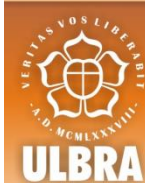


# VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil  
16, 17 e 18 de outubro de 2013

Conferência



## Estudo das apreensões e dos olhares em geometria<sup>1</sup>

Méricles Thadeu Moretti<sup>2</sup>

**Resumo:** Neste trabalho apresentamos uma leitura das apreensões em geometria. Estes elementos, construídos por Raymond Duval, ajudam a compreender a aprendizagem da geometria e também explicar certas dificuldades observadas na sua aprendizagem. A partir das apreensões, Duval classifica os olhares em geometria que vai do olhar icônico ao não icônico. A compreensão desses elementos, no ensino da geometria, permite que o professor avalie, de forma crítica, os exercícios e as atividades que desenvolve em sala de aula.

**Palavras-chave:** Apreensões em geometria. Olhar icônico. Olhar não icônico.

## INTRODUÇÃO

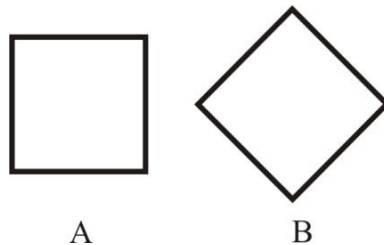
Duval (1995, 2005, 2012A, 2012B) trata, em diversos momentos dos seus artigos, da aprendizagem da geometria. Para compreendê-la, desenvolveu a ideia das apreensões e do desenvolvimento dos olhares. No mundo de hoje, cada vez mais da imagem nos meios semióticos, o “aprender a ver” torna-se cada vez mais importante não só para a disciplina de geometria, mas para grande parte das nossas atividades cotidianas. O olhar toma um papel importante para construir não somente uma geometria das formas, mas a caracterização do pensamento geométrico (TEIXEIRA, 2008). Uma questão importante na aprendizagem da geometria, em particular nas primeiras séries do ensino fundamental, é como fazer a passagem desse olhar, que reconhece e diferencia formas, para a identificação dessas formas.

É bem possível, por exemplo, que crianças em certa idade reconheçam no desenho a seguir da Figura 1A como sendo um quadrado.

**Figura 1:** quadrado em duas posições diferentes.

<sup>1</sup> Este texto é parte do artigo “Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria”.

<sup>2</sup> MTM/PPGECT/UFSC - mthmoretti@gmail.com - Apoio do CNPq.



**Fonte:** do autor.

No entanto, a mesma figura posicionada como mostra a Figura 1B pode não ser tão facilmente reconhecida como um quadrado: os meios social e escolar privilegiam as orientações horizontal e vertical. Para se convencer disto, basta abrir os manuais escolares e também observar as construções civis a nossa volta.

### **A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA**

A teoria de aprendizagem da matemática em Duval (1993, 1995, 1996, 2003A, 2003B, 2004, 2005, 2012A) tem por base os registros de representação semiótica. Para o caso da aprendizagem da geometria, este autor sugere vários tipos de apreensão na resolução de problemas: perceptiva, operatória, discursiva e sequencial. Esta última é requerida em atividades de construções geométricas.

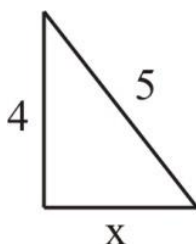
O que se desprende do trabalho desenvolvido por Duval é que não há uma hierarquia entre estas apreensões, mas uma subordinação de uma a outra dependendo do tipo de problema. Em geral, nas atividades propostas para o ensino fundamental, é a apreensão perceptiva que subordina as demais.

Sobre a **apreensão perceptiva e discursiva**, ele escreve:

Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se geralmente em conflito porque **a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado e que os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente**. O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses. (DUVAL, 2012B, p. 120, 121).

O exemplo, a seguir proposto em Mello (1999, p. 65) exemplifica uma relação entre as apreensões perceptiva e discursiva em um problema típico de geometria:

Calcule os valores possíveis de  $x$  na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.

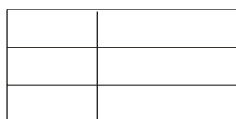


Os alunos são compelidos, pela apreensão perceptiva da figura, à aplicação do Teorema de Pitágoras: a visão marcante de um "triângulo retângulo" subordina o tipo de tratamento a ser empreendido. Dois fatores exercem esta forte influência: a posição do triângulo que sugere fortemente um ângulo reto em uma posição bastante privilegiada (com lados horizontais e verticais) e os valores  $x$ , 4 e 5 que lembram a tríade pitagórica 3, 4 e 5 conhecida de muitos alunos. A apreensão perceptiva sobrepuja a apreensão discursiva fazendo com que o que está expresso na formulação da questão "Calcule os valores possíveis de  $x$  na figura,..." seja deixado de lado pela maioria dos alunos.

A **apreensão operatória** diz respeito às possíveis modificações que uma figura pode permitir e as reorganizações perceptivas que estas mudanças operam.

