VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática
ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil
16, 17 e 18 de outubro de 2013
Comunicação Científica

O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES ATRAVÉS DA CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Lígia Françoise Lemos Pantoja[1]
Nadja Fonseca da Silva Cutrim Campos[2]
Rocio Rubi Calla Salcedos[3]

Comunicação Científica: Processos Cognitivos e Linguísticos em Educação Matemática

Resumo: O referido artigo trata da proposta de uma seqüência didática voltada ao ensino de sistemas de equações algébricas lineares onde, mostramos como é possível converter o método da substituição no método de escalonamento. O processo de conversão de registros de representação, segundo a teoria de Raymund Duval, possibilita o aprendizado dos objetos matemáticos em meio a um processo de conversão e, é com esse intuito, que trabalhamos a conversão de registros de representação do tipo algébrico em registros aritméticos no processo de resolução dos sistemas lineares.

Palavras Chaves: Ensino de Sistemas Lineares. Representações Semióticas. Conversão de Registros.

1 - o ensino de sistemas lineares

O ensino de sistemas lineares ao longo dos tempos vem sendo marcado pelo emprego de metodologias que tem provocado em muitos alunos certa aversão frente ao estudo desse objeto matemático. Não se deve somente aos professores a culpa pela forma mecanicista segundo a qual este assunto vem sendo tratado, pois são poucos os educadores que conhecem outra maneira de abordar tal temática se não da forma como é apresentada nos livros didáticos em meio a um encadeamento lógico matemático que pouco tem promovido o real aprendizado deste objeto matemático.

[1] Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática – UFPA/PPGECEM/REAMEC/UEPA– ligiadauepa@yahoo.com.br
[2] Mestrado em Educação – UFPA/PPGECEM/REAMEC/UNICEUMA – nadjamalu@gmail.com
[3] Mestrado em Educação – UNIFAP/PPGECEM/REAMEC – rocio_rubic@hotmail.com

A percepção de que o estudo de sistemas lineares não tem se transformado em conhecimento de fato para muitos alunos pode ser verificada no momento em que este assunto é retomado no ensino médio onde estes se mostram extremamente surpresos com o mesmo dando a entender que nunca estudaram o referido objeto matemático.

Infelizmente, o ensino de sistemas lineares quando tratado no ensino médio (foco de aplicação da proposta) não busca o que foi aprendido pelos alunos no ensino fundamental visto que parte de uma relação conteúdista estabelecida somente com os assuntos de matrizes e determinantes em meio ao uso da regra de Cramer[4] que por si só não consegue responder por completo a tal estudo. Diante das limitações apresentadas pelo uso da regra de Cramer, o estudo de sistemas de equações lineares acaba sendo desenvolvido mediante o uso do escalonamento matricial sem, no entanto, ser introduzido qualquer referência ao método da substituição empregado no processo de resolução desconsiderando assim as bases de construção da referida forma de resolução.

Essa desconexão entre as formas de tratamento dos objetos matemáticos em estudo com o conhecimento já apresentado pelos alunos acaba permitindo pouco a evocação dos saberes existentes na estrutura cognitiva dos sujeitos para a (re) construção do novo saber em questão.

A evidencia dos pontos acima abordados é que nos motivaram a elaborar e desenvolver a proposta de uma seqüência didática voltada ao ensino de sistemas lineares onde a mesma traz em seu entorno a preocupação em promover o aprendizado deste assunto mediante um processo de conversão dos chamados registros de representação semiótica[5].

A proposta foi desenvolvida a partir de um fazer matemático reflexivo usando apenas **o método da substituição** tal como foi ensinado no ensino fundamental buscando a conversão dos registros algébricos em registros aritméticos no processo de resolução dos sistemas apresentados. Embora aparentemente trabalhoso o emprego do método da substituição no estudo dos sistemas, tal tratamento metodológico traz na sua essência as reais origens quanto à compreensão dos significados envolvidos no estudo do objeto matemático aqui tratado.

---

[4] A regra de Cramer que é uma das formas de resolução dos sistemas de equações lineares que pode ser verificada no livro: *Matemática: ciência e aplicação*, 2ª série: ensino médio / Gelson Iezzi [et al.], São Paulo: Atual, 2004.

