DESENVOLVENDO O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO COM BLOCOS LÓGICOS NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Paulo Jorge Magalhães Teixeira[1]

Temática do Artigo

Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

Resumo: Este trabalho apresenta reflexões do autor acerca do desenvolvimento de uma experiência realizada com quatro crianças, todas com 10 anos completos, estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de um colégio federal localizado na área urbana de uma grande cidade durante a qual foram propostas situações-problema cujo objetivo foi o de construir, classificar, identificar e contar os elementos de diferentes coleções de objetos selecionados do material concreto "Blocos Lógicos". Utilizaram-se árvores de possibilidades para o desenvolvimento de noções básicas relacionadas com o raciocínio combinatório de maneira a favorecer a apropriação de procedimentos e conceitos para um dos significados da multiplicação, que é a ideia combinatória. Em relação à fundamentação teórica valemo-nos de resultados de pesquisas de Guy Brousseau (1986) para propor situações didáticas, e para analisar a introdução de conceitos, sob a luz da Teoria dos Campos Conceituais na perspectiva de Gérard Vergnaud (1991), com a exploração de árvores de possibilidades como uma representação gráfica que dá conta de resolver problemas de contagem.

Palavras Chaves: Problemas de Contagem. Raciocínio Combinatório. Teoria dos Campos Conceituais. Ensino Fundamental. Blocos Lógicos.

1. INTRODUÇÃO

Fischbein e Gazit (1988) estudaram o efeito da instrução sobre a capacidade de trabalhar com problemas de combinatória descobrindo que inclusive crianças de 10 anos podem aprender algumas ideias combinatórias com a ajuda do diagrama de árvore (NAVARRO-PELAYO et al ,1996, p.2).

Desde a 3ª Série/4º Ano do Ensino Fundamental, resultados de pesquisas indicam para a importância de desenvolver atividades de contagem explorando representações gráficas (particularmente árvores de possibilidades) em situações didáticas que permitem introduzir ideias que envolvem a apropriação e o desenvolvimento do raciocínio combinatório, como está prescrito também nos PCN (1997).

[1] Doutor em Educação Matemática. IME-UFF. pjuff@yahoo.com.br

O entendimento das etapas de construção de representações gráficas como árvore de possibilidades, esquema, produto cartesiano, tabela de dupla entrada ou enumeração de conjuntos disjuntos de agrupamentos constituem-se em alternativas atraentes para a obtenção da solução de problemas de contagem por meio dessas representações, prorrogando-se o desenvolvimento de situações por meio da exploração dos aspectos formal e algorítmico para o Ensino Médio.

Um ponto que mereceu nossa preocupação e investigação quanto à oferta de atividades relacionadas com o uso de árvores de possibilidades é decorrente do estudo acerca de resultados de uma pesquisa que fizemos com jovens dos anos finais do Ensino Fundamental onde identificamos que os alunos faziam pouco uso de uma árvore de possibilidades quando resolviam problemas de contagem e, quando optavam pelo seu uso, tinham dificuldades para construí-la, principalmente nas situações de árvores "não-simétricas".

Pesquisas anteriores, como a de Roa (1996), já haviam identificado essa problemática:

> Apesar da importância que Fischbein (1975) concede à árvore de possibilidades como recurso produtivo na resolução de problemas probabilísticos e combinatórios, os alunos tem evitado seu uso e, quando o utilizam é com escasso êxito. Cremos que o uso deste recurso deve ser reforçado no ensino, pois Fischbein (1987) o apresenta como modelo figurativo que permite sugerir a generalização iterativa (extensão de certo procedimento em qualquer número de elementos e a generalização construtiva - adaptação a novos problemas derivados, que é característica do raciocínio recursivo) (ROA et al, 1996) (tradução nossa).

2. SUJEITOS DA EXPERIÊNCIA, METODOLOGIA E OBJETIVOS

Este trabalho é um recorte que relata experiência realizada com grupo de quatro alunos do 5º Ano, a professora dos alunos e uma professora observadora (convidados pelo autor), em dois encontros de duas horas-aula cada, duração total aproximada de 200 minutos, em um Colégio Federal, em horário diferente das aulas.

As professoras, juntas, fizeram reflexões e discussões enquanto resolviam problemas de contagem, utilizando-se, todos, do material pedagógico "Blocos Lógicos".

