

VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática



ULBRA - Canoas - Rio Grande do Sul - Brasil

16, 17 e 18 de outubro de 2013

Comunicação Científica



PROPORCIONALIDADE: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maria Arlita da Silveira Soares¹

Cátia Maria Nehring²

Temática do Artigo: Educação Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental

Resumo: Neste artigo, analisamos o modo como a proporcionalidade é apresentada por uma coleção de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental. Para tanto, apoiamos-nos em resultados de investigações nacional e internacional sobre o processo de ensino e aprendizagem desse conceito. O método escolhido para a realização deste estudo foi a análise documental e os instrumentos de coleta de dados foram quatro livros didáticos de uma coleção aprovada pelo PNLD/2011. Concluímos que todos os livros analisados apresentam atividades cujas grandezas são proporcionais, na maioria grandezas diretamente proporcionais. No entanto, a proporcionalidade das grandezas envolvidas não é explorada de forma explícita, ou seja, o autor valoriza a aplicação da regra de três em detrimento ao uso de estratégias não-convencionais, por exemplo estratégia escalar e funcional.

Palavras-chave: Proporcionalidade. Livro Didático. Ensino Fundamental.

1. INTRODUÇÃO

A proporcionalidade é um dos mais importantes conceitos da Matemática, visto a sua aplicabilidade a *diversas situações do dia a dia* (compra e consumo, escalas, produtividade,...); *dentro da própria matemática* (multiplicação e divisão, equivalência de frações, porcentagem, relações entre unidades de medida, semelhança geométrica e homotetia, teorema de tales,...); e sua *utilização por diversas áreas do conhecimento* (física, química, biologia, engenharia,...) (IMENES, 2008).

No entanto, o ensino da proporcionalidade em muitos casos tem se limitado a algumas séries/anos do Ensino Fundamental, ou seja, a sua exploração como um conceito que articula diferentes conteúdos não vem sendo realizada. Isto porque a proporcionalidade é apresentada, a partir de uma mecanização do seu procedimento algorítmico (regra de três), promovendo uma aprendizagem mecânica, sem compreensão do conceito. Corrobora com essa ideia Nunes

¹ Prof. Me. Departamento de Ciências Exatas e da Terra. URI Santiago. arlita@urisantiago.br

² Prof. Dr. Departamento de Ciências Exatas e Engenharias. Unijui. catia@unijui.edu.br

(2003) ao apontar que, esse conceito bastante simples em sua origem (relação entre duas variáveis) vem sendo trabalhado de forma equivocada, pois, geralmente, não é feita a relação (desde os anos iniciais) com a operação de multiplicação. Além disso, o ensino da proporcionalidade reduz-se, geralmente, ao 7º ano do ensino fundamental, sendo dedicado um ou dois meses a esse estudo e os demais conceitos, relacionados ao ensino de proporcionalidade, apresentados de uma só vez, num só momento. Em essência, são tratados, nesta ordem, os seguintes tópicos: definição de razão, definição de proporção como igualdade de razões, propriedades das proporções, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais, regra de três simples, regra de três composta e juro simples; uma abordagem que não faz a exploração intuitiva da proporcionalidade como função (IMENES, 2008).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (BRASIL, 1998, p. 65) sugerem a exploração de situações de aprendizagem envolvendo o dia a dia e outras áreas do conhecimento que levem o aluno a “observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução”, não convencionais.

Como a proporcionalidade é uma ideia unificadora da Matemática escolar, pois une e relaciona conteúdos individuais e revela princípios gerais (SILVA, 2008), seu ensino não pode ser tratado num instante particular da Educação Básica (7º ano). É um conceito para ser explorado continuamente, promovendo a integração de diferentes conteúdos presentes em campos variados. Assim, deve-se pensar proporcionalidade como tema de estudo ao longo de toda a escolarização.

Para perceber como isso pode ser concretizado na prática pedagógica pode-se recorrer a análise do modo como o conceito de proporcionalidade é apresentado nos livros didáticos. Isto porque acreditamos que analisando os livros didáticos estamos de forma indireta investigando como as mudanças curriculares vêm acontecendo na prática dos professores. Sendo assim, optamos por analisar uma coleção de livros didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental escolhida e utilizada pelos professores da escola na qual atuamos no Ensino Médio.