[5] Duval (1993) define registros de representações semióticas como sendo o emprego de um conjunto de signos (gráficos, figuras, fórmulas, escrita) pertencentes a um sistema de **representações** constituídos de significados e funcionamento onde a apreensão de um conceito só acontece mediante a conversão de um registro de representação em outro mantendo assegurada, totalmente ou em parte, as características do objeto estudado.

2 - os registros de representações semiótica e o processo de conversão como base para novas propostas de ensino.

A compreensão da teoria dos registros de representações semióticas de Raymund Durval perpassa pela verificação da construção gradativa do conhecimento mediante as suas diversas formas de representação. Quanto mais diversificada é a forma de representação de um saber maior é a compreensão que se tem a seu respeito e a real apropriação do seu significado se dá a partir das conversões estabelecidas entre as diversas formas de se representar o objeto. Segundo Duval, só se tem acesso aos objetos estudados (conhecimentos científicos institucionalizados) por meio das conversões estabelecidas entre as diferentes formas de registros de representação semiótica manifestada sobre os mesmos.

Abordando os termos *registros de representação* e *semiótica* em separado, verifica-se que o entendimento a respeito dos registros de representação pode ser percebido como sendo, por exemplo, a escrita, a notação, as figuras, os gráficos, diagramas, esquemas, signos e símbolos utilizados para representar um objeto matemático. Assim, a noção de registro de representação está voltada ao domínio dos sinais que servem para designar um objeto. Já a semiótica consiste numa ciência que busca compreender o significado dos símbolos empregados nos registros representados.

A proposição ***A = B.C***, por exemplo, pode representar num dado momento a área de uma figura (em se tratando do estudo de áreas), mas em outro, a mesma proposição representada pelas formas ***F = M.A*** ou ***P = m.g***, passa a expressar outros tipos de estudos, no caso, o estudo de força e peso respectivamente trabalhados em física. Sendo assim, pode-se dizer que as formas de representação de um objeto assumem um significado de acordo com o contexto ao qual está sendo empregada, sendo que, quanto mais diversificada é a visualização desses diferentes contextos e dessas diferentes formas de registro de representação maior é a compreensão que se tem a respeito da proposição expressada.

O exemplo acima mostra que as proposições **A = B.C**, **F = M.A** e ***P = m.g*** correspondem a formas diferenciadas de **registros de representações** dotadas de significados (**semiótica**) diferenciados que são assumidos de acordo com o contexto aos quais são empregados.

Segundo Duval (1999), a relação entre os diferentes tipos de registros de representação implica numa interpretação semiótica dos objetos essencial ao processo de ensino e aprendizagem e é durante a relação estabelecida entre os registros que os significados aparecem originando a construção dos conceitos.

No decorrer da manifestação dos diferentes tipos de registros de representações é desenvolvido um processo de investigação diante da prática exercida sobre o objeto, pois há toda uma lógica de significados empregada no processo de representação que deve ser amplamente discutida e analisada em sala de aula.

Segundo Duval (1999), para que um registro de representação se converta em um sistema semiótico o mesmo deve permitir que seja desenvolvida três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semioses:

1ª) – Diante de uma situação, faz-se necessário criar **uma representação identificável para o objeto em estudo** a qual deve ser vista como a imagem de um registro fruto de uma representação mental e particular do mesmo. Nessa representação identificável do objeto deve-se selecionar um conjunto de caracteres e de dados do conteúdo a ser representado obedecendo o uso de regras que assegurem o reconhecimento das representações usadas.

2ª) – Tendo representado um objeto essa representação necessita de um **tratamento** que corresponde a uma transformação dessa representação dentro do próprio registro onde ela foi formada. No estudo de operações com números racionais, por exemplo, ao se efetuar uma adição, a mesma pode ser representada de diferentes formas, cada uma com sua forma particular de tratamento. É possível se adicionar dois números racionais de duas ou mais formas diferentes:

a) 0,25 + 0,25 = 0,5 (representação decimal, envolve um tratamento decimal)

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (representação fracionária, envolve um tratamento fracionário)

Ao se tratar de um registro de representação é necessário considerar que existem regras de tratamento próprias a cada tipo de registro cuja natureza e forma de tratamento variam de um registro a outro. Diante de um tratamento adequado dado ao estudo de um objeto é possível transformar a sua forma de representação permanecendo o conteúdo do objeto matemático tratado. No caso da adição de números racionais mostrada no exemplo acima os tratamentos dados foram ligados à forma e não ao conteúdo do conhecimento matemático abordado.