Formaram-se dois grupos de alunos e um de professores, com dois componentes cada. O autor deste trabalho atuou como mediador para fomentar reflexões e discussões nos grupos dos alunos e posterior discussões com o grupo todo, deixando para outro momento reflexões com as professoras.

Os alunos vivenciaram procedimentos metodológicos que contribuem para a apropriação e o desenvolvimento do raciocínio combinatório enquanto construíam árvores de possibilidades e obtinham a contagem direta dos agrupamentos de peças presentes nas "folhas terminais" da árvore após a enumeração por grupos.

Os Blocos Lógicos foram utilizadas como parte integrante dos enunciados de problemas de contagem que objetivavam a construção de diferentes árvores de possibilidades que atendessem à construção, classificação, identificação e contagem de elementos pertencentes a diferentes coleções de objetos com características tais que fossem formados conjuntos disjuntos de peças.

Por outro lado, uma vez que uma árvore de possibilidades tenha sido desenhada, o objetivo era de que os alunos procedessem à separação, identificação e contagem das peças - parte ou todas - dos blocos lógicos, que pudessem estar representadas nos "galhos" e nas "folhas terminais" da árvore.

Com a proposição de atividades desses dois tipos, têm-se como propósito o de conhecer as potencialidades para o entendimento, desenvolvimento e apropriação do raciocínio combinatório, enquanto associam as "divisões e subdivisões dos galhos e o quantitativo das folhas da árvore" à expressões e operações, aditivas e/ou multiplicativas, que dão conta da contagem total das peças envolvidas na resolução do problema.

Também se objetivou identificar até que ponto o conhecimento dos procedimentos para a construção de árvores e a contagem dos quantitativos dos elementos constituem-se em uma ferramenta combinatória alternativa para a obtenção da solução de problemas de contagem, contemplando noções básicas de combinatória associadas a um dos significados da multiplicação.

Durante a construção de uma árvore de possibilidades, as ações - a cada "nó" da árvore - de determinar quais são as tomadas de decisões e o quantitativo destas, favorecem o entendimento acerca da aplicação do Princípio Multiplicativo, tomando por base relações entre os objetos envolvidos do tipo "um-para-muitos", na perspectiva de Nunes e Bryant (1997).

Conhecendo e se familiarizando com a construção e as potencialidades de uma árvore de possibilidades - que torna possível determinar diretamente todos os casos possíveis que satisfazem à solução de um dado problema de contagem – e manuseando material concreto já conhecido por ele desde os anos iniciais, o aluno conta com situações que favorecem o desenvolvimento do seu raciocínio combinatório, desde então.

Depois que o aluno aprende a construir árvores de possibilidades, o professor pode propor que ele utilize uma ou mais expressões aritméticas e/ou multiplicativas que contabilizam o mesmo valor da contagem que foi feita diretamente das "folhas terminais" da árvore.

Essa alternativa de contagem, obtida por meio de cálculos aditivos, ou equivalentemente por meio de um cálculo multiplicativo, relaciona-se diretamente com a aplicação do princípio multiplicativo.

Em algumas situações-problema, ao pedir que os alunos construíssem árvores de possibilidades representativas da partição de todas ou parte das peças dos blocos lógicos, identificou-se que eles determinam a contagem dos casos possíveis a partir do quantitativo de peças representadas nas "folhas terminais" da árvore. A partir daí, pedíamos então que eles contassem e identificassem os elementos representativos dos "galhos".

Nas "folhas" da árvore estão identificados os elementos constitutivos do conjunto finito solução, obtidos segundo padrões de construção, ordenação e de sistematização próprios de cada aluno enquanto a árvore foi sendo construída à sua maneira.

Independentemente da maneira como cada aluno constrói sua árvore, as ações que o permitem determinar o quantitativo de "galhos" que se originam de cada "nó" e a identificação de cada um desses "galhos" é igualmente representado em cada um dos fatores presentes na operação multiplicativa oriunda de quando se aplica o Princípio Multiplicativo à situação proposta.

Por conta disso, quando julgar conveniente se desprender da necessidade de construir uma árvore e efetuar a contagem direta dos conjuntos disjuntos que compõem as "folhas" terminais da árvore, e vir a aplicar o princípio multiplicativo diretamente, o aluno está em condições de decidir quanto às representações gráfica e numérica (operação combinatória), com a qual se sentirá mais confortável para resolver problemas de contagem.