O método escolhido para a realização foi a análise documental, pois é uma técnica valiosa na abordagem de dados qualitativos e deve ser utilizada quando as informações contidas em documentos são os elementos fundamentais para a pesquisa (LUDKE e ANDRÉ, 1986). Analisamos os quatro livros didáticos que compõem a obra. Para preservar o anonimato da obra e de seu autor utilizamos denominamos os livros de LD1- livro do 6º ano, LD2- livro do 7º ano, LD3-livro do 8º ano e LD4-livros do 9º ano. Definidos os documentos,

realizamos uma análise parcial com intuito de verificar a estrutura da obra e suas principais características (seleção de conteúdos, distribuição dos campos da Matemática, articulação entre os conteúdos, metodologia, contextualização,...). Em seguida, elencamos critérios de análise, tendo como base o referencial teórico, a saber:

- Aborda a proporcionalidade de forma (explícita ou implícita)³.
- Propõe a distinção de situações que têm subjacentes relações de natureza proporcional de situações que não o têm.
- Aborda a função linear (caso especial da função afim) como modelo da proporcionalidade direta.
- Explora vários sentidos na coordenação das diferentes representações matemáticas (numérica, algébrica, tabular, gráfica, etc.).
- Propõe situações que requerem a verificação da existência de grandezas proporcionais a partir da análise da representação gráfica.

Mediante o exposto, o foco deste artigo é a análise dos quatro livros didáticos que compõem a coleção selecionada. Para tal, destacamos que “um conceito não assume sua significação numa única classe de situações, e uma situação não se analisa com o auxílio de um único conceito” (VERGNAUD, 1996, p. 190), ou seja, por mais simples que seja a situação ela envolve vários conceitos. Além disso, enfatizamos a necessidade da mobilização e articulação das várias representações matemáticas no processo de evolução conceitual. A seguir, apresentaremos as propostas dos livros didáticos selecionados segundo estas ideias.

2. PROPORCIONALIDADE COMO FUNÇÃO: ALGUNS ENTENDIMENTOS

O fato de que muitas situações do nosso dia a dia funcionam de acordo com as leis da proporcionalidade, evidencia que o desenvolvimento do raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real, na compreensão de várias áreas do conhecimento, bem como, no aprendizado de outros conceitos da própria matemática (BRASIL, 1998). Sendo assim, a proporcionalidade tem sido alvo de várias pesquisas em Educação Matemática, Educação em Ciências e Psicologia Cognitiva (VERGNAUD, 1996, 2009a, POST; BEHR; LESH, 1995, NUNES, 2003, PONTE; SILVESTRE, 2009, PONTE et al, 2010, OLIVEIRA, 2000, 2009,...).

³ Maiores informações para esses termos no item 3 do texto.

No Brasil, com base nos dados divulgados pela revista *Zetetiké*, no período de 1971 a 2007 foram desenvolvidas 20 dissertações e 2 teses sobre essa temática (MIRANDA, 2009). Com o intuito de atualizar os dados buscamos, também, na *Zetetiké* e no portal da CAPES as pesquisas realizadas no período de 2008 a 2012. Encontramos 5 dissertações e 1 tese, confirmando que a proporcionalidade tem sido foco de várias pesquisas nas últimas quatro décadas, principalmente, na primeira década dos anos dois mil.

Utilizando como referência as categorias propostas por Miranda (2009) para analisar (no que se refere aos objetivos) as pesquisas realizadas no Estado de São Paulo, no período de 1971 a 2007, envolvendo aspectos do pensamento proporcional, categorizamos as pesquisas anteriores. Constatamos que há 1 tese e 4 dissertações na categoria *propor e realizar atividades*; 1 tese e 3 dissertações na categoria *sugerir caminhos para os professores*, 1 tese e 13 dissertações na categoria *avaliar a aprendizagem* e 2 dissertações na categoria *analisar o conteúdo de livros didáticos*. Além destas, em 1 dissertação foi realizada a análise dos materiais elaborados pela Secretaria da Educação (caderno do professor) para o ensino de proporcionalidade.