Dentro do processo de tratamento é importante destacar que cada forma de registro de representação apresenta seu grau particular de dificuldade (indica um custo cognitivo diferente) e isso deve ser percebido quando se ensina.

3ª) – Por fim, a ultima atividade cognitiva necessária para que um registro de representação se converta em um sistema semiótico é a **conversão** que nada mais é do que a coordenação existente entre as variadas formas de registro. A conversão acontece quando há a transformação de uma forma de registro em outro conservando uma parte da totalidade do objeto matemático. É importante que não se confunda a conversão com o tratamento, pois o tratamento se estabelece dentro de registro e a conversão se dá entre a troca de registros.

Usando o mesmo exemplo de adição de números racionais pode-se dizer que a conversão acontece quando o sujeito que desenvolve a operação de adição percebe que os diferentes tipos de registros de representação usados na resolução tratam de um mesmo objeto matemático. Diante de tal evidencia o sujeito que lida com o desenvolvimento da operação consegue perceber, por exemplo, que 0,25 (representação decimal de um número racional) corresponde a 1/4 (representação fracionária de um número racional) tendo condições e elementos suficientes para concluir que 0,25 = 1/4 considerando a coordenação existente entre as duas formas de registros representadas.

A esse respeito, Damm (2003, p.147), afirma que: "O que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou várias representações possíveis de um mesmo objeto, mas sim *a coordenação entre esses vários registros de representação*".

Somente quando o aluno perpassa pelas três atividades cognitivas descritas é que o objeto matemático se consolida enquanto conhecimento.

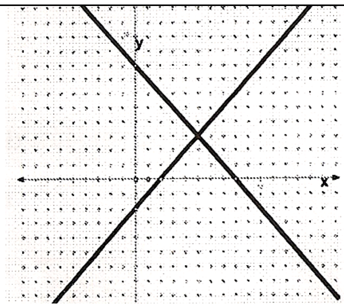
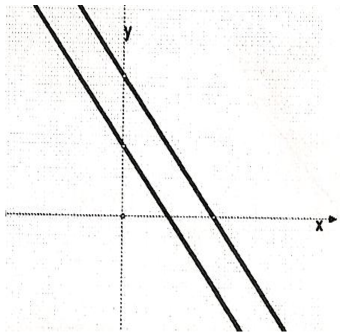
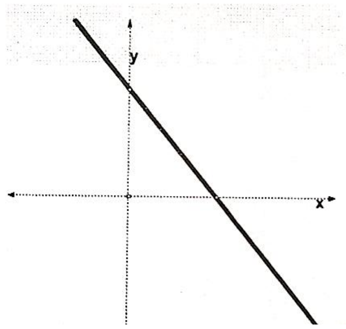
3 - a conversão de registros de representação no estudo de sistemas de equações lineares

Conforme já foi dito um objeto matemático pode ter diferentes formas de representação, cada uma dotada de significados próprios e, em se tratando do estudo dos sistemas de equações lineares, o emprego de diversificadas formas de tratamento também podem ser observadas.

O quadro a seguir, descrito por Herrero (2004), mostra algumas dessas diferentes formas de representação aplicadas ao estudo de sistemas de equações lineares.

Quadro 1

Objeto matemático	**Representações**		
	Registro verbal	**Registro algébrico**	**Registro Gráfico**
Sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. A solução é um conjunto unitário.	Se os lados de um retângulo se alargam em dois centímetros cada um, o perímetro é 24 centímetros. Sabe-se ainda que a diferença entre as	$\begin{cases} 2(x + 2) + 2(y + 2) = 24 \\ x - y = 2 \end{cases}$	

	medidas dos lados é 2 centímetros medem os lados do retângulo?		
Sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. A solução é um conjunto vazio.	A soma de dois números é 1000 e o dobro de sua soma é 700. Quais são estes números?	$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 2(x + y) = 700 \end{cases}$	
Sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. A solução é um conjunto infinito	O perímetro de um triângulo isósceles é 18 centímetros. Ao somar a medida de um dos seus lados congruentes com a metade do lado não congruente, obtém-se 9. Qual á a medida de cada lado do triangulo?	$\begin{cases} 2x + y = 18 \\ x + \frac{1}{2}y = 9 \end{cases}$	

Os registros apresentados no quadro acima correspondem a representações diferenciadas de um mesmo objeto matemático que são determinadas de acordo com o significado que tem, para cada pessoa, a forma de representação.

