VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática
ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil
16, 17 e 18 de outubro de 2013
Conferência

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO:NOVOS DESAFIOS E NOVAS POSSIBILIDADES

Evolução do conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo de professores de matemática: a contribuição do *e*mat*†

Arthur B. Powell[1]

Novos desafios

As tecnologias de informação e comunicação, como a mídia social, evoluem rápido e estão cada vez mais envolvidas na vida privada e pública. Essas realidades para a Educação Matemática implicam dois desafios fundamentais. O primeiro é que os avanços das tecnologias digitais e suas inserções na sociedade requerem que pesquisadores e educadores investiguem, significativamente, os potenciais dessas novas tecnologias para a educação. Há pesquisas que investigam o uso de fóruns e outros recursos digitais assíncronos (Bairral, 2007; Cheong & Cheung, 2008 Li, Dong, & Huang, 2009; Serradó,2009; 2012). No entanto, em Educação Matemática há um número reduzido de pesquisas que abordam uma das potencialidades fundamentais da Web 2.0, que é a colaboração (Bairral & Powell, 2013; Powell & Grisi-Dicker, 2012; Powell & Li, 2009).

Em particular, são necessárias investigações sobre como professores de matemática de escolas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio podem usar atributos da Web 2.0 para explorar problemas abertos e vivenciar esse processo numa perspectiva colaborativa, usando aplicativos da matemática dinâmica.

O segundo desafio acompanha a velocidade rápida dos avanços das tecnologias informação e comunicação, aumenta a necessidade de colaboração para encontrar soluções relativas ao *design* de projetos e desenvolvimento de novos produtos, mídias e serviços para melhorar a vida do planeta e seus habitantes. No entanto, nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, em particular, os modelos tradicionais de ensino ainda dominam o cenário de educação matemática (Jacobs et al., 2006; Stigler &

[1] Department of Urban Education. Rutgers University-Newark, EUA.
* Este trabalho é baseado em uma pesquisa apoiada pela National Science Foundation (NSF), do programaDRK-12, sob a bolsa DRL-1118888. As conclusões e opiniões relatadas aqui são de responsabilidade doautor e não refletem necessariamente a opinião da NSF.
† Agradecemos o Vinícius Pazuch, doutorando da Ulbra no Estágio de Doutorado Sanduíche no Exterior na nossa universidade, pela revisão do português.

Hiebert, 1999). Embora, há três aspectos relativos à produção de conhecimentos que o mundo atual privilegia: (1) a interação interpessoal e social, (2) a resolução de problemas e (3) a comunicação.

Esses dois desafios já estão sendo conquistados na comunidade de matemáticos. Mesmos os ganhadores da Medalha Fields pensam com outros matemáticos, publicam trabalhos junto com outros matemáticos e valorizam o trabalho colaborativo. O ganhador da Medalha Fields em 2006, Terence Chi-Shen Tao, numa discussão no blog de um ganhador da Medalha Fields em 1998, Timothy Gowers, escreveu o seguinte: Eu não posso falar pelos outros, mas em minha própria pesquisa, pelo menos metade das minhas publicações está em conjunto com um ou mais autores, e entre as publicações que eu considero entre os meus melhores trabalhos, praticamente, são todos trabalhos conjuntos. (Alagie & Alagie, 2013, p. 28, minha tradução).

Alguns dos grandes avanços da matemática hoje em dia são resultados de colaboração. Na Educação Matemática, o trabalho colaborativo deve ser privilegiado. Considerando esses dois desafios—a tecnologia e a colaboração—para a Educação Matemática, emergem várias questões interessantes. Entre elas, elaboramos duas: Como incorporar tecnologias computacionais para o ensino e a aprendizagem, para ajudar os estudantes envolverem suas práticas discursivas, colaborativas e matemáticas? Como professores de matemática podem envolver suas capacidades de ensinar com tecnologia para contribuir com o envolvimento de práticas discursivas, colaborativas e matemáticas de seus estudantes? Essas questões norteiam um projeto de investigação que apresentamos.