O professor deve estar atento aos ajustes entre as estruturas cognitivas da criança, prorrogando ao máximo a exploração das representações gráficas como instrumento didático importante que favorece o aluno quanto à apropriação de procedimentos e estratégias utilizados para a resolução de problemas de contagem.

Igualmente, no que se refere à valorização das soluções intuitivas que os alunos apresentem durante os momentos de resolução de problemas de contagem.

Consideramos oportuno sugerir que o professor deixe a cargo do aluno encontrar o momento adequado para, se for o caso, vir a desprender-se do uso de alguma representação gráfica para a solução de problemas de contagem e passe a se utilizar de representações numéricas associadas com o uso de operações combinatórias que têm relação com a aplicação do princípio multiplicativo, que intuitivamente os alunos passam a aplicá-lo.

São momentos únicos nos quais o professor deve incentivar os alunos a reflexões e discussões que contribuem para que eles descubram, compreendam e se apropriem de conceitos, procedimentos, estratégias, relações e propriedades, fomentando o desenvolvimento e a aplicação destes para a resolução de diversos problemas de contagem por meio de sua mediação.

Nos anos iniciais não é conveniente que o professor apresente formalmente o princípio multiplicativo aos alunos. Sugerimos que faça relações entre a aplicação do princípio e a construção da correspondente árvore de possibilidades, que também apresenta a totalidade das soluções. Antecipar conceitos e procedimentos não contribui para a apropriação correta relativamente ao significado do conceito que está sendo construído e o conhecimento dos invariantes.

Pesquisas têm apontado dificuldades no trabalho que o professor desenvolve em sala de aula concernentes às maneiras com que os alunos se apropriam de conceitos e de procedimentos próprios da matemática, em particular àquelas referidas à resolução de situações que utilizam operações multiplicativas, desde as séries iniciais.

Essas pesquisas preocupam-se em identificar, conhecer e compreender as razões dessas dificuldades e também em explicitar como se dá a aprendizagem de conceitos, habilidades e competências de conteúdos de matemática pelos alunos.

Elas indicam que é preciso que o professor se comprometa com processos de ensino e de aprendizagem que valorizem a compreensão e a apropriação dos conceitos pelos alunos.

De maneira a considerar aprendizagem significativa, nos valemos das considerações de Papert (1994) que "sublinha que a aprendizagem significativa ocorre a partir da solução de problemas e do estabelecimento de relações com as experiências vividas. O autor ressalta que os conhecimentos que as crianças têm devem conectar-se aos problemas propostos em sala de aula; caso contrário, a aprendizagem não será significativa" (PLACHA e MORO, 2009, p.8).

3. O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

O significado de raciocínio combinatório deva ser algo tão intuitivo e simples aos pesquisadores que eles não têm tido preocupação em conceituar esse tipo de raciocínio nos trabalhos presentes na literatura, fazendo menção de modo bastante natural e corriqueiro a esse raciocínio sem se aterem à cognição envolvida.

Enquanto ser pensante e desde que sejam propostas situações as quais precise exercitar esse raciocínio utilizando-se de estratégias relacionadas a ele, uma pessoa terá melhor êxito na resolução de problemas de contagem se aprender a raciocinar de modo combinatório desde que um ensino lhe seja oferecido e desenvolvido com esse propósito, com essas estratégias e junto delas. Mas, quais estratégias?

Segundo Navarro-Pelayo (1996):

> “De acordo com Inhelder e Piaget (1955), o raciocínio hipotético-dedutivo opera com as possibilidades que o sujeito descobre e avalia, por meio de operações combinatórias. Esta capacidade pode relacionar-se com os estágios descritos na teoria de Piaget: depois do período das operações formais, o adolescente descobre procedimentos sistemáticos de construção combinatória, ainda que para as permutações seja necessário esperar a idade de 15 anos” (NAVARRO-PELAYO, 1996, p.2).

Todavia, ainda segundo Navarro-Pelayo (1996), “os resultados de Fischbein (1975) mostram que a capacidade de resolver situações que envolvam o raciocínio combinatório nem sempre se alcança no nível das operações formais, se um ensino específico sobre o assunto não for oferecido”.

