A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E O ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES.

Lígia Françoise Lemos Pantoja[1]
Nadja Fonseca da Silva Cutrim Campos[2]
Rocio Rubi Calla Salcedos[3]

Comunicação Científica: Processos Cognitivos e Linguísticos em Educação Matemática

RESUMO: O presente artigo discute a teoria dos registros de representação semiótica de Raymund Duval. Nosso objetivo é diferenciar alguns conceitos discutidos dentro da teoria tais como sistema semiótico, representação, conversão de registro, entre outros e, mostrar como diferentes tratamentos podem ser empregados no estudo dos sistemas de equações algébricas lineares.

Palavras chaves: Sistemas Lineares. Representações Semiótica. Conversão de Registros.

1 - A Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Foi o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (1999)[4] o responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual busca analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Segundo essa teoria, numa atividade de ensino, pode-se representar um objeto matemático utilizando os registros de representação semiótica, os quais são definidos como: "... produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de **representações** os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento". (DUVAL, 1993, p.39)

---

[1] Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – UFPA/PPGECEM/REAMEC/UEPA– ligiadauepa@yahoo.com.br
[2] Mestrado em Educação – UFPA/PPGECEM/REAMEC/UNICEUMA – nadjamalu@gmail.com
[3] Mestrado em Educação – UNIFAP/PPGECEM/REAMEC – rocio_rubic@hotmail.com
[4] Raymond Duval. Filosofo e psicólogo desenvolveu estudos em psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França. Atualmente é professor emérito da Université du Litoral Cote d'Opale, França.

Em sua teoria, Duval explica que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático, denomina-se, sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado.

Um exemplo matemático, no qual pode ser visualizado um objeto destacando seu sistema semiótico e o seu registro de representação, pode ser verificado no estudo da Álgebra Linear diante do uso de registros simbólicos para representar um Sistema de Equações Algébricas Lineares, conforme demonstra o quadro a seguir:

Quadro 1

Representação algébrica de um Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$$

Objeto matemático: Sistemas Lineares

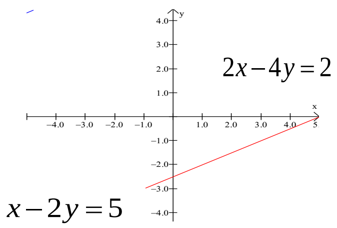
Sistema Semiótico: Simbólico

Representação: Algébrica

O exemplo mostrado no quadro 1 corresponde a apenas uma das possíveis formas de representação, segundo a qual podemos representar o objeto matemático tratado. Existem outros registros semióticos para representar um sistema, entre os quais destacamos o uso do registro figural, utilizando a representação geométrica que também evidencia o estudo do mesmo objeto matemático abordado, conforme demonstra o quadro 2.

Quadro 2

Representação geométrica de um Sistema de Equações Algébricas Lineares



Objeto matemático: Sistemas Lineares

Sistema Semiótico: figural

Representação: Geométrica

Nas atividades matemáticas podemos representar um objeto utilizando vários registros de representação e, segundo a teoria de Duval, é a conversão das várias representações manifestadas sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento. Na realidade, a possibilidade de mudança de registro se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem conforme evidencia o pensamento a seguir:

> A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação. (DUVAL, 2003, p.14)

As representações são consideradas, geralmente, como uma simples maneira de exteriorização das representações mentais para fins de comunicação, todavia, vale ressaltar que essa visão é limitada uma vez que elas exerceram e exercem um papel primordial na construção do pensamento matemático. O autor da teoria de registros destaca a importância dos registros de representação para a matemática dizendo que: “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático” (DUVAL, 2003, p.13), ou seja, o desenvolvimento da própria matemática se deu em função dos registros usados para expressar as idéias construídas.

As palavras de Duval descritas acima evidenciam a importância e a necessidade do uso das representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, uma vez que todo pensamento matemático é expresso através de registros que devem ser explorados a fim de possibilitar a construção do conhecimento. Na verdade, os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis sem o uso de registros de representação, conforme mostra a afirmação:

> ...diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2003, p.21)

O acesso aos números, por exemplo, não é possível sem a utilização de um sistema de representação que os permita designar.