O emprego do método da substituição no processo de resolução de um sistema linear também possibilita desenvolver tratamentos diferenciados sobre o estudo deste objeto matemático conduzindo a uma conversão entre dois tipos diferenciados de registros de representação, ou seja, a partir do uso do método da substituição é possível converter um tratamento algébrico em outro puramente aritmético no estudo dos sistemas mediante a observação de algumas regularidades matemáticas verificadas dentro do processo de resolução.

Fazer uso do método da substituição no estudo dos sistemas de equações lineares significa escrever uma incógnita em função das outras a partir de uma dada equação e substituir nas demais equações que compõe o sistema, resultando em um novo sistema de mais simples solução que o sistema anterior conforme mostramos a seguir.

Inicialmente consideremos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ 4x + y + 3z = 7 \end{cases} \qquad (*)$$

Pela primeira equação do sistema, temos que:

$x = 1 – y - z$

Substituindo x na segunda e na terceira equação do sistema, obtemos:

$2(1 – y – z) – y + z = 5 \Rightarrow 2 – 2y – 2z – y + z = 5 \Rightarrow - 3y – z = 3$

e

$4(1 – y – z) + y + 3z = 7 \Rightarrow 4 – 4y – 4z + y + 3z = 7 \Rightarrow - 3y + 4z = 3$

Com isto, montamos um novo sistema (**) que é mais simples que o anterior;

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ - 3y – z = 3 \\ - 3y + 4z = 3 \end{cases} \qquad (**)$$

Da segunda equação do sistema (**) encontramos que:

$$y = -\frac{3}{3} - \frac{z}{3}$$

Substituindo y na terceira equação do sistema (**), obtemos:

$$-3\left(-\frac{3}{3} - \frac{z}{3}\right) + 4z = 3 \Rightarrow 3 – z + 4z = 3 \Rightarrow 3z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Com isto, conseguimos um novo sistema;

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ - 3y – z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (***)$$

O sistema (***) já forneceu o valor da incógnita **z** e a partir dela foi possível encontrar as demais incógnitas, no caso **x e y,** substituindo o valor de **z** na segunda equação do sistema (***) para encontra **y** e depois substituindo os valores de **y** e **z** na primeira equação do mesmo sistema para encontrar **x**. Assim, efetuando as devidas substituições temos:

$- 3y – z = 3 \Rightarrow -3y – 0 = 3 \Rightarrow y = -1$

e

$x + y + z = 1 \Rightarrow x – 1+ 0 = 1 \Rightarrow x = 2$

Com isto encontramos x = 2, y = -1 e z = 0 que são os valores que satisfazem as equações do sistema.

De modo geral, o método da substituição transforma um sistema da n equações e n incógnitas, a partir de uma série de substituições convenientes de incógnitas nas equações posteriores. Partindo dessa percepção é que aplicamos o referido método em um sistema generalizado a fim de observar algumas regularidades matemáticas que permitem realizar a conversão de registros algébricos em registros aritméticos dentro do processo de resolução dos sistemas.

Considerando um sistema generalizado com n equações e n variáveis como sendo da forma:

$a_1x + b_1y + c_1z + ...+ d_1w = k_1$

$a_2x + b_2y + c_2z + ...+ d_2w = k_2$

$a_3x + b_3 y + c_3z + ...+ d_3w = k_3$

....

$a_nx + b_ny + c_nz + ...+ d_nw = k_n$

É possível se aplicar o método da substituição no mesmo.

Como o objetivo de se aplicar o método da substituição em um sistema generalizado era a de verificar as relações matemáticas existentes entre os coeficientes das equações foi estabelecida uma ordem para o sistema e dai mostrou-se tal feito. Essas relações são observadas em sistemas de qualquer ordem.

