquisados, os níveis do pensamento geométrico, dentro das diferentes teorias estudadas, apontando coerência entre elas. No entanto, há uma correspondência entre os conhecimentos prévios e avanços, ou seja, quem inicia com maior potencial consegue avançar um pouco mais, e quem apresenta maior dificuldade, a princípio, apesar de avançar, alcança um nível mais baixo, em comparação com os demais alunos do grupo.

Referências Bibliográficas

BRAGA, E.; DORNELES, B. V. **Análise do desenvolvimento do pensamento geométrico no ensino fundamental.** In: Educação Matemática em Pesquisa, São Paulo, v.13, n.12, 2011, p. 273-289.

CONSEZA, R, M; GUERRA, L. B. **Neurociência e Educação: como o cérebro aprende.** Porto Alegre: Artmed, 2011.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à Lógica do Adolescente: Ensaios sobre a construção das estruturas operatórios formais.** Tradução Dante Moreira Leite. São Paulo: Pioneira, 1976.

KALEFF, A. M. **Tomando o ensino da geometria em nossas mãos.** In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: v. 1, n.2, p. 19-25, 1994.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria.** In: Educação Matemática em Revista. São Paulo: v. 3, n. 4, p. 3-13, 1995

NASSER, L, et al. **Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele.** Rio de Janeiro: UFRJ. Projeto Fundão, 2004.

PAVANELLO, R. **O abandono do ensino de Geometria no Brasil: causas e consequências.** In *Zetetiké*, nº 1, v. 1, 1993.

PCNs. Brasil. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares** Nacionais: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental (II). Brasília: MEC/ SEF, 1998.

PIAGET, J.; INHELDER, Bärbel. **A Representação do espaço na criança.** Trad. Bernardina Machado de Albuquerque. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

VAN HIELE, Dina. The didactics of geometry in the Lowest Class of secondary School. In: FUYS, David et al. **English translation of Selected Writing of Dina Van Hiele – Geodof and Pierre M. Van Hiele.** COPYRIGHT, 1984, p. 1-212

VAN HIELE, Pierre. Summary of Pierre Van Hiele´s dissertation entitled: The Problem of Insigth in Connection with School Children´s Insight into the Subject – Matter od Geometry. In: FUYS, David et al. **English translation of Selected Writing of Dina Van Hiele – Geodof and Pierre M. Van Hiele.** COPYRIGHT, 1984b, p. 237-252

WALLE, J. A. V. **Matemática no Ensino Fundamental: Formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009