Novas possibilidades

O projeto, *e*Mat nos EUA é financiado pela National Science Foundation (NSF) e coordenado pelo autor. É uma investigação cuja intenção é auxiliar a aprendizagem de professores de matemática e como engajar seus estudantes para aprender matemática colaborativamente e discursivamente com tecnologias computacionais. No projeto, trabalhamos com professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio que posteriormente podem implementar o projeto com seus estudantes. Antes de detalhar o projeto, o ambiente, e apresentar alguns dados, discutimos algumas ideias teóricas que fundamentam nossa investigação.

Quadro teórico

Uma das ideias teóricas que usamos em nossa investigação é a noção que para incorporar ferramentas computacionais no ensino da Matemática é necessário engajar três tipos de conhecimentos: tecnológico, pedagógico e do conteúdo. Assim, aprofundando as ideias teóricas de Schulman (1986, 1987) sobre conhecimentos pedagógico e do conteúdo e na elaboração dessas ideias para o ensino da Matemática da Ball e suas colegas (1990, 1996), Mirsha e Koehler (2006) avançam com um modelo teórico para o uso pedagógico das tecnologias digitais. Este modelo envolve uma complexa e situada forma de conhecimento denominada: conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo (CTPC). Este conhecimento existe na interseção do conhecimento tecnológico, do pedagógico e do conteúdo matemático. Dentro deste modelo, podemos focar também nos três componentes: conhecimento tecnológico e pedagógico (CTP), conhecimento tecnológico e do conteúdo matemático (CTC) e conhecimento pedagógico e do conteúdo matemático (CPC).

No conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo matemático, consideramos o que é pensar matematicamente para compreender as ações que queremos observar e promover. Gattegno[2] (1987) propõe uma definição psicológica sobre o que é fazer a Matemática baseada em processos mentais. Esta apresenta dois componentes: o diálogo e a percepção.

> Ninguém duvida que a Matemática se sustenta por si mesma e é o mais claro dos diálogos da mente consigo mesma. A Matemática é criada por matemáticos conversando primeiro consigo mesmo e entre si. […] Baseado na percepção de que relações podem ser percebidas facilmente como objetos, a dinâmica que liga os diferentes tipos de relações foi extraída da mente de matemáticos e considerada por si mesma. (Gattegno 1987, p. 13-14, tradução minha).

O diálogo é algo que um indivíduo faz consigo mesmo e com os outros. Tem conteúdo composto de percepções de três possíveis elementos específicos: objetos, relações entre os objetos e dinâmicas que ligam as relações. Neste ponto, Sfard (2000, p. 47, tradução minha, grifo no original) teoriza que "discurso matemático e seus objetos são *mutuamente constitutivos*". Podemos entender que essa dupla ação reflexiva—mutuamente constitutivos—inclui as relações entre os objetos e as dinâmicas que ligam as relações. A mente tem a facilidade natural para perceber ou tomar consciência de objetos e relações que encontra e também de relações que ligam relações. O estudo desse jogo de relações é o que distingue o trabalho de matemáticos.

Para que o diálogo sobre esses elementos faça sentido à aprendizagem, é importante que não seja efêmero, tenha uma permanência como um registro gráfico e seja responsável e comprometido. É também essencial que seja uma atividade espontânea, mas deliberada e sujeita a ser repensada, relida e revisada. Esses atributos do diálogo são necessários para que ele seja uma fonte para a aprendizagem e a reflexão profunda. Esses são os atributos da escrita e da leitura. Essa maneira de ver a Matemática nos ajuda a entender quais ações dos aprendizes correspondem ao fazer Matemática e o que temos que observar para perceber eles fazendo matemática. As observações sobre as relações são aprofundadas com o uso da escrita, um veículo que pode resultar de uma produção colaborativa num cenário presencial ou virtual e tem implicações na aprendizagem da Matemática e no processo de ensino e de aprendizagem em geral (Powell & Bairral, 2006).