Diante desses dados, verificamos que a maioria das pesquisas buscou identificar as estratégias utilizadas pelos alunos do Ensino Fundamental na resolução de situações envolvendo proporcionalidade direta. Por exemplo, Oliveira (2000), fundamentada em Vergnaud, identificou que os alunos das séries finais do Ensino Fundamental utilizam diferentes estratégias para resolver situações proporcionais, a saber: *aditiva, linear, busca do valor unitário, escalar, funcional, e grandeza intermediária*. Com exceção das estratégias aditiva e linear (combinação entre aditiva e escalar) as demais decorrem das relações multiplicativas, pois a proporcionalidade faz parte do Campo Conceitual das estruturas multiplicativas (VERGNAUD, 2009a). Este campo envolve conceitos matemáticos que não são matematicamente independentes, como multiplicação, divisão, fração, razão, número racional, função linear, entre outros, eles aparecem simultaneamente nos problemas de proporcionalidade (BERNAL, 2004).

Observamos, também, serem em menor número as pesquisas que analisam as propostas de livros didáticos e, ainda, as já realizadas dão ênfase para análise dos livros do 7º ano do Ensino Fundamental. Por exemplo, Costa (2005), verificou que os livros didáticos brasileiros dos anos 70, 80 e 2000 apresentam a proporcionalidade após o estudo de equação do 1º grau, sendo este pré-requisito para resolução de situações proporcionais, por meio da regra de três simples.

A regra de três é um método eficiente, mas segundo Post, Behr e Lesh,

[...] os métodos mais eficientes são, com frequência, aqueles menos significativos, que devem, portanto, ser evitados nas fases de ensino iniciais. Infelizmente, muitas vezes confundimos eficiência com significação e, por descuido, embora com a melhor das intenções, introduzimos um conceito da maneira mais eficiente, porém menos significativa. (1995, p. 93)

Acreditamos que as etapas essenciais para a aquisição de um conceito não podem ser resumidas a um conjunto de regras, fórmulas ou definições. Para adquirir um conceito é imprescindível que seja proposto, ao longo do tempo, um conjunto de situações cujo domínio progressivo (de estágios mais intuitivos aos mais sistematizados) solicita uma variedade de conceitos, procedimentos e representações em estreita conexão (VERGNAUD, 2009b). Sendo assim, buscamos na literatura entendimentos para superar a ideia redutora de que a resolução de problemas que envolvem situações proporcionais deve ser realizada a partir do algoritmo da regra de três. Enfatizamos as propostas que defendem a exploração da proporcionalidade como função. Para tanto, torna-se importante, primeiramente, compreendermos aspectos relacionados ao raciocínio proporcional, pois as pesquisas reconhecem a dificuldade dos alunos neste tipo de raciocínio e chamam atenção para a sua influência na aprendizagem de outros conceitos matemáticos.

Na literatura há diversas caracterizações para o raciocínio proporcional. Para Post, Behr e Lesh (1995) o raciocínio proporcional

[...] é uma forma de raciocínio matemático. Ele envolve o senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações. O raciocínio com proporções está muito ligado a inferência e predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos. (p. 90)

Segundo Lamon (apud PONTE et al, 2010, p. 3) “o raciocínio proporcional está relacionado a capacidade de analisar relações entre grandezas, o que implica compreensão da relação constante entre estas (invariância) e a noção que ambas variam em conjunto (covariação)”, exigindo dos alunos a compreensão de que na equivalência entre razões há algo que muda (quantidades absolutas) e, simultaneamente, há algo que se mantém constante (na mesma proporção). Para a pesquisadora, uma compreensão deficitária da relação multiplicação das situações proporcionais pode estar na origem da maioria das dificuldades dos alunos.

A natureza multiplicativa das situações proporcionais diretas constitui um dos focos de investigação de Vergnaud (1996, 2009a, 2009b). O autor identifica nas estruturas multiplicativas três classes de problemas, entre elas o isomorfismo de medidas, que se refere a grandezas diretamente proporcionais. Neste caso, as transformações que se realizam dentro ou entre variáveis (figura 1) mantém uma relação proporcional entre os valores numéricos. A

transformação realizada dentro da mesma variável é denominada por Vergnaud (2009a) como análise vertical (escalar) e entre variáveis como análise horizontal (funcional).

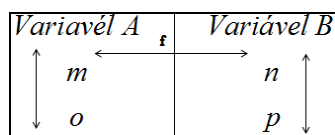


Figura 1: Isomorfismo de Medidas (VERGNAUD, 2009a)

A análise vertical está centrada na noção operador-escalar (sem dimensão), a qual permite passar de uma linha a outra em uma mesma categoria de medidas. A análise horizontal centra-se na noção f de operador-função que permite passar de uma categoria a outra (VERGNAUD, 2009a). A distinção entre esses dois tipos de análise é importante, pois os processos cognitivos são diferentes (LAMON apud PONTE et al, 2010).