A reconfiguração intermediária é uma importante modificação relacionada à apreensão operatória requerida no problema a seguir, além das outras apreensões. Na coordenação entre discurso e figura em geometria, o exemplo tratado por Balacheff<sup>3</sup> e citado também em Duval (1995, p. 190) ilustra bem a forte subordinação das apreensões operatória e discursiva à apreensão perceptiva. O problema é o seguinte proposto a um grupo de alunos:

**Quantos retângulos têm esta figura?**

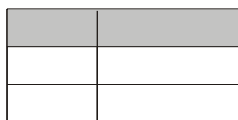


A lei gestáltica de fechamento associada à harmonia e regularidade (GOMES FILHO, 2004, p. 32 e 52) da figura impõe um retângulo maior subdividido em pequenos

---

<sup>3</sup> BALACHEFF, N. Preuve et démonstrations en mathématiques au collège. Recherches en Didactique des Mathématiques. v3.3, 1992.

retângulos, como se fossem ladrilhos, o que pode levar os alunos à resposta: a figura contém seis retângulos, não incluindo, por exemplo, o retângulo hachurado seguinte:



Este é um exemplo de passagem entre dois registros de representação (a frase “Quantos retângulos têm esta figura?” e a imagem da figura apresentada de um retângulo maior subdividido em pequenos retângulos) possui certo grau de dificuldade que depende do que Duval denomina de **congruência semântica**:

Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas conjuntamente) e não serem semanticamente congruentes: neste caso há um custo cognitivo importante para a compreensão. (2012A, p. 100).

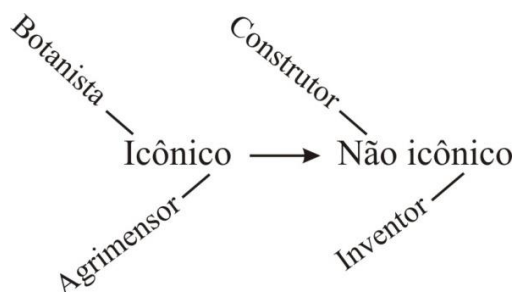
A congruência semântica procura estabelecer certo grau de transparência nas representações de objetos em matemática.

Os problemas em geometria tornam-se mais complexos, mesmo aqueles com aparência simples, pelo fato de existir até uma quádrupla apreensão na resolução desses problemas o que pode elevar ainda mais o grau de não congruência semântica. Dependendo do problema, a articulação, principalmente, entre dois ou mais tipos de apreensão pode ser requerida na sua resolução. Duval (1997) destaca quatro delas:

- (1) o que chamamos de **figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva;
- (2) o que chamamos de **visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória;
- (3) A **heurística** e **demonstração** é o resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva;
- (4) a **construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial que também requerem a apreensão perceptiva.

Por estas articulações descritas podemos perceber o destaque que tem a apreensão perceptiva na aprendizagem da geometria: as apreensões operatória, discursiva e sequencial subordinam-se, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva. Esta importância da apreensão perceptiva leva Duval (2005, p. 5 - 12) a caracterizar diversas maneiras de olhar as quais sintetizamos na figura 2 a seguir:

**Figura 2:** as quatro maneiras de olhar uma figura geométrica.



**Fonte:** esquema que construímos a partir de Duval (2005, p. 5 - 12).

Podemos perceber que o esquema da figura 2 possui uma orientação que vai do olhar do botânico a um olhar mais elaborado, o olhar do inventor; grande parte da aprendizagem em geometria é aprender a fazer os olhares deste percurso. O passo inicial é a aprendizagem do olhar icônico que é requerido principalmente em atividades das séries iniciais do ensino fundamental, mas não se deve perder de vista o olhar não icônico.

O **olhar botânico** é aquele que permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval, é um “olhar qualitativo”:

E trata-se, evidentemente, de observar diferenças entre duas formas que apresentam certas semelhanças (um quadrado e um retângulo) e de notar certas semelhanças entre formas diferentes (um quadrado e um paralelogramo). Aqui, as propriedades diferenciadas são características visuais de contornos. DUVAL (2005, p. 5).

As atividades que exigem este tipo de olhar possuem muito pouco do que poderia se chamar de atividade em geometria. Muitas vezes são confundidas como tal por tratarem de figuras geométricas euclidianas típicas e poderiam portar sobre qualquer outro tipo de forma de figura, como por exemplo, sobre formas diferentes de folhas de árvores. Não há nenhum tipo de propriedade, medida ou relação que precisa ser reconhecida em atividades que requerem este tipo de olhar, apenas observar semelhanças e diferenças sem, no entanto,

quantificá-las ou estabelecer relações métricas entre elas. Mas, as qualidades requeridas neste olhar preparam os alunos para os demais olhares.

O **olhar agrimensor** é aquele que faz medidas no terreno e consegue passar essas medidas para o plano do papel. As atividades que exigem este tipo de olhar são aquelas que passam de uma escala de grandeza a outra: “neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são as mobilizadas para fins de medida”, como por exemplo, o procedimento utilizado por Erastóstenes para medir o raio da terra (DUVAL, 2005, p. 6).