Os registros de representação são elementos constitutivos da ciência matemática, e é através deles que são definidos os vários tratamentos que podem ser empregados no estudo dos objetos matemáticos, daí não podermos deixar de reconhecer a importância dos registros para a construção do conhecimento, considerando os conteúdos específicos que cada representação tem. A esse respeito é possível dizer que:

> Descartar a importância da pluralidade dos registros de representação leva a crer que todas as representações de um mesmo objeto matemático têm o mesmo conteúdo ou que seus conteúdos respectivos se deixam perceber uns nos outros como por transparência. (DUVAL, 2003, p.14)

Cada registro de representação apresenta um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado e o sujeito se apropria do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracteriza. Tomar consciência dos conteúdos existentes em cada registro de representação e estabelecer relações entre eles significa apropriar-se do objeto estudado.

A esse respeito, Morretti afirma:

> De um ponto de vista cognitivo, uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e que de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados. (MORRETTI, 2002, p.27)

São as representações, segundo a teoria de Duval, que quando convertidas umas nas outras conduzem ao aprendizado dos objetos estudados; nesse sentido, podemos então dizer que o estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymund Duval perpassa pela verificação da construção gradativa do conhecimento mediante conversões estabelecidas entre as diversas formas de representação. Sendo assim, quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo.

O acesso aos objetos estudados (conhecimentos científicos institucionalizados) acontece por meio de conversões estabelecidas entre os diferentes registros de representação empregados, por isso, é necessário e importante que sejam desenvolvidas diferentes maneiras de abordar um determinado objeto matemático a fim de verificar as relações existentes entre os registros, buscando a conversão entre eles. A esse respeito Duval afirma que:

> Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2003, p. 22).

Em suma, as palavras de Duval (2003) querem dizer que "*a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro" (p.21)*, daí a necessidade de se desenvolver um ensino que prime em trabalhar com diferentes representações dos objetos matemáticos a serem estudados.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica diz que durante o processo de estudo dos objetos matemáticos deve ser dado ênfase a duas transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: *os tratamentos e as conversões*.

Os *tratamentos* são procedimentos de justificação do objeto de estudo baseados em fenômenos congruentes, segundo os quais os registros permanecem num mesmo sistema de representação, seja através da escrita, de figuras, gráficos, diagramas, dentre outros; já a *conversão* é um processo de transformação de um tratamento em outro no qual há mudança de sistema de registro com a conservação da referência ao objeto estudado.

Ao discutir as transformações de tratamento e conversão em sua teoria, Duval descreve que:

> - Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação. (DUVAL, 2003, p.16)
>
> - As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16)

A distinção das duas formas de transformações anteriormente descritas podem ser melhor evidenciadas no quadro a seguir descrito por Duval (2003):

Quadro 3

Distinção entre tratamento e conversão

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica	
Permanecendo no mesmo sistema: TRATAMENTO	Mudando de Sistema, mas conservando a referencia aos mesmos objetos: CONVERSÃO
Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registros de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mesmo objeto através de duas representações diferentes. A capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registros entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

Embora seja visível a diferença entre as duas transformações apresentadas anteriormente, é comum, as pessoas confundirem *tratamento* e *conversão* ou mesmo reduzirem a conversão a uma atividade de *codificação*. Esse tipo de confusão deve ser evitado, pois se trata de transformações distintas, embora o processo de conversão necessite do uso de tratamentos diferentes para acontecer. Essa confusão fica evidente no pensamento de Duval quando afirma que:

> É comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras (como, por exemplo, em geometria) ou reduzi-la a uma codificação.... Passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. Ou ainda, passar de uma expressão em português - como "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" - à escrita simbólica – no caso, "x>y", seria igualmente uma codificação, como toda escrita literal de relações entre os números. (DUVAL, 2003, p.17).