No geral, a concepção e estrutura das atividades propostas incluíam ideias teóricas sobre a aprendizagem e o ensino da Matemática (Gattegno, 1987), sobre características de atividades (Ponte, 2003), sobre a cognição colaborativa (Stahl, 2009), sobre as representações e pensamento matemático (Powell & Frank, 2009) e sobre a validação na geometria dinâmica (Stylianides & Stylianides, 2005).

O ambiente VMTcG

Apresentamos um ambiente virtual, com dois exemplos de professores envolvidos em atividades matemáticas. Destacamos seu engajamento e sua interação com os objetos, as relações entre eles e as dinâmicas ligando as diferentes relações que encontram. Os exemplos foram desenvolvidos *online*, com pequenos grupos de professores que interagiram através de um ambiente colaborativo, conhecido como Virtual Math Teams with GeoGebra—VMT ou VMTwG—(Equipes Virtuais de Matemática com o GeoGebra, VMTcG), que incorpora uma versão do GeoGebra multiusuário e síncrona. O propósito de VMTcG tem como o foco no avanço das práticas matemáticas e discursivas através da resolução, de forma colaborativa, de problemas matemáticos. De acordo com a visão de D'Ambrosio (2009, p. 10), os alunos interagem no ambiente e negociam "os significados conceituais com seus colegas,

[2] Encontra-se em Powell (2007) informações biográficas sobre Gattegno.

buscando criar novas estratégias de soluções”. Em particular, eles investigam objetos e relações matemáticas, por meio de observações, e se perguntam sobre as relações invariantes, a fim de levantar e justificar conjecturas sobre elas.