Silvestre e Ponte (2009), sistematizando as concepções de diversos autores, apontam que o raciocínio proporcional envolve três condições: (i) capacidade para diferenciar situações de natureza proporcional de situações que não são; (ii) entendimento da natureza multiplicativa das relações proporcionais; (iii) capacidade para resolver diversas situações, revelando flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser prejudicado pelos dados numéricos, pelo contexto, pelas representações (tabular, algébrica, gráfica,...). Portanto, a utilização do raciocínio proporcional implica muito mais do que o uso da regra de três na resolução de problemas.

Ponte et al (2010) defendem que a proporcionalidade direta deve ser explorada (intuitivamente) como função linear desde os primeiros anos de escolaridade, adquirindo precedência sobre a noção de igualdade entre razões (proporção). Este caminho permite “desenvolver as capacidades que envolvem o raciocínio proporcional, em particular o sentido de co-variação [análise vertical (escalar)] e de inferência [análise horizontal (funcional)], ao mesmo tempo que contribui para o desenvolvimento da capacidade de generalização.” (PONTE et al 2010, p. 7) Além disso, os alunos devem saber reconhecer uma relação de proporcionalidade em situações dadas em diversas representações matemáticas e, progressivamente, devem conseguir converter uma representação em outra e usá-la na resolução de problemas. Isto porque a atividade matemática, do ponto de vista cognitivo, caracteriza-se pela variedade de representações para um mesmo objeto matemático.

Duval (2003) caracteriza essas representações como representações semióticas, que são externas e conscientes aos sujeitos, portanto, não desempenham apenas a função de comunicação, mas também funções de objetivação (entendimento para si) e tratamento

(cálculo). Alguns sistemas semióticos são considerados registros de representação semiótica e são utilizados para representar objetos/conteúdos/conceitos matemáticos: língua natural, escrita numérica (fracionária, decimal, binária,...), escrita algébrica, gráficos cartesianos, entre outras, pois podem ser convertidas em representações equivalentes em outro sistema semiótico. Para o teórico, não é possível separar os diversos registros de representação semiótica da função cognitiva do pensamento humano. Ou seja, não há noésis (apreensão conceitual de um objeto) sem sémiosis (apreensão ou produção de uma representação semiótica).

Um registro de representação é uma representação semiótica que permite três atividades cognitivas, a saber: (1) *formação de uma representação identificável* que selecione as relações do conceito que serão representadas; (2) *tratamento*, que permita a transformação interna ao registro em que se formou; (3) *conversão* ou transformação externa, ou seja, para outro registro de representação (DUVAL, 2003).

Para resolver situações, dadas em vários registros de representação, o aluno deve buscar transformá-las nos registros que ele domina; mas como cada registro de representação traduz algumas, mas não todas as propriedades do objeto, um registro pode ser mais adequado que outro para lidar com esse objeto, em uma situação específica. Neste sentido, é importante trabalhar com os vários registros de representações de um mesmo objeto, pois

um ‘enclausuramento’ de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem. (DUVAL, 2003, p. 21).

No processo de ensino é preciso considerar que a conversão não é uma operação cognitiva neutra, pois mudar a forma de uma representação parece ser, para muitos alunos, nos diferentes níveis de ensino, uma operação difícil e muitas vezes impossível.

A seguir, apresentamos a análise dos livros didáticos da coleção selecionada.

4. ANÁLISE DA COLEÇÃO DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Para apresentar os resultados deste estudo, optamos por organizar um quadro para cada livro analisado, que exibe os capítulos nos quais identificamos atividades envolvendo grandezas proporcionais, o número de atividades identificadas. Bem como, destaca se a proporcionalidade é explorada de *forma explícita* (E) - as atividades propostas exigem do que

o aluno analise se grandezas são proporcionais, antes de aplicar uma regra, ou de *forma implícita* (I) - as atividades utilizam grandezas proporcionais, mas o foco é o entendimento de outros conteúdos ou a aplicação da regra de três. As grandezas envolvidas foram classificadas quanto à relação proporcional: grandezas diretamente proporcionais (GDP), grandezas inversamente proporcionais (GIP). Também foram classificados os registros explorados (registro numérico (RN), registro da língua natural (RLN), registro figural (RF), registro tabular (RT), registro algébrico (RA) e registro gráfico (RG)) e os sentidos das conversões entre eles.