Os tratamentos estão ligados à forma de representação dos objetos os quais contém conteúdos próprios e não ao estudo do objeto matemático em si; por isso, é um grande equívoco reduzir a conversão a uma forma simplória de tratamento ou mesmo de codificação. Não são regras de correspondência para passar de um registro a outro ou simplesmente codificações que caracterizam uma conversão, mas sim, a apreensão global e qualitativa que a conversão permite embutir nas mudanças de registros. A esse respeito Duval (2003) diz que:

> Há por trás da aplicação de uma regra de decodificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros. (DUVAL, 2003, p.17)

Isso justifica, segundo a teoria de Duval, porque a conversão das representações não pode e não deve ser redutível a uma simples forma de tratamento.

Apesar da conversão, sob o ponto de vista matemático, não efetuar nenhum papel intrínseco nos processos de justificação e prova, ela é de fundamental importância, sob o ponto de vista cognitivo, pois interfere diretamente na condução dos mecanismos subjacentes à compreensão. Na realidade, segundo a Teoria dos Registros de Representação, é a atividade de conversão a responsável pela construção do conhecimento, ou seja, pela apropriação do saber.

Mas, afinal, o que vem a ser a Teoria dos Registros de Representação Semiótica?

Podemos entender a Teoria de Registros de Representações Semióticas como sendo o emprego de signos (gráficos, figuras, fórmulas, escrita), pertencentes a um sistema de representação, constituído de significado e funcionamento, segundo os quais a construção do conhecimento acontece mediante a conversão estabelecida entre duas ou mais formas distintas de registro de representação.

Segundo Duval (1993), essas representações semióticas são *externas e conscientes do sujeito*, ou seja, elas representam a compreensão manifestada sobre um objeto, o qual pode ser tratado de diversas formas. A correspondência existente entre as várias formas de tratamento de um objeto, ou seja, entre as várias formas de registro de representação, indica a funcionalidade do pensamento humano no, sentido de mostrar a compreensão acerca do objeto estudado.

Todo tipo de expressão tem sua forma particular de representação repleta de significados e, sendo a educação um processo intermediado por uma comunicação, seja através do diálogo, gestos ou por meio da escrita, faz-se necessário discutir os diferentes registros de representação empregados no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos estudados, buscando estabelecer conexão entre eles.

2 - Os Sistemas de Equações Algébricas Lineares e suas várias representações:

O processo de resolução de um Sistema Linear pode ser desenvolvido pelo emprego de métodos distintos e, cada método, corresponde a um tipo de tratamento/representação, conforme mostramos a seguir:

Diante do sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$

O mesmo pode ser resolvido por, pelo menos, quatro tipos de tratamentos distintos.

1 - Resolução do sistema usando o Método da Substituição:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & \text{(I)} \\ x + y + 2z = 2 & \text{(II)} \\ x + 2y + 2z = 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

(I) $x + y + z = 1$

$x = 1 - y - z$

(II) $x + y + 2z = 2$

$1 - y - z + y + 2z = 2$

$z = 1$

(III) $x + 2y + 2z = 1$

$1 - y - z + 2y + 2z = 1$

$y + z = 0$

$y = -z = -1$

Reconstruindo o sistema e determinando o valor de x

$x + y + z = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 - y - z$

$z = 1 \qquad x = 1 - (-1) - 1$

$y = -1 \qquad x = 1$

Solução do sistema: (1, -1, 1)

Aqui o sistema é resolvido pela manipulação das equações e, portanto, pelo emprego de registros algébricos estudado no ensino fundamental.

2 - Resolução do sistema empregando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \Delta = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta x = -1 \rightarrow X = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta y = 1 \rightarrow Y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta z = -1 \rightarrow Z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$$

Solução do Sistema: (1, -1, 1)

Na resolução 2 apresentada, novos registros são evocados para a resolução do sistema; no caso, o uso da regra de Cramer. Esse é o tratamento mais evocado no ensino médio por meio do estudo da teoria de matrizes e determinantes.