Assim, o sistema generalizado definido foi um de ordem 3x3.

$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$ (I)

$a_2x + b_2y + c_2z = k_2$ (II) Sistema (*)

$a_3x + b_3y + c_3z = k_3$ (III)

Isolando **x** da equação (I)

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = k_1$ (I)

$$x = \frac{k_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z$$

Substituindo o valor de **x** da equação (I) na equação (II)

$$a_2x + b_2y + c_2z = k_2 \qquad \text{(II)}$$

$$a_2.\left(\frac{k_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z\right) + b_2y + c_2z = k_2$$

$$a_2.\frac{k_1}{a_1} - a_2.\frac{b_1}{a_1}y - a_2.\frac{c_1}{a_1}z + b_2y + c_2z = k_2$$

Reconstruindo a equação (II) colocando os coeficientes de **y**, **z** e **k** em evidencia.

$$\left(b_2 - a_2.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_2 - a_2.\frac{c_1}{a_1}\right)z = k_2 - a_2\frac{k_1}{a_1}$$

Substituindo o valor de **x** da equação (I) na equação (III)

$$a_3x + b_3y + c_3z = k_3 \qquad \text{(III)}$$

$$a_3.\left(\frac{k_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1}y - \frac{c_1}{a_1}z\right) + b_3y + c_3z = k_3$$

$$a_3.\frac{k_1}{a_1} - a_3.\frac{b_1}{a_1}y - a_3.\frac{c_1}{a_1}z + b_3y + c_3z = k_3$$

Reconstruindo a 3ª equação colocando os coeficientes de **y**, **z** e **k** em evidencia.

$$\left(b_3 - a_3.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_3 - a_3.\frac{c_1}{a_1}\right)z = k_3 - a_3.\frac{k_1}{a_1}$$

Reconstruindo o sistema 3x3 generalizado

$$a_1x + b_1y + c_1z = k_1$$

$$\left(b_2 - a_2.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_2 - a_2.\frac{c_1}{a_1}\right)z = k_2 - a_2\frac{k_1}{a_1} \qquad \rightarrow \quad \text{Sistema mais simples (**)}$$

$$\left(b_3 - a_3.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_3 - a_3.\frac{c_1}{a_1}\right)z = k_3 - a_3.\frac{k_1}{a_1}$$

O sistema reconstruído redefine novos coeficientes para as equações que compõe o sistema. Se observado com atenção, dá pra perceber que existe uma regularidade no que diz respeito ao cálculo desses novos coeficientes. Os coeficientes b_2, c_2 e k_2 da equação (II) e os coeficientes b_3, c_3 e k_3 da equação (III) do sistema original (*) foram redefinidos por relações estabelecidas entre os coeficientes conforme demonstramos abaixo:

Relações que redefinem os coeficientes da equação (II)

$b_2 = (b_2 - a_2.\frac{b_1}{a_1})$ $c_2 = (c_2 - a_2.\frac{c_1}{a_1})$ e $k_2 = k_2 - a_2\frac{k_1}{a_1}$ → Termo independente

Relações que redefinem os coeficientes da equação (III)

$b_3 = (b_3 - a_3.\frac{b_1}{a_1})$ $c_3 = (c_3 - a_3.\frac{c_1}{a_1})$ e $k_3 = k_3 - a_2\frac{k_1}{a_1}$ → Termo independente

Observe que para calcular os novos coeficientes do sistema mais simples basta atentar para os coeficientes do sistema dado, ou seja, do sistema original (*), sem a necessidade de estar aplicando o método da substituição no sistema sobre a forma algébrica como vinha sendo feito. Diante dessa regularidade observada que redefine os coeficientes das incógnitas é possível trabalhar a resolução dos sistemas de equações lineares numa perspectiva puramente aritmética.