Ao analisarmos o livro didático do 6º ano (quadro 2) constatamos que há atividades envolvendo proporcionalidade em cinco capítulos, sendo que todas envolvem proporcionalidade implícita e grandezas diretamente proporcionais.

Quadro 2: Análise do livro didático do 6º ano (LD1)

Capítulo	Nº Ativ. Grandezas Proporcionais	Prop. Imp. ou Exp.	Tipo G	Registros
Números naturais	1	(1) I	GDP	RN
Op. com números naturais	4	(4) I	GDP	RLN→RN
Múltiplos e divisores	3	(3) I	GDP	(1) RLN→RN (2) RN
Operações com números decimais	1	(1) I	GDP	RLN→RF→RN
Medidas de massa	3	(3) I	GDP	(2) RLN→RN (1) RLN→RT→RN

O livro do 7º ano apresenta o maior número de atividades (quadro 3) envolvendo proporcionalidade. Isso porque traz um capítulo específico sobre proporção, no qual apresenta 44 atividades envolvendo grandezas proporcionais. Além disso, na maioria das atividades a proporcionalidade aparece de forma implícita e o tipo de grandezas envolvidas é GDP. Verificamos, também, que o registro mais utilizado é numérico e a conversão mais explorada é RLN para RN. Cabe destacar que a grande maioria das atividades que envolviam o registro tabular apresentava a tabela pronta, com apenas dois valores para cada grandeza, ou seja, já estava estruturada visando a aplicação da regra de três, em especial no capítulo de proporção.

Quadro 3: Análise do livro didático do 7º ano (LD2)

Capítulo	Nº Ativ. Grandezas Proporcionais	Prop. Imp. ou Exp.	Tipo G	Registros
Operações com números decimais	(3) GP (1) GNP	(3) I (1) -	(3) GDP (1) GNP	(4) RLN→RN
Medidas de capacidade	3	(3) I	(3) GDP	(3) RLN→RN

Cálculo algébrico	5	(5) I	(5) GDP	(1) RLN→RN (2) RF→RT→RA (2) RA→RN
Proporção	(43) GDP (1) GNP	(31) I (12) E	(23) GDP (19) GIP (1) GDP e GIP	(22) RLN→RN (8) RT→RN (13) RLN→RT→RN (1) RLN→RF→RN
Revisão do Módulo 7 (Capítulo 11 Proporção; Capítulo 12 Porcentagem)	6	(5) I (1) E	(5) GDP (1) GIP	(6) RLN→RN

Vale destacar que o autor explora apenas a estratégia escalar (análise vertical) no capítulo sobre proporção. Acreditamos que é importante explorar as várias estratégias para a resolução de situações-problema, em especial, o sentido de co-variação e de inferência, pois contribuem para o desenvolvimento do raciocínio proporcional, bem como para o desenvolvimento da capacidade de generalização.

Ao analisarmos o livro do 8º ano identificamos um total de 51 atividades envolvendo grandezas proporcionais. O quadro 4 revela que na maioria das atividades (46) a proporcionalidade aparece de forma implícita. Isso porque no capítulo *Regra de Três* as atividades propostas, geralmente, envolviam as grandezas anunciadas nos exemplos dados anteriormente, portanto, o aluno pode resolver as situações sem precisar analisar se as grandezas são proporcionais ou não, apenas aplicava a regra utilizada nos exemplos. Em relação ao tipo de grandezas, a maioria envolvia GDP. Ainda, pode-se observar que o RN é o mais explorado, bem como, a conversão do RLN para RN.

Quadro 4: Análise do livro didático do 8º ano (LD3)

Capítulo	Tipo ativ.	Prop. Imp. ou Exp.	Tipo G	Registros
Cálculo algébrico	6	(6) I	(5) GDP (1) GDP e GNP	(2) RF→RA (2) RLN→RA (1) RT→RA (1) RLN→RA→RN
Regra de três	35	(30) I (5) E	(20) GDP (14) GIP (1) GDP e GIP	(20) RLN→RN (7) RT→RN (1) RLN→RN→RG (1) RLN→RT→RN (1) RG→RN
Revisão Módulo 8 (Capítulo 13 Medidas de Superfície; Capítulo 14 Regra de Três; Capítulo 15 Circunferência e círculo)	10	(10) I	(9) GDP (1) GIP	(10) RLN→RN

No livro didático do 9º ano há dez atividades envolvendo grandezas proporcionais, sendo que todas envolvem proporcionalidade implícita e grandezas diretamente proporcionais. O registro mais explorado é o RA.