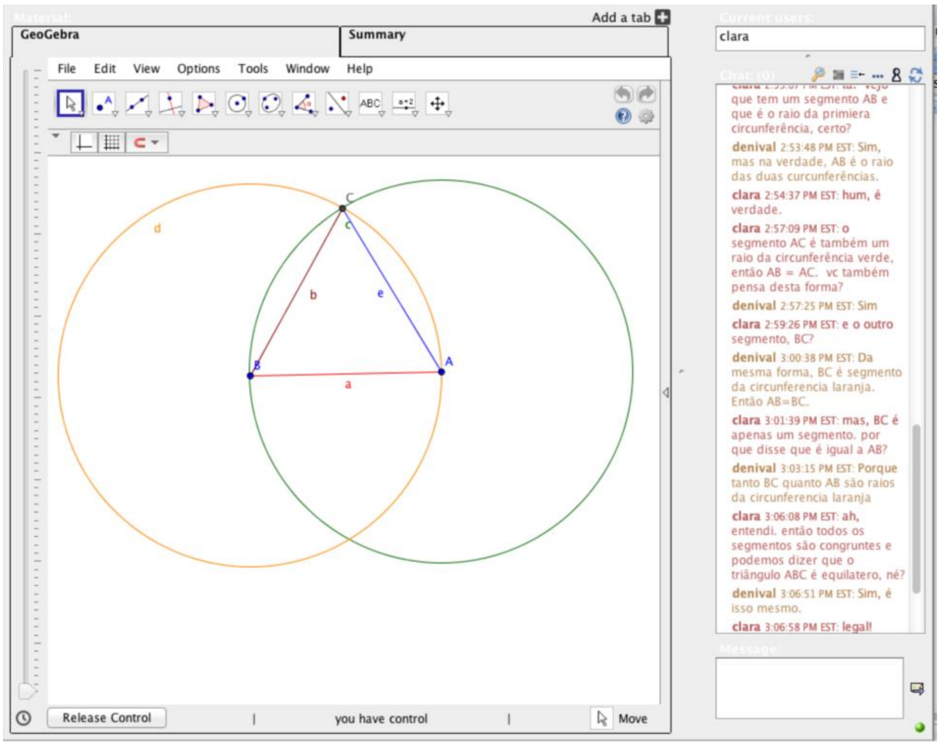

Figura 1: O ambiente VMTcG

Este ambiente virtual, desenvolvido pelo Stahl e seus colaboradores (Stahl, 2009),VMT[3] tem acesso livre ao público e é fruto de um projeto financiado pela National Science Foundation nos EUA. Quando acessamos uma sala de *chat*, encontramos um ciberespaço como está apresentado na Figura 1. No lado esquerdo, há uma aba que dá acesso a uma janela do GeoGebra e outra aba para acessar uma lousa branca onde se pode digitar uma caixa de texto, desenhar, ou colar conteúdo de um outro aplicativo. No caso da Figura 1, abaixo das abas temos as várias ferramentas do aplicativo GeoGebra. No lado direito da janela do VMT, podemos ver as mensagens do *chat*. Acima, há um retângulo com o nome das pessoas na sala; e, no outro retângulo, abaixo da janela de *chat*, compõe-se a mensagem de *chat* antes de enviá-la.

Exemplo 1: Construindo circunferências e segmentos

O primeiro exemplo refere-se também à Figura 1. Um dos dois professores segue as instruções para construir uma figura na janela GeoGebra, e a outra aluna lhe pergunta sobre o que fez: “Tudo bem? o que fez aqui?” Ele explica: “Primeiro, eu usei a ferramenta Circle with Center through a Point (Círculo dados centro e um de seus pontos) para traçar uma circunferência com centro A.… com a mesma ferramenta, tracei a circunferência com centro em B, passando pelo ponto A”. Pela conversa entre eles, a aluna percebe a seguinte relação entre objetos: “o segmento AC é também um raio da circunferência verde, então AB = AC. vc também pensa desta forma?”. Ele responde: “Da mesma forma, BC é segmento da circunferência laranja. Então AB=BC.” A seguir, ela faz esta conclusão: “ah, entendi. então todos os segmentos são congruentes e

[3] Disponível em: <www.mathforum.org/VMTLobby>.

podemos dizer que o triângulo ABC é equilátero, né?” A discussão escrita sobre objetos e relações levou os professores a conjeturar e justificar que, dentro da figura, existe um triângulo equilátero.

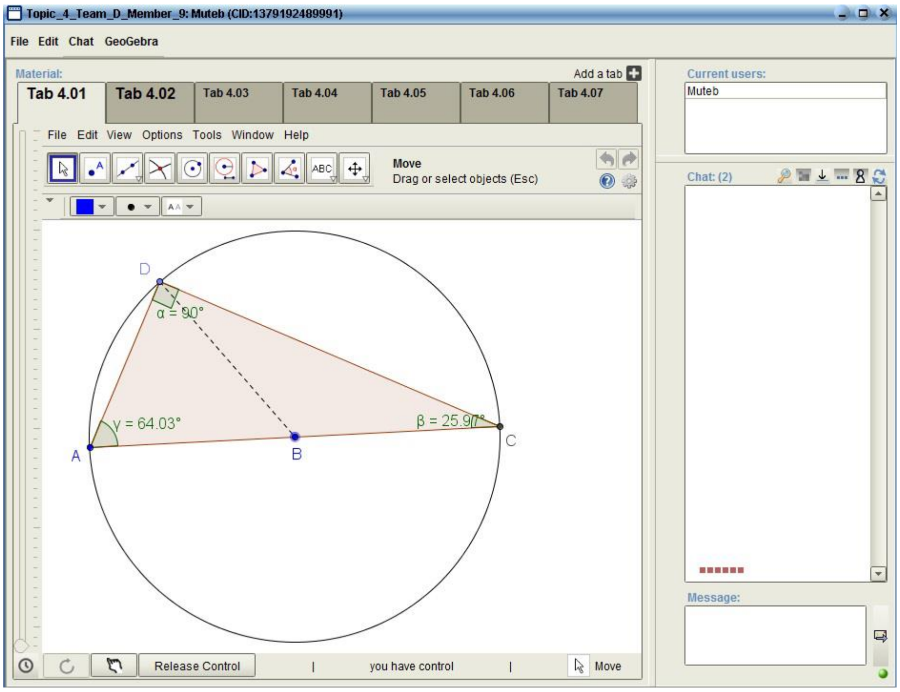

Figura 2: Um triângulo retângulo com base no diâmetro de uma circunferência.