De forma generalizada é possível redefinir os cálculos desses novos coeficientes da seguinte maneira:

$a_{ij} = a_{ij} - a_i k.\frac{ak_j}{akk}$ → onde i = linha
j = coluna
k = inferência
i > k → i varia de k até n

$k_i = k_i - a_i k.\frac{ak}{akk}$ → Termo independente

Diante da percepção dessas relações estabelecidas entre os coeficientes das incógnitas que compunham o sistema é possível resolver outros sistemas usando somente os coeficientes (a_{ij}) das incógnitas e dos termos independentes (k_i). Para mostrar isso consideremos o sistema abaixo:

1s + 1b + 1r =5

1s + 2b + 1r = 6

1s + 1b + 2r = 7

Omitindo as incógnitas do sistema:

1	1	1 = 5		$a_1 = 1$	$b_1 = 1$	$c_1 = 1$	e	$k_1 = 5$
1	2	1 = 6	onde:	$a_2 = 1$	$b_2 = 2$	$c_2 = 1$	e	$k_2 = 6$
1	1	2 = 7		$a_3 = 1$	$b_3 = 1$	$c_3 = 2$	e	$k_3 = 7$

Aplicando as relações estabelecidas no sistema generalizado para o recálculo dos coeficientes, tem-se:

Reconstruindo os coeficientes da 2ª equação do sistema:

$$(b_2 - a_2.\frac{b_1}{a_1}) + (c_2 - a_2.\frac{c_1}{a_1}) = k_2 - a_2\frac{k_1}{a_1}$$

Substituindo os respectivos valores dos coeficientes na relação:

$$(2 - 1.\frac{1}{1}) + (1 - 1.\frac{1}{1}) = (6 - 1.\frac{5}{1})$$

Os “novos” coeficientes da 2ª equação do sistema são:

0 1 0 = 1

O recalculo dos coeficientes da 2ª equação do sistema já permitiu encontrar uma das respostas do sistema, ou seja, **b = 1**, pois os próprios coeficientes recalculados definiram uma nova equação para o sistema ficando 0s + 1b + 0r = 1 que permite verificar o resultado encontrado.

Reconstruindo os coeficientes da 3ª equação do sistema:

$$(b_3 - a_3.\frac{b_1}{a_1}) + (c_3 - a_3.\frac{c_1}{a_1}) = k_3 - a_3.\frac{k_1}{a_1}$$

Substituindo os valores da relação:

$$(1 - 1.\frac{1}{1}) + (2 - 1.\frac{1}{1}) = (7 - 1.\frac{5}{1})$$

Os “novos” coeficientes da 3ª equação do sistema foram:

0 + 0 + 1 = 2

O recalculo dos coeficientes da 3ª equação do sistema permitiu encontrar diretamente o valor de **z**, pois ao serem redefinidos reescreveram a referida equação segundo a forma 0x + 0y + 1z = 2 de onde se tira que z = 2.

Assim, o “novo” sistema formado com os novos coeficientes redefinidos foi:

1 1 1 = 5

0 1 0 = 1

0 0 1 = 2

Já conhecendo o valor de duas incógnitas do sistema, ou seja, (y = 1 e z = 2) é possível calcular o valor da terceira incógnita (x) substituindo as outras duas na primeira equação do sistema original.

Dessa forma:

$1x + 1y + 1z = 5 \quad \rightarrow \quad x + 1 + 2 = 5 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Logo a solução do sistema foi: x = 2, y = 1 e z = 2.

Dentro desse processo de conversão dos registros de representação é importante observar que quando tomamos somente os coeficientes do sistema e procedemos os cálculos por meio das expressões definidas, o Método da Substituição, passa ser chamado de Método do Escalonamento ou da Eliminação Gaussiana.

Referencias

CATTO, GLÓRIA GARRIDO. **Registro de representação semiótica e número racional: uma abordagem nos livros didáticos.** Dissertação de mestrado. PUC. São Paulo. 2000.

DUVAL, R. **Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?** RDM, v 16, n3, p. 349-382. 1996.

__________ **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.** Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993.

__________ **Semioses et Noésis**. Conferérence APMEP, (1992).

__________ **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

HERRERO, SANDRA MACHEL SEGURA. **Sistemas de equações lineares: uma seqüência didática**. Relime. Vol 7. num 1. março 2004. pp. 49 – 72.

SANTELLA, LUCIA. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2007.

MACHADO, SILVIA DIAS ALCÂNTARA, et al. **Educação matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999.

SANTELLA, LUCIA. **O que é semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2007.