Assim, para os nossos propósitos, podemos dizer que raciocínio combinatório é um conjunto de ações cognitivas, não inatas ao sujeito, que permitam a ele encaminhar procedimentos de seleção, partição ou colocação, de objetos, pessoas, números ou letras, combinando-os adequadamente de modo que o resultado dessas ações tenha significado, obedeça a sistematizações e sua representação possa ser feita utilizando diferentes linguagens - língua materna (a primeira língua que se aprende, pode ser Libras ou de Sinais), verbal, matemática, gráfica ou na forma de tabelas – como meio de produzir, expressar e comunicar ideias, interpretando diferentes intenções e situações.

Portanto, o raciocínio combinatório é concebido quando se pensa no ato de “combinar” (compor, juntar ou associar) objetos (ou pessoas, letras, algarismos).

Podemos então dizer que ele se refere à aquisição de habilidades e competências que são exigidas quando o desenvolvemos, mesmo antes de precisar utilizar-se de operações combinatórias para a solução de problemas de contagem.

4. DUAS SITUAÇÕES-PROBLEMA DESENVOLVIDAS

A seguir, apresentamos duas das situações-problema propostas na experiência:

Situação1: Separe as seguintes peças dos blocos lógicos: três retângulos finos e grandes nas cores amarela, azul e vermelha e dois círculos grossos na cor vermelha, um pequeno e um grande. Queremos juntar um círculo sobre um retângulo. Quantos conjuntos diferentes contendo as duas peças podem ser feitos?

Situação 10: Queremos saber quantas são as diferentes “casinhas”, como as três que estão desenhadas a seguir, que podemos formar utilizando somente peças grossas e pequenas.

 .

É preciso aproveitar situações como essas, com valores pequenos de possibilidades para explorar diferentes representações gráficas que a situação oferece, as quais serão muito úteis em outras situações de matemática.

5. SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Segundo Guy Brousseau (1986), ao longo das atividades didáticas às quais o estudante é confrontado é desejável que ele "produza, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos e teorias".

Diferentes situações de contagem se prestam bem ao que Brousseau sugere acima, uma vez que a utilização de diversas atividades envolvendo material concreto - além de jogos - no ensino da Matemática permite ao aluno desenvolver-se enquanto sujeito protagonista de seu aprendizado.

Assim, estimular gradualmente o uso do raciocínio combinatório num ambiente lúdico - com a proposição de diferentes situações-problema - promove o pensar de forma criativa e crítica e o desenvolvimento de habilidades e competências cognitivas as quais passam a fazer parte de seu arcabouço mental, podendo ser generalizadas para outras situações.

Acredito que explorar o raciocínio combinatório e representações gráficas durante a fase de construção dos conceitos seja importantes ferramentas para que o aluno adquira conhecimentos e desenvolva habilidades que o capacitam para resolver problemas reais ao seu alcance, compreendendo outras situações.

Infelizmente, quando se trata da ideia combinatória da multiplicação como sugerida nos PCN (1997, p.109-112), na maioria das vezes ela é pouco explorada pelos professores e fica restrita a poucos exemplos que relacionam saias e blusas, procedendo-se de imediato à utilização de uma operação multiplicativa para obter a solução, e deixam de explorar diferentes representações para o mesmo problema, essencial para a apropriação de outros conceitos.

Após trabalhar com árvores o professor pode apresentar as potencialidades de sua utilização em situações simples de combinatória nas quais o raciocínio combinatório se faz presente, aproveitando situações com valores menores de possibilidades para explorar diferentes representações que serão úteis em outras situações de matemática.

Manipular material concreto (quadrados e triângulos) é importante para que o aluno compreenda o "raciocínio da combinação" no sentido de "combinar", possível entre os objetos que estão à sua mão, de modo que nas situações em que a quantidade de objetos seja grande ele não encontre dificuldades em realizar a contagem, principalmente naquelas que exijam a “combinação” de uma quantidade maior de cada tipo de objeto em algo mais do que somente dois tipos de objetos.

Como visto utilizar diferentes representações para uma situação envolvendo raciocínio combinatório favorece a apreensão intuitiva do princípio fundamental da contagem, imprescindível ao desenvolvimento do pensamento abstrato e no uso em situações que exigem generalização.

Este trabalho tem como sustentação a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1991) que concebe a identificação, formação e desenvolvimento de um conceito a partir do conjunto de significados, invariantes e representações.