Exemplo 2: Construindo colaborativamente uma demonstração do Teorema de Thales

O segundo exemplo provem de uma disciplina ministrada para professores de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio. A disciplina é totalmente a distância no VMTcG. O currículo da disciplina tem com base a teoria CTPC de Mirsha e Koehler (2006) e pedagogicamente é influenciado pelas ideias psicológicas do Gattegno (1987) sobre o que é fazer a Matemática. As atividades que os professores são convidados para engajar são, segundo a classificação de atividades de Ponte (2003), explorações e investigações.

Neste exemplo, três professores compõem um time e discutem o teorema de Thales, nomeadamente que o diâmetro de uma circunferência sempre subtende um ângulo reto a

qualquer ponto na circunferência (veja Figura 2). Referindo ao esse teorema, uma das atividades da disciplina desafia-os para “tentar construir uma demonstração deste teorema”. Os três membros desta equipe são Balia, Balvir e Ira e eles decidem demonstrar o teorema de Thales. Um membro da equipe constrói uma figura para depois falar de sua demonstração do teorema de Thales. Enquanto ele constrói a figura, outro membro sugere objetos a serem construídos. Balvir afirma relações que ele observa entre os objetos: AB = BC = BD e a soma dos ângulos do triângulo ACD = 180°. Ira e Balia concordam com ele. Ira assume o controle para criar medidas de ângulo e não consegue encontrar o comando para fazê-las e dá o controle para Balia, que encontra o comando.

Ira solicita a Balia para indicar as medidas dos ângulos internos do triângulo ACD. Ira diz que Balia precisa clicar no sentido horário para obter as medidas dos ângulos internos. Assim que o ângulo ADC é marcado, Ira arrasta ponto D e percebe a invariância da medida do ângulo, de 90°. Balia afirma que a observação de Ira mostra a “realidade”, mas não é suficiente como uma demonstração. Ela diz que tem uma ideia de uma demonstração com base em observações anteriores de Balvir, mas não pode continuar. Balvir retoma afirmando novas relações: como AB = BD, o triângulo ABD é isósceles e, como BC = BD, o triângulo BCD é isósceles. Ira percebe o mesmo e conclui que o ângulo CBD é de 90°. Balvir adverte Ira e diz que o ângulo CBD não é sempre 90°. Balia solicita e assume o controle, renomeia os ângulos com os números 1, 2, 3 e 4. Estes são os ângulos da base dos dois triângulos isósceles na Figura 2. Balia argumenta que 1 +2 +3 +4 = 180° e que, como 1 = 2 e 3 = 4, 2 +2 +3 +3 = 180° ou 2 (2 +3) = 180° ou 2 +3 = 180°, que Ira corrige como 2 +3 = 90°. Todos parecem satisfeitos.

Discussão

Através dos dois exemplos, queremos destacar como é que o conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo de professores de matemática evoluíam. O VMTcG fornece oportunidades para que pequenos times de participantes discutam e trabalhem colaborativamente, usando um software de matemática dinâmica. A intenção é que os participantes investiguem objetos e relações matemáticas, por meio de observações e arrastem, e se perguntem sobre as relações invariantes, a fim de levantar e justificar conjecturas sobre as mesmas. Os participantes usam o VMT e o GeoGebra para explorar problemas abertos e vivenciar esse processo numa perspectiva colaborativa. No primeiro exemplo, a discussão escrita sobre objetos e relações levou os professores a conjeturar e justificar que, dentro da figura, existe um triângulo equilátero.

Discursivamente, os dois professores conseguiram demonstrar um dos primeiros teoremas da Euclides. No segundo exemplo, os professores fazem conjuntamente uma demonstração do teorema de Thales. Quando começaram, nenhum deles conseguiu demonstrar individualmente. Por outro lado, a sua cognição no time levou-os a construir a demonstração discursivamente. O trabalho deles é um exemplo de *group cognition* (Stahl, 2006) e de *socially emergent cognition* (Powell, 2007). Também, esses dados evidenciam uma norma sociomatemática (Yackel & Cobb, 1996) que os professores têm quando um deles afirmou que as medidas mostram a "realidade", porém não é suficiente para uma demonstração.