O **olhar do construtor** se forma no uso de instrumentos, régua não graduada e o compasso, verdadeiramente o aluno pode tomar consciência que uma propriedade geométrica não é apenas uma característica perceptiva (DUVAL, 2005, p. 6). Atualmente, alguns programas computacionais, como por exemplo, o *GeoGebra* e o *Cabri géomètre* podem substituir o uso desses instrumentos.

O **inventor** é aquele que, para resolver um problema, adiciona traços na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento de resolução. Um exemplo de uma atividade para o inventor é: Como dividir um triângulo em duas partes para que essas partes possam ser acopladas para formar um paralelogramo. (DUVAL, 2005, p. 6).

Esses olhares caminham de um lado a outro lado conforme as apreensões em geometria são exigidas. No olhar do botanista, essencialmente é a apreensão perceptiva que é exigida. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do inventor. Os olhares, as apreensões em geometria vão de encontro com os vários *Conteúdos Conceituais e Procedimentos para o Espaço e Forma* descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino fundamental das séries iniciais (BRASIL, 1997, p. 70 - 77):

- Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.
- Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.
- Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.
- Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.
- Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.
- Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.
- Estabelecimento e comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos - esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos - sem o uso obrigatório de nomenclatura.
- Percepção de semelhanças e diferenças entre

cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos. ▪ Construção e representação de formas geométricas.

O que podemos perceber, neste documento, é a importância que é dada a geometria já no início da escolaridade. A geometria torna possível a ligação do mundo da criança com os interesses reais, constitui-se um meio que permite que ela faça conexões com o mundo que a rodeia e com outras áreas do conhecimento. A geometria pode se tornar um tema unificador na aprendizagem matemática, uma vez que fornece formas de representação com forte apelo visual para vários tópicos da matemática (PONTE e SERRAZINA, 2000).

As Normas (NCTM, 2008, p. 44) para a geometria estabelecem desde o pré-escolar até 12º ano de escolaridade o uso da visualização, entre outras capacidades, na resolução de problemas. As atividades de visualização podem constituir-se em um prolongamento do ambiente natural da criança na escola e com isso contribuir para uma socialização mais tranquila.

As Normas, em número de quatro, para os doze primeiros anos de escolaridades na geometria são as mesmas o que muda, nos anos crescentes de escolaridade, são as expectativas. Elas são as seguintes (NCTM, 2008, p. 112):

- Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos a cerca de relações geométricas;
- Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e outros sistemas de representação;
- Aplicar transformações geométricas e usar simetrias para analisar situações matemáticas;
- Usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelação geométrica para resolver problemas.

Em todas essas atividades, que ganham complexidade no decorrer dos anos escolares, a visualização é bastante requerida. Ela pode se tornar uma fortíssima aliada ou até mesmo impedir o desenvolvimento do chamado pensamento geométrico. O desenvolvimento preconizado neste documento Isto vai de encontro com a ideia de Duval no desenvolvimento dos olhares em geometria.

## **CONCLUSÕES**

As apreensões em geometria apresentam um outro modo de ver o ensino da geometria. Problemas que parecem ser semelhantes podem diferenciar-se significativamente por conta dos tipos de apreensão requeridos e pelo fenômeno da congruência semântica. Não há uma hierarquia no desenvolvimento das apreensões, mas uma complexização que depende

em muito da congruência semântica que pode ser o “tempero” das atividades em matemática. Mas, o desenvolvimento dos olhares aponta sim, de certa forma, uma direção no ensino e na aprendizagem da geometria em sala de aula, que vai do olhar icônico ao não icônico.

## **BIBLIOGRAFIA**

- BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEE, 1997.
- DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012A. (Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>)
- DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012B. (Disponível em <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>)
- DUVAL, R. Les problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Trad. Myrian V. Restrepo. Santiago de Cali: Merlín I. D., 2004.
- DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In MACHADO, Silvia D. A. de (org). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papyrus, 2003A.
- DUVAL, R. Décrire, visualiser ou raisonner: quels “apprentissages premiers” de l’activité mathématique? Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. n.8, 2003B.
- DUVAL, R. La notion de registre de représentation sémiotique et l’analyse du fonctionnement cognitif de la pensée. Curso dado à PUC/SP, 1997.
- DUVAL, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? RDM, v. 16, n. 3, p. 349-382. 1996
- DUVAL, R. Sémiotique et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang. 1995.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique e fonctionnement cognitif da la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, v. 5, 1993.
- GOMES FILHO, João. Gestalt do objeto: sistema de leitura visual. São Paulo: Escrituras, 2004.
- NCTM. Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Tradução: Madga Melo. 2. ed. Lisboa: Associação Portuguesa de Matemática, 2008.
- PONTE, J. P. e SERRAZINA, L. Didáctica da Matemática do 1º Ciclo. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.
- TEIXEIRA, Marta S. M. O pensamento geométrico no 1º ano de escolaridade. Dissertação de mestrado. Universidade de Lisboa, 2008.