3 - Resolução do sistema por escalonamento:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -L_1 + L_2 \text{ e} \\ -L_1 + L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ Permutando L_2 e L_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ tema Escalonado

Com o escalonamento, o sistema inicial se transformou no sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 0x+y+z=0 \\ 0x+0y+z=1 \end{cases}$$

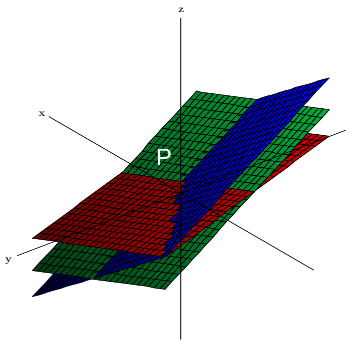
De onde se tem que: $x=1$, $y=-1$ e $z=1$

Solução do sistema: (1, -1, 1)

No processo de resolução por escalonamento, o sistema é visto como uma matriz; no entanto, os registros evocados são as linhas da matriz que são manipuladas, operando-as com se fossem matrizes linhas. Em suma, os registros são matriciais, perdendo o sistema o registro algébrico das equações e, não raro, o significado como conjunto de equações.

3 - Resolução gráfica do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$



O gráfico azul expressa a equação $x+y+z=1$

O gráfico vermelho expressa a equação $x+y+2z=2$

E o gráfico verde expressa a equação $x+2y+2z=1$

P = (1, -1, 1)

O ente geométrico que buscamos esboçar de acordo com o sistema apresentado, em que **P** representa a solução do sistema e os planos em verde, vermelho e azul, correspondem às equações. Os registros evocados, nesse caso, são do tipo gráfico.

Evidentemente, cada registro constitui uma representação do objeto Sistema de Equações, e se inscrevem em tratamentos teóricos distintos e, portanto com significados distintos para o sujeito. Cada representação propicia olhares e compreensões distintas, sendo mais ou menos conveniente para a análise do objeto matemático Sistema de Equações em jogo. Assim, por exemplo, os registros gráficos apresentam a óbvia limitação para análise e resolução de sistemas que possuam mais de três incógnitas; já o registro matricial, para manipulação das linhas, embora possa ser aplicado sem limitação para o número de incógnitas e numero de equações do sistema, torna opaca a compreensão de tais operações com as linhas para a busca da solução do sistema. Tais limitações, no entanto, não tornam dispensáveis esses registros, pois estes fazem compreender o objeto matemático Sistema de Equações de forma a não confundi-lo com suas representações, como destaca Duval apud Godino:

> Não pode haver compreensão em matemática se não se distingui um objeto de sua representação. Não se deve confundir nunca os objetos matemáticos (números, funções, retas, sistemas lineares, etc) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras, etc), pois um mesmo objeto matemático pode apresentar-se através de representações muito diferentes. (GODINO, 2003, p. 56)

No estudo sobre Sistema de Equações Algébricas Lineares fica claro o objeto matemático tratado e as formas de representação que o mesmo pode apresentar; todavia, no processo de resolução de um Sistema de Equações Algébricas Lineares é importante que os alunos percebam e saibam usar os registros distintos de representação. Não basta oferecer aos estudantes uma bateria de problemas a serem resolvidos para se ter "segurança" quanto ao aprendizado daquele objeto matemático; embora os alunos consigam resolver os problemas propostos, caso não sejam trabalhadas diferentes formas de registros de representação semiótica, os discentes ainda **não estarão conscientes do tratamento dado** ao objeto matemático sobre o qual estudam. Somente com o trabalho sobre diferentes formas de registros semióticos, em meio ao desenvolvimento de conversões, é que os alunos passam a desenvolver com consciência o estudo a respeito de Sistemas Lineares.

Referências

DUVAL, R. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?** RDM, v 16, n3, p. 349-382. 1996.

__________ Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993.

__________ Semioses et Noésis. Conferérence APMEP, (1992).

__________..**Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótic***a*. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

GODINO, Juan D. **Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrución matemática**, Universidade de Granada, 2003.

IEZZI, Geldon, ezzi *et al.* **Matemática: ciência e aplicação**. 2 ed. São Paulo. Atual, 2004.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática**. Itajaí: Contrapontos. N.6. p. 23-37. Set/dez 2002.

PAIS, luiz carlos. **Didática da Matemática, uma análise da influencia francesa**. 2ª edição, Belo Horizonte: Autentica, 2002.

__________ Ensinar e aprender matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

STEINBRUCH, Alfredo. **Álgebra Linear**. São Paulo. McGraw-Hill, 1987.