Por meio da análise das atividades foi possível identificar quando os invariantes prescritos estavam ou não sendo abordados e os significados presentes, bem como a exploração de uma das representações gráficas, qual seja a da construção de árvores de possibilidades.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando um aluno resolve a situação 10, como apresentada antes, ele demonstra que se apropriou do raciocínio combinatório. Se ele obteve a solução por meio da construção de uma árvore de possibilidades, mostra conhecimentos acerca do uso de uma representação gráfica para dar conta de resolver a situação.

O trabalho com situações deste tipo é muito importante para que o conhecimento conceitual possa emergir a partir da exploração de atividades desafiadoras desencadeadas a partir de adequados procedimentos, em conjunto com a manipulação de material concreto (se possível).

Nossa intenção é oferecer opções de situações para o professor explorar e desenvolver conceitos de combinatória desde os anos iniciais da Educação Básica.

Um dos grandes “nós” que afligem os educadores matemáticos é compreender que a aquisição e a compreensão de um dado conceito não se dão unicamente com a apresentação de um tipo de situação (não emerge daí, somente) e, por outro lado, que uma dada situação pode vir a envolver mais do que um só conceito por mais simples que possa parecer aos nossos olhos.

Portanto, conceitos matemáticos têm significado para o aluno quando eles são identificados por ele a partir do enfrentamento de uma variedade tão extensa quanto necessário de situações didáticas, nas quais ele pode compreender a sua importância.

Por outro lado, uma dada situação pode apresentar diferentes conceitos envolvidos. Ou seja, ela necessita mais do que um conceito para ser analisada e compreendida.

Assim, um único conceito fechado em si e uma única situação não são suficientes para dar conta da aquisição de um dado conhecimento de forma plena e consistente, capaz de proporcionar segurança no seu uso em diferentes contextos.

Combinar objetos como o que foi feito é de tal sorte importante na fase das discussões referentes às ideias acerca do conceito de multiplicação quanto na apropriação e no desenvolvimento do raciocínio combinatório por meio de atividades que visam à apropriação das noções básicas de Combinatória quando da construção de uma árvore de possibilidades para resolver um problema de contagem.

Não vivenciar o manuseio das peças dos blocos lógicos quando da resolução desses tipos de situações-problema para a compreensão e a sistematização dos conceitos e significados da multiplicação e da divisão, como explicitado, podem acarretar outras dificuldades que se originam do fato de o conceito não ter sido bem compreendido ou ainda quando esses conhecimentos não forem construídos e explorados pelo aluno.

O desenvolvimento do raciocínio combinatório favorece possibilidades para que o aluno possa levantar hipóteses, questionar, deduzir, tirar conclusões e expressar-se oralmente ou por escrito sobre o que ele está pensando, preparando-o para que seja capaz de tomar decisões de modo consciente (TEIXEIRA, 2013).

7. REFERÊNCIAS

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos**. Secretaria de Ensino Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

BROUSSEAU, Guy **Fondements et Méthodes de la Didactique dés Mathématiques**. Recherches em Didactique dés Mathématiques, v.7, n.2, p.33-116, Paris, 1986.

FISCHBEIN, Efraim. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht: Reidel, 1975.

FISCHBEIN, Efraim. GAZIT, A. **The combinatorial solving capacity in children and adolescents**. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, v. 5, pp. 193-198,1988.

INHELDER, B., PIAGET. Jean. **De La logique de l’enfant à La logique de l´adolescent**. Paris: P.U.F., 1955.

NAVARRO-PELAYO, V., Batanero, Carmem. Godino, Juan D. **Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria**. 1996. Educación Matemática. 8(1). 26-39. Disponível em <HTTP: //www.ugr.es/~batanero>. Acesso em 27/12/2012.

PLACHA, Kelly Cristine, MORO, Maria Lucia Faria. **Problemas de produto Cartesiano, Raciocínio Combinatório e Intervenção do Professor**. Psicologia: Teoria e Pesquisa. Jan-Mar 2009, Vol. 25 n. 1, PP. 007-017.

ROA, Rafael, BATANERO, Carmem, GODINO, Juan D., CAÑIZARES, M. Jesús. **Estrategias em la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes com Preparación Matemática Avanzada**. Revista Epsilon, 36, 433-446.

TEIXEIRA, P.J.M. **Os Blocos Lógicos e o desenvolvimento do raciocínio combinatório**. Anais do XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas. PUC-PR. Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013.

VERGNAUD, Gèrard. **El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemática en la escuela primária**. Editorial Trillas. México,1991.