Quadro 5: Análise do livro didático do 9º ano (LD4)

Capítulo	Tipo ativ.	Prop. Imp. ou Exp.	Tipo G	Registros
Atividades de Revisão Módulo 5 (Capítulo 6 Tratamento da informação e Capítulo 7 Plano Cartesiano)	1	I	GDP	RG→RN
Funções	11	(11) I	11 GDP	(4) RT→RA→RN (2) RT→RA (2) RG→RA (1) RLN→RA→RN (1) RF→RA→RN (1) RG→RA→RN

Esperávamos que neste livro a relação entre proporcionalidade direta e função afim fosse explorada, mas isso não foi realizado.

Diante dos dados, fica explícito que a proporcionalidade não é explorada como função, conforme defendem Ponte et al (2010), ou seja, a abordagem sobre o tema (proporcionalidade como igualdade de razões), ainda, guarda resquícios da teoria das proporções de Eudoxo. Esta teoria buscava superar a barreira dos incomensuráveis, mas por mais genial que fosse perdeu sua função com a elaboração da teoria dos números reais por Dedekind.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante desses resultados, é importante destacar que o conceito de proporcionalidade está relacionado a muitos outros conceitos matemáticos como porcentagem, número racional, função (principalmente, função linear), entre outros. Portanto, requer a mobilização de outros conceitos, em especial, conceito de função para a sua apropriação, bem como, a mobilização e coordenação de várias representações semióticas. No entanto, considerando o limite deste estudo, essas relações não foram privilegiadas pelo autor da coleção analisada.

Considerando que o livro didático é o principal recurso utilizado pela maioria dos professores torna-se imprescindível que os autores proponham atividades com maior ênfase na relação entre os vários conceitos do que apenas na manipulação de fórmulas.

6. Referências Bibliográficas

BERNAL, M. M. *Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. Dissertação de mestrado, UFSC, 2004.

BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto*. Parâmetros Curriculares Nacionais- Matemática 5ª a 8ª série. Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto*. Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: SEB, 2006.

COSTA, C. R. *Panorama de um estudo sobre razões e proporções em três livros didáticos*. Dissertação de mestrado – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

DUVAL, R. *Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 11-33, 2003.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica*. São Paulo: PROEM, 2011.

IMENES, L. M. P. *Proporcionalidade um tratamento funcional*. Slides dos Seminários de Ensino de Matemática Sema, 2008. Disponível em http://www.educared.org/educa/index.cfm?pg=textoapoio.ds_home&id_comunidade=179#1023. Acessado em dezembro de 2012.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. *A pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.

MIRANDA, M. R. *Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações*. Dissertação de mestrado, PUC/SP, 2009.

NUNES, T. *É hora de ensinar proporção*. Disponível em <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/hora-ensinar-proporcao-fala-mestre-terezinha-nunes-428131.shtml>. <Acessado em 02/11/2009>.

OLIVEIRA, I. *Proporcionalidade: estratégias utilizadas na Resolução de Problemas por alunos do Ensino Fundamental no Quebec*. In: Bolema, Rio Claro (SP), Ano 22, nº 34, 58 2009, p. 57 a 80.

OLIVEIRA, I. A. F. G. *Um estudo sobre a proporcionalidade: a resolução de problemas de proporção simples no ensino fundamental*. 2000. 127 folhas. Dissertação de mestrado, UFPE, 2000.

PONTE, J. P.; SILVESTRE, A. I.; GARCIA, C.; COSTA, S. *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade directa pela exploração de regularidades*. Disponível em [http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__\(IMLNA\)_4cfc0dcb29b46.pdf](http://www.apm.pt/files/_Materiais_Proporcionalidade__(IMLNA)_4cfc0dcb29b46.pdf). Acessado em dezembro de 2012.

POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. *A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra*. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

SILVA, E. A. *Pensamento proporcional e regra de três: estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas*. Dissertação de Mestrado, UTP, 2008.

SILVESTRE, A.; PONTE, J. (2009). *Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6.º ano*. In *Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática* (CDROM). Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática.

VERGNAUD, G. *A teoria dos Campos Conceituais*. In: BRUN, J. Didáctica das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. UFPR, 2009a.

VERGNAUD, G. *O que é aprender?* In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (org) *A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais*. Curitiba: Ed. CRV, 2009b.