O trabalho colaborativo para resolver problemas explorativos e investigativos em que os professores evidenciam normas sociomatemáticas é uma forma de reconhecer o conhecimento pedagógico e do conteúdo. Quando eles fazem conjuntamente uma demonstração de um teorema evidencia a evolução do seu conhecimento do conteúdo, o que podem refletir para incorporar no seu ensino.

Referências

Alagie, G. & Alagie, M. (2013). Collaborative mathematics learning in online environments. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning*, New York: Springer, pp. 23-48.

Bairral, M. A. (2007). *Discurso, Interação e Aprendizagem Matemática em Ambientes Virtuais a Distância*. Seropédica: UFRRJ.

Ball, D. (1996). Teacher learning and mathematics reforms: What we think we know and what we need to learn. *Phi Delta Kappan*, *77* (7), 500–508.

Ball, D. L., & McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 437–449). New York: Macmillan.

Cheong, C. M., & Cheung, W. S. (2008). Online discussion and critical thinking skills: A case study in a Singapore Secondary School. *Australasian Journal of Educational Technology* , *24* (5), 556-573.

D'Ambrosio, B. (2009). "Prefácio", *in*: Lopes, C. E. e Nacarato, A. M. (eds.). *Educação*

matemática, leitura e escrita. Campinas, SP: Mercado de Letras, pp.9-17.
Gattegno, C. (1987). *The science of education: Part 1: Theoretical considerations*. New York: Educational Solutions.
Jacobs, J., Hiebert, J., Givvin, K., Hollingsworth, H., Garnier, H., & Wearne, D. (2006). Does eighth-grade mathematics teaching in the United States align with the NCTM Standards? Results from the TIMSS 1995 and 1999 video studies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36, 5-32.
Li, Y., Dong, M., & Huang, R. (2009). Toward a Semantic Forum for Active Collaboration Learning. *Educational Technology & Society*, *12* (4), 71-86.
Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108* (6), 1017–1054.
Ponte, J. P. Investigar, ensinar e aprender. *Actas do ProfMat (CD, p.25-39).* Lisboa APM, 2003.
Powell, A. B. (2006). Socially emergent cognition: Particular outcome of student-tostudent discursive interaction during mathematical problem solving. *Horizontes*, *24* (1), 33-42.
Powell, A. B. (2007). “Caleb Gattegno (1911-1988): a famous mathematics educator from Africa?”. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Especial nº 1, pp. 199-209.
Powell, A. B. e Bairral, M. A. (2006). *A escrita e o pensamento matemático: interações e potencialidades*. Campinas, SP: Papirus.
Powell, Arthur B., & Grisi-Dicker, Loretta. (2012). *Toward collaborative, discourse-focusedlearning with dynamic geometry environments.* Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.
Serradó, A. (2009). E-forum, a strategy for developing key competences of communication in, with and about mathematics. En L. Gómez Chova, D. Martí Belenguer, & I. Candel Torres (Ed.), *Proceedings of the International Conference and New Learning Technologies (EDULEARN)* (págs. 1-12). Barcelona: International Association for Technology, Education and Development (IATED).
Serradó, A. (2012). How to question in an on-line forum to promote a democratic mathematical knowledge construction? *International Journal for Mathematics in Education* (Special Issue), 369-374.
Sfard, A. (2000). “Symbolizing mathematical reality into being—Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other”, *in*: COBB, P. *et al.* (eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, andinstructional design*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp.37-98.
Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15* (2), 4–14.
Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.
Stahl, G. (2006) *Group cognition: Computer support for building collaborative knowledge.* Cambridge: MIT.
Stahl, Gerry. (Ed.). (2009). *Studying Virtual Math Teams.* New York: Springer.
Stigler, J., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world’s teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.